

УДК 533.951:535.36

О КАСКАДНЫХ ПРОЦЕССАХ ВЫНУЖДЕННОГО РАССЕЯНИЯ ВОЛН В ОГРАНИЧЕННЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ СРЕДАХ

Г. В. Пермитин, В. И. Петрухина, И. В. Хазанов

Исследованы переходные процессы и стационарные режимы вынужденного обратного рассеяния (типа ВРМБ) интенсивной электромагнитной волны, падающей по нормали на плоский слой нелинейной среды. Учитывалась возможность развития многоволновых (каскадных) процессов ВР с многоступенчатой перекачкой энергии высокочастотных волн как вниз, так и вверх по частотному спектру. Показано, что пространственная ограниченность области взаимодействия волн существенным образом влияет на динамику ВР. Отмечается, что каскадные процессы в слоях могут приводить к автомодуляционным режимам ВР.

Основным процессом, приводящим к вынужденному рассеянию (ВР) волн в средах с квадратичной нелинейностью, является распадное взаимодействие $t_0 \rightarrow t_1 + s$, где t_0, t_1 символизируют падающую и рассеянную плоские волны вида $a_{0,1}(t, r) \exp(i\omega_{0,1}t - ik_{0,1}r) + \text{к. с.}$, а s — медленную волну параметра среды, на вариациях которого происходит рассеяние $(b(t, r) \exp(i\Omega t - ixr) + \text{к. с.})$. Частоты и волновые векторы удовлетворяют условиям волнового резонанса $\omega_0 = \omega_1 + \Omega$, $k_0 = k_1 + x$ и линейному дисперсионному уравнению $\omega = \omega(k)$. Комплексные амплитуды a являются медленными и плавными функциями в масштабах периодов и длин волн. Аналогичные свойства амплитуды индуцированной волны параметра b , вообще говоря, не обязательны, но в данной работе рассматриваются только такие случаи, когда s близка к одной из собственных волн среды (например, к звуковой при ВРМБ) с законом дисперсии $\Omega = \Omega(x)$.

Трехвольновое описание ВР является достаточно обоснованным лишь на начальной (линейной) стадии процесса, пока амплитуда рассеянной волны мала по сравнению с падающей. На нелинейной стадии могут, в принципе, оказаться существенными повторные распады: $t_1 \rightarrow t_2 + s_2$, $t_2 \rightarrow t_3 + s_3$ и т. д., а также антистоксовы процессы слияния волн с повышением частоты ($t_n + s_q \rightarrow t_m$). Такие многоступенчатые процессы ВР называются каскадными, они могут приводить к значительным энергетическим потерям и нелинейным фазовым расстройкам волнового резонанса в исходном трехвольновом взаимодействии ($t_0 \rightarrow t_1 + s$) и, как следствие, к снижению эффективности нелинейного отражения, обусловленного вынужденным рассеянием.

Принципиальная возможность нелинейного насыщения ВР на низком уровне в результате развития каскадных процессов неоднократно отмечалась в литературе (см., например, [1]). Однако последовательный учет многоступенчатых процессов обратного рассеяния проводился ранее либо в приближении пространственно-однородной модели ($a_x = 0$) [2], либо при исследовании стационарных режимов в ограниченных слоях нелинейной среды ($a_t = 0$, $0 < x < L$) [3–5]. В настоящей работе приводятся результаты исследования переходных процессов ВР ($a_t \neq 0$, $a_x \neq 0$) в нелинейных ограниченных системах с малой диссипацией волн с учетом возможности многократного рассеяния.

Основные результаты получены численными методами на ЭВМ; некоторые стационарные режимы многоволнового рассеяния исследованы аналитически.

1. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ПРИБЛИЖЕНИЯ

Рассматривается задача о вынужденном обратном рассеянии интенсивной плоской волны t_0 , падающей по нормали на плоский слой нелинейной среды, прозрачной в линейном приближении. Волновые поля зависят от времени и только от нормальной к слою координаты x ($a_t \neq 0, a_x \neq 0, a_y = a_z = 0$). Предполагается, что интенсивность падающей волны ограничена сверху, так что характерный инкремент γ_0 развивающейся в ее поле параметрической неустойчивости меньше частоты Ω медленной волны параметра ($\gamma_0 \ll \Omega$), которая при этом является собственной волной среды (для краткости будем называть ее звуком, как при ВРМБ). Считается также, что скорость звуковых волн $v = \partial \Omega / \partial k$ много меньше скорости высокочастотных (ВЧ) волн $c = \partial \omega / \partial k$ ($v \ll c$). При этом разброс частот Ω_i звуковых волн s_i , находящихся в синхронизме с различнымиарами ВЧ волн, относительно мал ($|\Omega_i - \Omega_j| \sim |i - j| (v/c) \Omega \ll \Omega$), и допустимо описание каскадных процессов с участием всего двух встречных квазимонохроматических звуковых волн s_1 и s_2 с медленно меняющимися по сравнению с $\exp(i\Omega t)$ комплексными амплитудами $b_1(t, x)$ и $b_2(t, x)$ и одинаковыми частотами Ω . Спектр ВЧ волн можно считать эквидистантным: $\omega_n = \omega_0 + n\Omega$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Пренебрегая линейной диссипацией волн и их дисперсией ($\omega_n = (-1)^n ck_n$, $\Omega = \pm vx_{1,2}$), можно записать следующую бесконечную цепочку укороченных уравнений для комплексных амплитуд:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial x} \right) a_{2n} &= (a_{2n+1} b_2^* \exp(ihx) - a_{2n-1} b_1) \exp(inhx), \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial x} \right) a_{2n-1} &= (a_{2n} b_1^* - a_{2n-2} b_2) \exp(-inhx), \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial x} \right) b_1 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{2n} a_{2n-1}^* \exp(-inhx), \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} - v \frac{\partial}{\partial x} \right) b_2 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{2n-1} a_{2n-2}^* \exp(ihx), \end{aligned} \quad (1)$$

где амплитуды волн нормированы таким образом, чтобы амплитуда падающей волны на входе в слой была равна инкременту распадной неустойчивости ($a_{0,x=0} = \gamma_0$), $\hbar = 4\Omega/c$ — параметр фазовой расстройки.

Уравнения (1) справедливы в слое $0 < x < L$, отражением волн от границ и взаимодействием их за пределами слоя пренебрегается, что возможно, если границы нелинейной среды размыты в масштабе длины волн, но являются достаточно резкими в масштабе критической длины взаимодействия $L_{kp} = \pi \sqrt{cv}/2\gamma_0$. Система (1) должна быть дополнена начальными и краевыми условиями; в данной работе мы ограничились рассмотрением только таких случаев, когда начальные амплитуды рассеянных волн много меньше амплитуды падающей волны, рассеяние на начальных флуктуациях параметров среды мало и краевые условия стационарны:

$$a_n(t=0, x) = a_n^{(0)}(x), \quad b_m(t=0, x) = b_m^{(0)}(x),$$

$$|a_n^{(0)}|_{n \neq 0} \ll a_0^{(0)} = \gamma_0, \quad |b_m^{(0)}| L/c \ll 1; \quad (2)$$

$$\begin{aligned} a_{2n}|_{x=0} &= a_{2n}^{(0)}(0), \quad a_{2n-1}|_{x=L} = a_{2n-1}^{(0)}(L), \\ b_1|_{x=0} &= b_1^{(0)}(0), \quad b_2|_{x=L} = b_2^{(0)}(L). \end{aligned} \quad (3)$$

При произвольных начальных и граничных условиях многоволновый процесс ВР с самого начала мог бы быть описан только полной бесконечной цепочкой уравнений (1). Однако при условиях вида (2), (3) он развивается по типу каскадного процесса — число эффективно возбужденных волн растет со временем постепенно. Поэтому на ограниченных промежутках времени можно учитывать лишь конечное число уравнений (1), что позволяет исследовать их численными методами. Составленная для ЭВМ программа позволяла учитывать до 16 взаимодействующих волн; применялась неявная схема бегущего счета [6]. Время счета резко увеличивалось с уменьшением шага счета по координате $\Delta x = L/N$ и отношения скоростей v/c . Поэтому мы были вынуждены ограничиться рассмотрением вариантов, в которых эти параметры составляли: $v/c \sim 0,1 \div 0,01$, $N \sim 100 \div 200$. Так как шаг счета по x должен быть много меньше характерного масштаба изменения полей, т. е. критической длины взаимодействия ($\Delta x \ll L_{kp}$), то фиксация шага на-кладывает ограничения на соотношение между амплитудой падающей волны и толщиной слоя: $l = \gamma_0 L / \sqrt{cv} \leq 20 \div 40$. Начальные условия в счетах задавались в виде плавных в масштабе L_{kp} функций.

2. УСТОЙЧИВОСТЬ ТРЕХВОЛНОВЫХ РЕЖИМОВ ВЫНУЖДЕННОГО РАССЕЯНИЯ*

В пространственно-однородных моделях ($\partial/\partial x = 0$) каскадные процессы ВР развиваются наиболее эффективно в тех случаях, когда фазовые расстройки волнового резонанса малы [2]. Поэтому исследование каскадных процессов в ограниченных системах решено было начать со случая полного синхронизма между всеми взаимодействующими волнами, что соответствует для системы (1) $h=0$, а для реальных слоев $hL_{kp} \ll 1$. Результаты расчетов, однако, оказались несколько неожиданными: каскадный процесс ВР вообще не развивался — амплитуды всех волн, за исключением триплета (t_0, t_{-1}, s_1) , изменялись крайне незначительно, оставаясь на уровне начальных возмущений. Причины эмпирически установленной устойчивости трехволновых режимов ВР заключаются в коренных отличиях динамики переходных трехволновых процессов обратного рассеяния в ограниченных системах [8] от динамики процессов в пространственно-однородных моделях [9]. Специфика ограниченных систем проявляется уже на линейной стадии процесса ($|a_{-1}| \ll |a_0|$) — эффективно нарастают только пространственно-неоднородные возмущения с характерными масштабами $\sim L_{kp}$ [10]. Нарастая, эти возмущения образуют на нелинейной стадии ($|a_{-1}| \sim |a_0|$) квазирегулярную структуру полей в виде нескольких солитонов огибающих [8, 11]:

$$\begin{aligned} a_n(t, x) &= \sum_m a_n^{(m)}(t, x) + \alpha_n(t, x), \quad |\alpha_n| \ll \max |a_n^{(m)}|. \\ a_0^{(m)} &= \pm a_{-1}^{(m)} = A_m \operatorname{sech}(\eta_m(t, x)), \end{aligned}$$

* Имеется в виду устойчивость только по отношению к развитию каскадных процессов. Материалы этого раздела докладывались на I Всесоюзном семинаре по параметрической турбулентности плазмы [7].

$$b_1^{(m)} = \pm A_m \sqrt{c/(v-u_m)} \operatorname{th}(\eta_m(t, x)), \quad (4)$$

$$\eta_m = A_m (x - x_m - u_m t) / \sqrt{c(v-u_m)},$$

где параметры u_m , A_m , x_m , характеризующие скорости, амплитуды и места зарождения солитонов, зависят от конкретного вида начальных условий. Тогда один из солитонов — «пристеночный» — соответствует вполне определенным параметрам: $u_0=0$, $A_0=a_0^{(0)}=\gamma_0$, $x_0=0$. Как видно из (4), в солитонах локализованы только ВЧ поля, поэтому их нельзя считать полностью изолированными. Однако их связь между собой и с границами слоя через медленную волну достаточно слаба, и можно говорить о физической реализуемости квазисолитонных распределений полей (4). После выбегания подвижных солитонов со скоростями $u_m < v$ за пределы слоя квазистационарное состояние (4) переходит в известное стационарное распределение полей, описываемое кноидальными функциями (см., например, [12]).

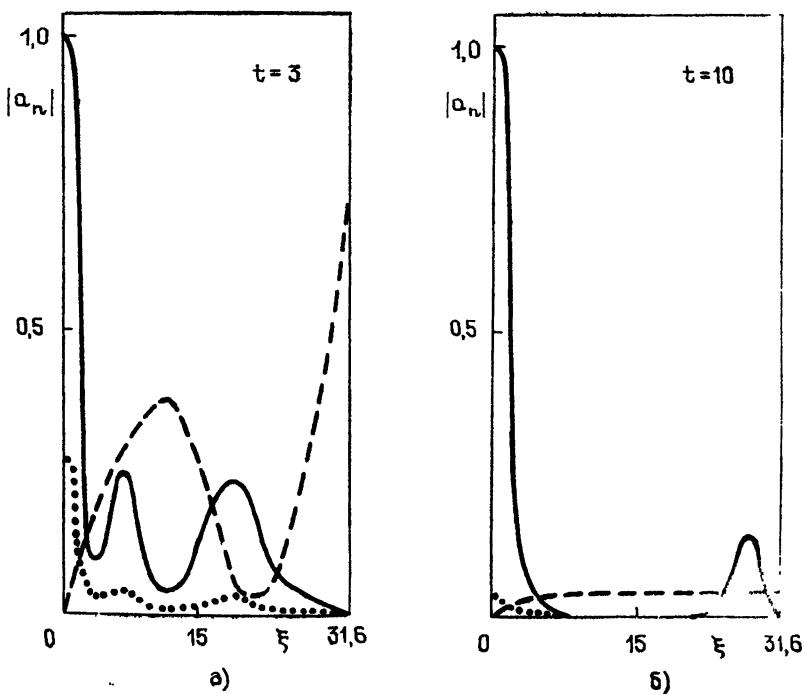


Рис. 1. Огибающие ВЧ волн на переходной стадии процесса ВР, нормированные на амплитуду падающей волны. Безразмерная толщина слоя $l=\gamma_0 L/\sqrt{cv}=31,6$, $v/c=0,1$. Время пробега быстрой волны через слой принято за единицу. Распределение a_{-1} мало отличается от a_0 (a_0 — сплошная линия, a_{-2} — штриховая, a_{+1} — точки).

Квазистационарные распределения полей (4) обладают следующими общими свойствами, не зависящими от начальных условий [8]. Во-первых, характерные масштабы локализации ВЧ полей в каждом отдельном солитоне совпадают с критической длиной распадного взаимодействия, определяемой амплитудой данного солитона (строго совпадают только в случае невозмущенной стационарной волны вида (4) в бесконечно протяженной системе; в слоях конечной толщины реализуются распределения, близкие к (4), но их эффективные размеры несколько меньше L_{kp}). Во-вторых, амплитуды первичной и рассеянной

волн всюду приблизительно равны. В силу первого свойства каждый отдельный солитон не может быть генератором волн второй ступени, а может лишь усиливать их [10]. В силу второго свойства на второй ступени каскада не может быть изолированно реализован трехвольновый распадный процесс $t_{-1} \rightarrow t_{-2} + s_2$, так как он при отсутствии фазовых расстроек обязательно должен сопровождаться рассеянием падающей волны на зарождающемся звуке ($t_0 + s_2 \rightarrow t_{+1}$), рассеянием зарождающейся волны t_{-2} на уже интенсивном звуке s_1 ($t_{-2} \rightarrow t_{-3} + s_1$) и процессом слияния $t_{+1} + s_1 \rightarrow t_{+2}$. Во всех этих «паразитных» процессах участвуют центральные волны первой ступени каскада, поэтому они эффективно забирают энергию у зарождающихся волн второй ступени t_{-2} и s_2 , уменьшая, тем самым, их временные инкременты и увеличивая критическую длину взаимодействия ($L_{kp}^{(2)} \sim 2L_{kp}$). По этой причине пространственное усиление волн t_{-2} , s_2 на отдельном солитоне оказывается незначительным.

Развитие процессов ВР с перекачкой энергии вверх по частотному спектру в ограниченных системах может быть, в принципе, связано с когерентным усилением возмущений несколькими солитонами огибающих. Такие ситуации действительно были реализованы (при специальном подборе начальных условий) в численных экспериментах (рис. 1). Однако все солитоны, кроме стабильного пристеночного, постоянно подпитываемого падающей волной, обладают конечной запасенной энергией и, следовательно, могут поддерживать каскадный процесс только конечное (не очень продолжительное) время (рис. 1б).

В противоположном предельном случае сильных фазовых расстроек ($hL_{kp} \gg 1$) антистоксовы «паразитные» взаимодействия подавлены, а распад волны t_{-2} приводит к образованию «нового» звука s_3 , отстроенного по частоте от s_1 на величину $2(v/c)\Omega$, большую частотной полосы s_1 , которая на нелинейной стадии совпадает с инкрементом абсолютной неустойчивости $\gamma_{abs} = 2\gamma_0 \sqrt{v/c}$. Далее мы рассмотрим каскадный процесс в оптимальных условиях, когда распад $t_{-2} \rightarrow t_{-3} + s_3$ также запрещен (например, в силу дисперсионных свойств системы).

3. СТАЦИОНАРНЫЕ РЕЖИМЫ ПЯТИВОЛНОВЫХ ПРОЦЕССОВ ВЫНУЖДЕННОГО РАССЕЯНИЯ

Полагая в (1) $\partial/\partial t = 0$ и сохраняя только члены, не зависящие от фазовых расстроек волнового резонанса, получаем следующую систему уравнений в обыкновенных производных:

$$\begin{aligned} u'_0(\xi) &= -u_1 w_1, \quad -u'_1 = u_0 w_1^* - u_2 w_2, \\ u'_2 &= u_1 w_2^*, \quad w'_1 = u_0 u_1^*, \quad -w'_2 = u_1 u_2^*, \end{aligned} \tag{5}$$

где $\xi = \gamma_0 x / \sqrt{cv}$ — безразмерная координата, $u_n = a_{-n} / \gamma_0$, $w_m = \sqrt{v} b_m / \gamma_0 \sqrt{c}$. Уравнения (5) составляют систему десятого порядка для действительных величин, и общего их решения нам найти не удалось. Однако в важном частном случае нулевых граничных условий для вторичных волн ($u_1(\xi = l) = w_1(\xi = 0) = 0$, $l = \gamma_0 L / \sqrt{cv}$ — безразмерная толщина слоя) (5) сводится к системе пятого порядка для действительных переменных. Убедиться в этом можно заменой переменных в (5). Пусть нас интересует решение (5) со следующими краевыми условиями:

$$\begin{aligned} u_0|_{\xi=0} &= 1, \quad u_1|_{\xi=l} = w_1|_{\xi=0} = 0, \\ u_2|_{\xi=0} &= \alpha \exp(i\varphi_1), \quad w_2|_{\xi=l} = \beta \exp(i\varphi_2). \end{aligned} \tag{6}$$

Уравнения (5) инвариантны относительно замены переменных: $u_2 \rightarrow \tilde{u}_2 \exp(i\varphi_1)$, $w_2 \rightarrow \tilde{w}_2 \exp(i\varphi_2)$, $u_1 \rightarrow \tilde{u}_1 \exp(i\varphi_1 + i\varphi_2)$, $w_1 \rightarrow \tilde{w}_1 \times \exp(-i\varphi_1 - i\varphi_2)$, которая переводит краевые условия (6) в действительные. А решение (5) с действительными краевыми условиями всюду действительно. В дальнейшем мы будем искать решения (5) в области действительных чисел с граничными условиями (6), где $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$, $\alpha, \beta > 0$. Следует отметить, что эти решения дают достаточно полное представление о поведении огибающих полей и в случае, когда $|u_1(l)|, |w_1(0)| \ll 1$. При этом фазы затравочных полей неважны, так как они очень быстро меняются в малых окрестностях границ, а в основной толще слоя устанавливаются фазы, оптимальные для взаимодействия волн.

Домножением каждого из уравнений (5) на функцию, стоящую под знаком дифференцирования, и последующим их сложением в различных комбинациях можно получить три независимых интеграла системы:

$$u_0^2 + w_1^2 = \text{const} = 1, \quad u_2^2 + w_2^2 = \text{const}, \quad u_1^2 + w_1^2 + w_2^2 = \text{const}. \quad (7)$$

Используя эти интегралы и переходя в (5) к дифференцированию по новой переменной y , удовлетворяющей уравнению

$$y'(\xi) = u_1(y), \quad y(0) = 0, \quad (8)$$

получаем

$$\begin{aligned} du_0/dy &= -w_1, & dw_1/dy &= u_0, \\ du_2/dy &= w_2, & dw_2/dy &= -u_2. \end{aligned} \quad (9)$$

Решения (9) с краевыми условиями (6), где $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$, имеют вид $u_0 = \cos y$, $w_1 = \sin y$,

$$u_2 = \alpha \cos y + \frac{\alpha S + \beta}{T} \sin y, \quad w_2 = \frac{\alpha S + \beta}{T} \cos y - \alpha \sin y, \quad (10)$$

$$u_1^2 = S^2 + \beta^2 - \sin^2 y - \left(\frac{\alpha S + \beta}{T} \cos y - \alpha \sin y \right)^2,$$

где $T = \cos y(l)$ — коэффициент прохождения падающей волны через слой, $S = \sin y(l)$. Подставляя $u_1(y)$ в (8) и интегрируя по ξ от 0 до l , а по y от 0 до $\pm \arccos T$, получаем следующее характеристическое уравнение:

$$\begin{aligned} \sqrt{\sigma} l &= (2n-1)K(k) + \text{sign } \gamma F(\varphi, k), \\ \gamma &= (\alpha S + \beta \text{sign } R)/T, \quad S = (-1)^{n-1} \sqrt{1-T^2}, \end{aligned} \quad (11)$$

$$R = \pm \sqrt{S^2 + \beta^2 - \gamma^2}, \quad \sigma = \sqrt{(1+\alpha^2-\gamma^2)^2 + 4\alpha^2\gamma^2},$$

$$k^2 = [2R^2 + \sigma - (1+\alpha^2-\gamma^2)]/2\sigma, \quad \varphi = \arccos(R/k\sqrt{\sigma}),$$

где $K(k)$, $F(\varphi, k)$ — полный и неполный эллиптические интегралы первого рода, R — коэффициент нелинейного отражения от слоя (по амплитуде), $n = 1, 2, \dots$ — номера мод с одной, двумя и т. д. вариациями амплитуд полей в слое (точнее n — число нулей амплитуды $u_1(\xi)$ на интервале $(0, l]$).

При $\alpha, \beta \rightarrow 0$ нетривиальные решения для u_2, w_2 , как видно из (10), существуют только в случае $T \rightarrow 0$. При этом в (11) $\sigma \rightarrow R$, $k \rightarrow 1$, $\varphi \rightarrow 0$ и,

следовательно, $l \rightarrow \infty$. Таким образом, режим стационарной генерации волн второй ступени возможен только в полубесконечном слое ($0 < \xi < \infty$). В слоях конечной толщины может иметь место лишь пространственное усиление волн u_2, w_2 , падающих на слой (α или $\beta \neq 0$). В случае $\alpha, \beta \rightarrow 0$ (11) переходит в известное [12] характеристическое уравнение трехволнового обратного рассеяния: $l = (2n-1)K(R)$, $R = \pm\sqrt{1-T^2}$. Решения, соответствующие разным знакам модуля эллиптического интеграла, отличаются лишь знаками амплитуд u_1 и w_1 , т. е. моды $\epsilon \operatorname{sign} R = 1$ и $\operatorname{sign} R = -1$ в трехволновом приближении вырождены. Такое же вырождение имеет место и для пятиволновых процессов в случаях $\alpha \neq 0, \beta = 0$ или $\alpha = 0, \beta \neq 0$. Если, однако, $\alpha \neq 0$ и $\beta \neq 0$, вырождение снимается, и каждому номеру n в (11) соответствуют две моды с разными коэффициентами прохождения $T_n^{(\pm)}$ и отражения ($R_n^{(-)} \neq -R_n^{(+)}$). Зависимости коэффициентов отражения $R_{1,2}^{(+)}$ от безразмерной толщины слоя l ($\gamma_0 = \text{const}$) приведены на рис. 2а, б.

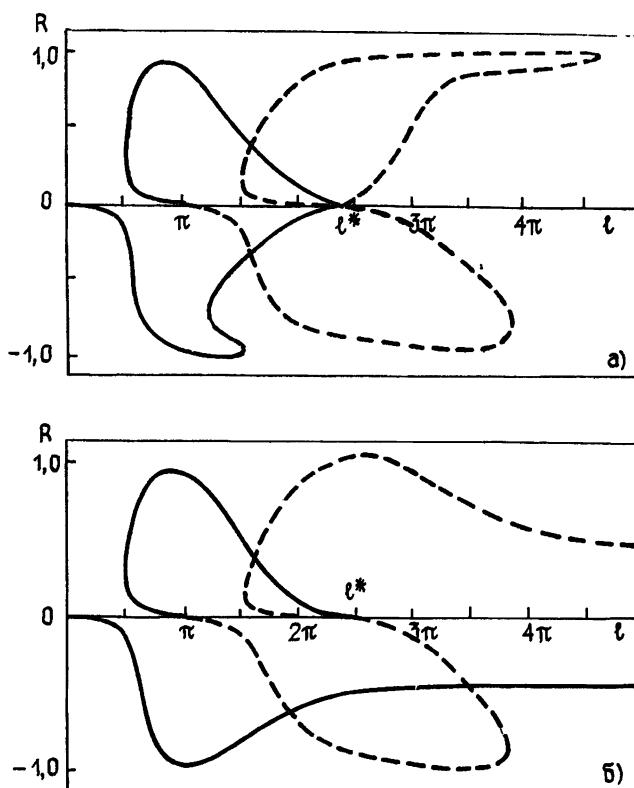


Рис. 2. Зависимость коэффициента нелинейного отражения от толщины слоя ($\gamma_0 = \text{const}$) для низших стационарных мод ($n=1$ — сплошная линия, $n=2$ — пунктир); а) $\alpha > \beta$; б) $\alpha < \beta$

Критическое для каждой моды значение l_n , при котором $R_n(l_n) = 0$, $T_n(l_n) = 1$, в случае $\alpha, \beta \ll 1$ приблизительно равно

$$l_n \approx (\pi/2) [(2n-1) + \operatorname{sign} R_n]. \quad (12)$$

Первая мода с $R < 0$ может существовать в сколь угодно тонких слоях ($l_1^{(-)} = 0$), в отличие от трехволновых процессов, где $l_1 = l_{\text{кр}} = \pi/2$). Беспороговость пятиволновых взаимодействий объясняется тем, что в тонких слоях ($l < \pi/2$), где распад $t_0 \rightarrow t_{-1} + s_1$ запрещен, первичным

становится процесс слияния $t_{-2} + s_2 \rightarrow t_{-1}$. Если же амплитуда одной из сливающихся волн зануляется, процесс снова становится пороговым (см. рис. 3б, на котором построена зависимость $R(l)$ при $\alpha \neq 0$, $\beta = 0$).

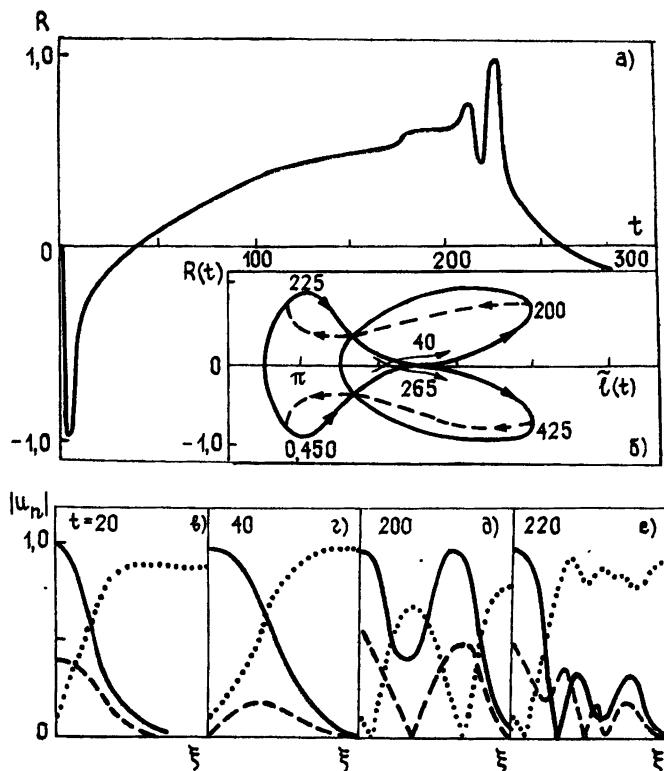


Рис. 3. Автомодуляционный режим ВР ($l=15,8$, $v/c=0,1$, $\alpha=0,1$, $\beta=0$);

а) зависимость коэффициента отражения от времени за один полупериод процесса; б) зависимость стационарного коэффициента отражения от эффективной толщины слоя \tilde{l} ; в) — е) огибающие ВЧ полей в различные моменты времени: u_0 — сплошная линия, u_1 — пунктир, u_2 — точки.

Первая мода с $R > 0$ имеет порог по толщине слоя и при $\alpha, \beta \neq 0$ ($l_{\text{пор}}^{(+)} \approx l_{\text{кр}} = \pi/2$), но отличается жестким режимом возбуждения ($R_1^{(+)}(l_{\text{пор}}^{+}) \neq 0$).

За исключением случаев, когда $\beta > \alpha$ и $\text{sign } R_n = (-1)^n$, моды имеют и второе критическое значение l_n^* , при котором $R_n(l_n^*) = 0$, $T_n(l_n^*) \approx \alpha - (-1)^n \beta \text{ sign } R > 0$,

$$l_n^* \approx [(2n-1) - (-1)^n] K (1/\gamma 2) / \sqrt{2\alpha}. \quad (13)$$

Стационарные моды не могут быть возбуждены в очень протяженных слоях, хотя при $n \neq 1$ исчезают не обязательно при $l = l_n^*$ (см. рис. 2а). Важным свойством системы (5) является запрещенность основного состояния с $n=1$ при $l > l_n^*$. Исключением, как уже отмечалось, являются моды с $\text{sign } R = (-1)^n$ при $\beta > \alpha$, которые могут существовать в сколь угодно протяженных слоях; при $l \rightarrow \infty$ $R_n \rightarrow (-1)^n \sqrt{\alpha/\beta}$ (см. рис. 2б).

Выбрав конкретную моду (номер n и знак R) и определив T_n , σ_n , K_n , φ_n из характеристического уравнения (11), можно в явном виде

выразить зависимости амплитуд полей от координаты ξ через эллиптические функции Якоби:

$$u_1(\xi) = \text{sign } R \sqrt{\sigma} k \operatorname{sn}(\eta(\xi), k), \quad (14)$$

$$\eta(\xi) = \sqrt{\sigma} \xi - \text{sign } \gamma F(\varphi, k).$$

Остальные амплитуды определяются выражениями (10), где

$$y(\xi) = \text{sign } R [\arccos(\sqrt{1-k^2} \operatorname{sn}^2 \eta) + \arccos(\sqrt{1-k^2} \sin^2 \varphi)]. \quad (15)$$

Мы не будем приводить здесь графические иллюстрации распределений амплитуд при различных значениях параметров — достаточно полное представление о них дают рис. 3 в—д, на которых приведены огибающие ВЧ волн в различные моменты времени для автомодуляционного процесса ВР.

Численные исследования системы (1) показали, что далеко не при всех значениях параметров полученные здесь стационарные состояния устойчивы (см. разд. 4). В заключение заметим, что при $l \ll l_1^*$ можно упростить характеристическое уравнение (11), воспользовавшись асимптотиками эллиптических интегралов при $k' = \sqrt{1-k^2} \rightarrow 0$. Так, для случая $\beta=0$ имеем

$$R \approx -\ln \alpha/l, \quad \exp(-l) < \alpha \ll 1, \quad (16)$$

$$\sigma \approx R, \quad k' = \alpha/R^2 \sqrt{1-R^2}.$$

При $\alpha=0$ в (16) следует сделать замену $\alpha \rightarrow \beta$.

Из (16) видно, что даже при очень малых затравочных амплитудах волн второй ступени нелинейное отражение от широких ($l \gg l_{kp}$) слоев может быть существенно подавлено. Например, для $\alpha=0,01$ и $l \sim 6 l_{kp}$ получаем $R \approx 0,5$.

4. АВТОМОДУЛЯЦИОННЫЕ РЕЖИМЫ ВЫНУЖДЕННОГО РАССЕЯНИЯ

Как показали расчеты на ЭВМ, областям параметров с однотипными структурами стационарных состояний системы соответствуют однотипные поведения решений нестационарных уравнений (1) (даже в тех случаях, когда стационарные состояния неустойчивы и не могут быть реализованы).

В области «одномодовости» ($l_{kp} \leq l \ll l_1^*$), в которой может быть возбуждена либо только одна основная мода ($n=1$), либо несколько мод, но амплитуды высших мод много меньше основной, процесс ВР независимо от начальных условий выходит на устойчивый стационарный режим.

В области «закритичности» ($l > l_1^*$) устойчивых стационарных состояний не существует, и в системе устанавливается автомодуляционный режим ВР; коэффициент нелинейного отражения периодически осциллирует во времени, меняясь от $R=1$ до $R=-1$. На рис. За приведен один полупериод колебаний коэффициента отражения. (Расчеты проводились при следующих значениях параметров системы: $l=15,8$, $\beta=0$, $\alpha=0,1$, $l_1^*=8,2$. Время пробега быстрой волны через слой принято за единицу; период колебаний приблизительно равен 450.) Структура огибающих взаимодействующих волн непрерывно менялась во времени; эмпирически было установлено приблизительное структурное подобие между пространственными распределениями полей в фиксированные моменты времени при автомодуляционном процессе и стационарными

состояниями системы с тем же коэффициентом отражения в слое с некоторой эффективной длиной $\tilde{l} \neq l$ ($R(t, l) \neq R_{\text{ст}}(\tilde{l})$, $a(x, t, l) \neq u(\xi, t)$). На рис. 3б нанесена зависимость коэффициента стационарного отражения от эффективной длины. Система как бы совершает движение по замкнутой петле, размеченной на рис. 3б стрелками; цифрами помечены времена прохождения характерных состояний. На временном интервале (0, 40) структура полей соответствует первой стационарной моде (рис. 3в). При $t \rightarrow 40$ распределение полей близко к изображенному на рис. 3г ($\tilde{l} \rightarrow l^*$). Затем знак R меняется и система переходит в состояние, соответствующее второй стационарной моде (рис. 3д). Движение на интервале (40, 200) замедляется, затем начинаются быстрые переходные процессы, переводящие систему в состояние с возбужденной первой модой (200, 220). На рис. 3б этот скачкообразный переход обозначен пунктирной линией; структуры полей во время переходного процесса далеки от стационарных состояний (рис. 3е). Далее процесс повторяется.

В промежуточной области параметров ($l_{\text{кр}} \ll l < l_*$) по мере увеличения толщины слоя устойчивые стационарные состояния сменяются квазистационарными режимами. Эти режимы интересны тем, что амплитуды полей в них совершают малые колебания около некоторого распределения (для случая $l=31,6 \gg l_{\text{кр}}$, $\alpha=10^{-7}$, $l^*=8,2 \cdot 10^4$ оно приведено на рис. 4а), заметно отличающегося от стационарного (рис. 4б). Осциллирующие возмущения полей малы по сравнению с амплитудами волн в областях локализации последних ($|u_n(t) - \bar{u}_n(t)| \leq 10^{-8}$).

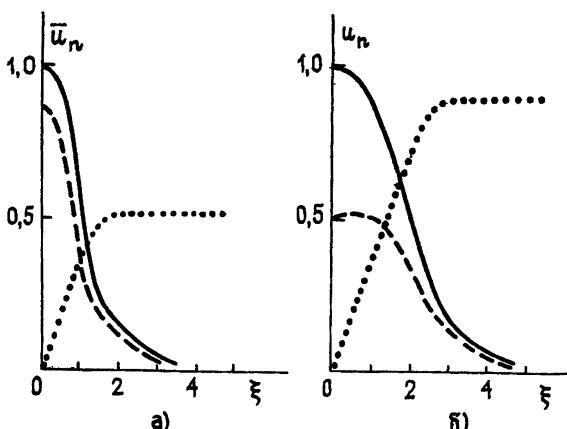


Рис. 4. а) Усредненные по периодам малых колебаний амплитуды ВЧ волн: u_0 — сплошная линия, u_1 — пунктир, u_2 — точки ($l=31,6$, $\alpha=10^{-7}$, $\beta=0$, $v/c=0,1$). При $\xi > 6$ $u_2 \approx 0,51$, $u_0, 1 \ll 10^{-3}$. Амплитуды осциллирующих возмущений $\sim 10^{-3}$; б) стационарное состояние системы при тех же значениях параметров ($T=u_0(l)=1,16 \cdot 10^{-7}$).

Однако эти возмущения равномерно распределены по всему слою (не локализованы), и их интегральное влияние на эффективность процесса рассеяния оказывается существенным. Этот результат можно понять, если учесть, что усиление волн второй ступени каскада, как это видно из формул (10), (11), сильно зависит от степени близости эффективной длины области распределения поля u_1 к критической ($l_{\text{кр}}$). Эта близость в стационарном состоянии характеризуется величиной $T=u_0(l)$ — амплитудой поля волны t_0 на выходе из слоя («хвост» распределения) ($T \rightarrow 0$ при $l \rightarrow \infty$). Так как $|R| \simeq \sqrt{1-(\alpha^2/T^2)}$ ($\beta=0$) (11), то существует

вённое подавление ВР от слоя возможно, если $|T| \simeq |\alpha|$. В описанных же квазистационарных режимах амплитуда волн t_0 на выходе из слоя значительно превышает α (точнее $|u_0(t, l)| \gg |\alpha|$). Поэтому значения разности между эффективной длиной усиления волн второй ступени каскада и L_{kp} в этом случае и в стационарном состоянии могут заметно отличаться даже при малых по абсолютной величине амплитудах осцилляций*. В результате эффективность подавления ВР от слоя снижается. Подобные ограничения подавления ВР из-за возникновения автомодуляции появляются и при других механизмах насыщения ВР (см., например, [13]). По-видимому, автоколебания при вынужденном рассеянии являются достаточно общим свойством нелинейных систем при больших интенсивностях падающей волны.

Учет процесса $t_{-2} \rightarrow t_{-3} + s_3$ приводит к подавлению распада $t_{-1} \rightarrow t_{-2} + s_2$ и вновь делает исходный трехволновой режим $t_0 \rightarrow t_{-1} + s_1$ устойчивым. Таким образом, возможен лишь двухступенчатый каскадный процесс. Учет низкочастотной нелинейности, например, генерации гармоник звука (см., например, [14]) не изменит данного вывода и оставит запрет на развитие каскадных процессов в силе, так как такие механизмы лишь затрудняют рост вторичных волн в каждой ступени каскада. Кроме того, низкочастотная нелинейность часто не меняет качественной картины явлений при ВР (см., например, [3]). С другой стороны, можно привести примеры систем с обратным ВР, для которых достаточно пятиволнового описания. Третья ступень каскада не возникнет, если в системе есть высокочастотная дисперсия. Низкочастотной нелинейностью можно пренебречь, если амплитуды низкочастотных волн малы или в системе есть также низкочастотная дисперсия. Рассмотрим, например, распадные взаимодействия $l \rightarrow l' + s$ плазменных и ионно-звуковых волн в ограниченной области плазмы. Они возможны лишь при $k r_{de} > \sqrt{m/M}$ (k — волновой вектор плазменной волны, r_{de} — дебаевский радиус электрона, m и M — соответственно массы электрона и иона). Поэтому волна L_3 не возникнет, если для волнового вектора k_2 волны L_2 выполнено условие $k_2 r_{de} \leq (m/M)^{1/2}$. Амплитуды ионно-звуковых волн вследствие медленности плазменных волн получаются также весьма малыми: $\frac{W_s}{W_l} \sim \frac{\Omega_s}{\omega_{de}} \frac{c_l}{v_s} < (m/M)^{1/2}$. Другой

пример — рассеяние Рамана волны с частотой $\omega_0 \sim 3,5 \omega_{de}$ (ω_{de} — ленгмюровская частота электронов) в сравнительно плотной горячей плазме. В практическом отношении проще представляется ситуация в волноводах, где у волн также возможна сильная дисперсия. Приведем пример акустических волноводов, где пятиволновой моделью обратного ВР можно в ряде случаев описывать взаимодействие между низшими модами (см., например, [15, 16]). Отметим, что в отличие от выше приведенных расчетов, где зависимости групповых скоростей волн и их коэффициентов нелинейного взаимодействия выбраны в наиболее простом виде, в обсуждаемых примерах эти величины будут несколько изменяться как для волн внутри каждой ступени каскада, так и при переходе от первой ступени ко второй. Тем не менее, если частоты и волновые векторы волн выбирать таким образом, чтобы критическая длина взаимодействия для волн второй ступени каскада не превышала такой для первой ступени ($L_{kp}^{(2)} \leq L_{kp}^{(1)}$), то нестационарные эффекты, описанные выше, по-видимому, сохранятся.

Авторы благодарны А. Г. Литваку, обратившему их внимание на рассматриваемую проблему, и В. В. Курину за полезные замечания.

* Учет в численных расчетах линейного затухания волн (слабого) к изменению результата не приводит.

ЛИТЕРАТУРА

1. Галеев А. А., Лаваль Г., О'Нейл Т., Розенблот М., Сагдеев Р. З.— ЖЭТФ, 1973, **65**, с. 973.
2. Бакай А. С.— ЖЭТФ, 1968, **55**, с. 266.
3. Хазанов И. В.— Изв. вузов— Радиофизика, 1977, **20**, с. 887.
4. Speziale T., McGrath J. F., Berger R. L.— Phys. Fluids, 1980, **23**, p. 1275.
5. Montes C.— Phys. Rev. Lett., 1983, **50**, p. 1129.
6. Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н. Системы квазилинейных уравнений и их применение к газовой динамике.— М.: Наука, 1978, с. 488.
7. Сб. аннотаций докладов I Всесоюзного семинара по параметрической турбулентности плазмы.— М.: ФИАН, 1977, с. 33.
8. Kurih V. V., Permitin G. V., Petrukhina V. I. Proc. of XIII Int. Conf. on Phenomena in Ionized Gases.— Berlin: 1977, **2**, p. 863.
9. Бломберген Н. Нелинейная оптика.— М.: Мир, 1966
10. Горбунов Л. М.— ЖЭТФ, 1974, **67**, с. 1386.
11. Nishikawa K.— Adv. in Plasma Phys., 1976, **6**, p. 60, J. Wiley and Sons, New York— London— Sydney— Toronto.
12. Беспалов В. И., Кубарев А. М., Пасманик Г. А.— Изв. вузов— Радиофизика, 1970, **13**, с. 1433; Кольчугина И. А., Литвак А. Г.— Изв. вузов— Радиофизика, 1971, **14**, № 9, с. 1326.
13. Курин В. В.— Физика плазмы, 1984, **10**, с. 860.
14. Силин В. П., Тихончук В. Т.— Письма в ЖЭТФ, 1981, **34**, с. 385.
15. Дворяковский В. П., Файнштейн С. М.— Изв. вузов— Радиофизика, 1981, **24**, № 5, с. 533.
16. Островский Л. А., Папилова И. А.— Акуст. журн., 1973, **19**, с. 67.

Институт прикладной физики
АН СССР

Поступила в редакцию
14 июня 1984 г.,
после доработки
26 марта 1985 г

ON CASCADE PROCESSES OF THE WAVE STIMULATED SCATTERING IN BOUNDED NONLINEAR MEDIA

G. V. Permitin, V. I. Petrukhina, I. V. Khazanov

Transient processes and stationary regimes of stimulated backscattering (such as SMBs) of an intense electromagnetic wave normal to the plane layer of a nonlinear medium are investigated. Allowances are made for the possibility of development of multiwave (cascade) SS processes including a multistage HF wave energy transfer both downward and upward the frequency spectrum. It is shown that the spatial boundedness of the wave interaction region affects the dynamics of SS considerably. It is also shown that cascade processes in the layers may lead to the onset of self-modulating SS regimes.