ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XXVIII, № 11 РАДИОФИЗИКА 1985

УДК 551.510.536

ГЕНЕРАЦИЯ АКУСТИКО-ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН АТМОСФЕРНОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТЬЮ

И. Н. Дробязко, В. Н. Красильников

Для изучения генерации акустико-гравитационных волн турбулентными движениями в стратифицированной атмосфере применяется метод Лайтхилла расчета аэродинамического излучения звуковых волн в однородной атмосфере. Показано, что турбулентный объем — крупномасштабный вихрь — является совокупностью двумерно- и трехмерно-изотропной турбулентности. Даны оценки амплитуд акустико-гравитационных волн, излучаемых дву- и трехмерной турбулентностью.

1. В настоящее время исследованы различные источники акустико-гравитационных волн (АГВ) в земной атмосфере [1]. К весьма распространенному и пока еще недостаточно изученному источнику АГВ с нелинейным механизмом генерации можно отнести атмосферную турбулентность, порождаемую интенсивной циклонической деятельностью. Экспериментально наблюдаемая корреляция между бурями даже средних размеров и АГВ, регистрируемыми на расстояниях в тысячи километров от этих бурь, подтверждает существование такого источника АГВ.

Звук, генерируемый свободной изотропной турбулентностью с малым числом Маха (M), исследован Лайтхиллом [2] и представляет собой поле источника квадрупольного типа с эффективностью, пропорциональной M^5. В работе [3] задача об излучении АГВ турбулентностью в солнечной атмосфере рассматривается на основе метода Лайтхилла, но в общей постановке, вне конкретной модели источника. Основное внимание в [3] уделяется исследованию влияния различных пространственных спектров турбулентности на интенсивность и угловую зависимость излучаемых полей, а итоговые формулы неинформативны без применения ЭВМ.

Рассматривая поле АГВ, порождаемое турбулентными движениями в атмосфере, мы будем следовать вышеупомянутому подходу Лайтхилла. Турбулентный источник мы свяжем с циклоническим вихрем ограниченных размеров и для описания его динамики привлечем результаты статистической теории турбулентности. Оценки величины излучаемых АГВ полей определят место атмосферной турбулентности в ряду других источников АГВ.

2. Излучение АГВ турбулентностью обусловлено нелинейностью уравнений гидродинамики. Для их анализа проводится разложение гидродинамических полей по степеням числа Маха ($M \ll 1$) в методе последовательных приближений. Генерация АГВ турбулентными пульсациями скорости описывается уравнением, получающимся при учете членов второго порядка малости (помечены индексом 2):

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\nabla^2 - \frac{1}{c_{\text{зв}}^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\omega_a^2}{c_{\text{зв}}^2}\right) + \omega_{\text{в}}^2 \nabla_\perp^2\right] p_2 = -S(\boldsymbol{r}, t), \qquad (1)$$

где p_2 — давление в генерируемых АГВ, $c_{зв}$ — скорость звука, $\nabla_\perp^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ (вертикальная координата — z), ω_b — частота Брента—Вяйсяля, ω_a — частота обрезания акустической ветви.

Для несжимаемого невязкого газа в отсутствие теплопроводности появляющийся в результате нелинейных взаимодействий решений первого по числу Маха приближения (индекс 1) источник в уравнении (1) имеет вид*

$$S(\boldsymbol{r}, t) = \rho_0 \left(\omega_b^2 + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \frac{\partial^2 (v_{1\alpha} v_{1\beta})}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} - \rho_0 \omega_b^2 \left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{1}{g} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) v_{1\alpha} \frac{\partial v_{1z}}{\partial x_\alpha}. \quad (2)$$

Отметим, что в (2) наряду с квадруполем, характерным для свободной турбулентности в однородной среде, присутствует источник дипольного типа, порожденный стратификацией.

После преобразования Фурье по времени уравнения (1) получим

$$\left(\nabla_\perp^2 + \frac{\omega^2}{\omega^2 - \omega_b^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\omega^2}{c_{зв}^2} \frac{\omega^2 - \omega_a^2}{\omega^2 - \omega_b^2} \right) p_\omega(\boldsymbol{R}_0) = - \frac{S_\omega(\boldsymbol{r})}{\omega^2 - \omega_b^2}. \quad (3)$$

Как известно [4], функцией Грина (3) является

$$G_\omega(\boldsymbol{R}_0, \boldsymbol{r}) = - \frac{1}{4\pi R} \frac{(\omega^2 - \omega_b^2)^{1/2}}{\omega N(\theta)} e^{ikRN(\theta)},$$

где

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}_0 - \boldsymbol{r}, \quad N(\theta) = \sqrt{1 - \frac{\omega_b^2}{\omega^2} \cos^2 \theta}, \quad k = \frac{\omega (\omega^2 - \omega_a^2)^{1/2}}{c_{зв} (\omega^2 - \omega_b^2)^{1/2}},$$

$$\cos \theta = \frac{|z - z_0|}{|\boldsymbol{R}_0 - \boldsymbol{r}|},$$

$\boldsymbol{r}$ — радиус-вектор точки источника, а $\boldsymbol{R} = R_0 \boldsymbol{n}$ определяет положение точки наблюдения.

Используя $G_\omega(\boldsymbol{R})$, легко получить решение уравнения (3):

$$p_\omega(\boldsymbol{R}_0) = \frac{1}{8\pi^2 \omega^2 \sqrt{\omega^2 - \omega_b^2}} \int_V \int_{-\infty}^{\infty} S(\boldsymbol{r}, t) \frac{e^{ikRN(\theta)}}{RN(\theta)} e^{i\omega t} d^3\boldsymbol{r} dt. \quad (4)$$

Применим к (4) интегральную формулу Гаусса в следующей форме:

$$\int_V \frac{\partial U}{\partial x_i} V dx = - \int_V U \frac{\partial V}{\partial x_i} dx + \int_\Sigma UV dS.$$

Поверхность Σ может быть сдвинута за пределы турбулентного объема, тогда интеграл по ней исчезает. В результате дифференцирование по координатам источника x_i заменяется дифференцированием по координатам R_i точки наблюдения и

$$p_\omega(\boldsymbol{R}_0) = \frac{\rho_0 e^{-i\pi/2}}{8\pi^2 \omega \sqrt{|\omega_b^2 - \omega^2|}} \int_V \int_{-\infty}^{\infty} Q(\boldsymbol{r}, t) \frac{e^{ik[R_0 - (\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{n})] N(\theta)}}{RN(\theta)} e^{i\omega t} d^3\boldsymbol{r} dt,$$

---

* В дальнейших формулах поле второго приближения описывается в терминах давления p_2, а первое приближение характеризуется только скоростью v_1. Поэтому индексы 1 и 2 мы опустим.

$$Q(\boldsymbol{r}, t) = k^2 \frac{R_\alpha R_\beta}{R^2} \left(\omega_b^2 + \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)(v_\alpha v_\beta) - \omega_b^2 k^2 \frac{R_\alpha R_z}{R^2}(v_\alpha v_z) + \quad (5)$$

$$+ ik \frac{\omega_b^2}{g} \frac{R_\alpha}{R} \frac{\partial^2}{\partial t^2}(v_\alpha v_z).$$

При выводе (5) предполагалось, что точка наблюдения находится в зоне фраунгоферовой дифракции излучающего объема, $R \gg kL^2$, L — характерный размер этого объема.

Для оценок излучательной способности атмосферного вихря воспользуемся моделью безграничной изотермической атмосферы. В простейшем случае вихрь занимает цилиндрический объем V_0 с диаметром основания L и высотой h. С ним удобно связать цилиндрическую же систему координат ρ, φ, z с началом в центре основания цилиндра и осью z, параллельной его оси.

При вычислении среднего квадрата давления в формуле

$$|p_\omega|^2 = \frac{\rho_0^2}{(8\pi^2)^2 \omega^2 |\omega_b^2 - \omega^2|} \int\limits_{V_1}\int\limits_{V_2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int Q(\boldsymbol{r}_1, t_1) Q^*(\boldsymbol{r}_2, t_2) \times$$

$$\times \frac{\exp\{ikN_1(\theta)[R_0 - (\boldsymbol{r}_1 \cdot \boldsymbol{n})] - ikN_2(\theta)[R_0 - (\boldsymbol{r}_2 \cdot \boldsymbol{n})]\}}{R^2 N^2(\theta)} \times$$

$$\times e^{i\omega(t_2 - t_1)} dV_1 dV_2 dt_1 dt_2$$

выразим $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$, t_1, t_2 через относительные координаты $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2$, $\tau = t_2 - t_1$ и координаты центра тяжести $\boldsymbol{r}_0 = (\boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{r}_2)/2$, $t_0 = (t_1 + t_2)/2$. Если точка наблюдения находится в области, где лучевой показатель преломления $N(\theta)$ слабо меняется*, его можно вынести из-под знака интеграла. Интегрируя по t_0, получаем усреднение по времени и, учитывая, что подынтегральное выражение не зависит от координат центра тяжести, выполняем интегрирование по этим переменным:

$$\overline{|p_\omega|^2} = \frac{\rho_0^2 V_0 T}{(8\pi^2)^2 \omega^2 |\omega_b^2 - \omega^2| R^2 N^2(\theta)} \int\limits_V \int\limits_{-\infty}^{\infty} Q\left(\boldsymbol{r}_0 - \frac{\boldsymbol{r}}{2}, \; t_0 - \frac{\tau}{2}\right) \times$$

$$\times Q^*\left(\boldsymbol{r}_0 + \frac{\boldsymbol{r}}{2}, t_0 + \frac{\tau}{2}\right) e^{i\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}} e^{-i\omega\tau} dV d\tau. \quad (6)$$

В (6) $\boldsymbol{k} \equiv kN(\theta)\boldsymbol{n}$, T — время, в течение которого существует (или наблюдается) вихрь, а интегрирование проводится по разностным координатам.

Мы предположим, что объем V_0 представляет собой развитую турбулентность, состоящую из совокупности вихрей различных размеров. Излучение АГВ, являющееся следствием нелинейного взаимодействия этих вихрей, определяется статистическим режимом турбулентных пульсаций с масштабами, меньшими, чем внешний масштаб турбулентности L.

---

* В рассматриваемой нами зоне Фраунгофера это предположение справедливо почти везде, кроме небольшой окрестности резонансного направления [5].

3. Перейдем к определению статистических характеристик турбулентного источника. Рассмотрим

$$\overline{QQ^*} = \overline{\left[k^2 \frac{R_\alpha R_\beta}{R^2}\left(\omega_b^2 + \frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\right)(v'_\alpha v'_\beta) - \omega_b^2 k^2 \frac{R_\alpha R_z}{R^2}(v'_\alpha v'_z) + ik\frac{\omega_b^2}{g}\frac{R_\alpha}{R} \times \right.}$$

$$\overline{\left. \times \frac{\partial^2}{\partial\tau^2}(v'_\alpha v'_z)\right]\left[k^2 \frac{R_\delta R_\gamma}{R^2}\left(\omega_b^2 + \frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\right)(v''_\delta v''_\gamma) - \omega_b^2 k^2 \frac{R_\delta R_z}{R^2} \times \right.}$$

$$\overline{\left. \times (v''_\delta v''_z) - ik\frac{\omega_b^2}{g}\frac{R_\delta}{R}\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}(v''_\delta v''_z)\right]}.$$

Пусть точка наблюдения расположена на линии горизонта ($N(\theta)=1$) и для определенности на оси $0x$ (выбор оси безразличен в силу круговой симметрии), тогда

$$\overline{QQ^*} = \overline{k^4\left[\omega_b^4(v'^2_x v''^2_x) + \omega_b^2(v'^2_x)\frac{\partial^2(v''^2_x)}{\partial\tau^2} + \omega_b^2(v''^2_x)\frac{\partial^2(v'^2_x)}{\partial\tau^2} + \right.}$$

$$\overline{\left. + \frac{\partial^2(v'^2_x)}{\partial\tau^2}\frac{\partial^2(v''^2_x)}{\partial\tau^2}\right] + \frac{\omega_b^4}{g^2}k^2\frac{\partial^2(v'_x v'_x)}{\partial\tau^2}\frac{\partial^2(v''_x v''_x)}{\partial\tau^2} + } \qquad (7)$$

$$\overline{+ ik\left[\frac{\omega_b^4}{g^2}\frac{\partial^2(v'_x v'_x)}{\partial\tau^2}(v''^2_x) + \frac{\omega_b^2}{g^2}\frac{\partial^2(v'_x v'_z)}{\partial\tau^2}\frac{\partial^2(v''^2_x)}{\partial\tau^2}\right]}.$$

С помощью гипотезы Миллионщикова, имеющей известное экспериментальное подтверждение [2] для возмущений разных масштабов, корреляционные функции четвертого порядка в (7) можно выразить через корреляционные функции второго порядка поля скоростей и их производных:

$$\overline{QQ^*} = k^4\left[2\omega_b^2(\overline{v'_x v''_x})^2 + 8\left(\overline{\frac{\partial v'_x}{\partial\tau}\frac{\partial v''_x}{\partial\tau}}\right)^2 + (\overline{v'_x v''_x})\left(\overline{\frac{\partial^2 v'_x}{\partial\tau^2}\frac{\partial^2 v''_x}{\partial\tau^2}}\right)\right] +$$

$$+ \frac{\omega_b^4}{g^2}k^2\left[\left(\overline{\frac{\partial^2 v'_x}{\partial\tau^2}\frac{\partial^2 v''_x}{\partial\tau^2}}\right)(\overline{v'_z v''_z}) + 4\left(\overline{\frac{\partial v'_x}{\partial\tau}\frac{\partial v''_x}{\partial\tau}}\right)\left(\overline{\frac{\partial v'_z}{\partial\tau}\frac{\partial v''_z}{\partial\tau}}\right) + \right. \qquad (8)$$

$$\left. + \left(\overline{\frac{\partial^2 v'_z}{\partial\tau^2}\frac{\partial^2 v''_z}{\partial\tau^2}}\right)(\overline{v'_x v''_x})\right].$$

При выводе (8) использовалось уравнение Навье—Стокса для несжимаемой жидкости при больших числах Рейнольдса и то обстоятельство, что скалярное изотропное поле давления не коррелирует с соленоидальным ($\operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0$) векторным полем скоростей.

Из предложенной Колмогоровым теории локально-изотропной турбулентности следует, что в инерционном интервале корреляционная функция поля скоростей имеет вид $\overline{v'_x v''_x} = (1/2)c\varepsilon^{2/3}L^{2/3}(1-r^{2/3}/L^{2/3})$, где L — внешний масштаб турбулентности, r — разность координат коррелирующих точек, ε — скорость удельной диссипации кинетической энергии турбулентности, $c \approx 2$ — универсальная постоянная.

Для определения $\overline{\frac{\partial v'}{\partial \tau}\frac{\partial v''}{\partial \tau}}$ и $\overline{\frac{\partial^2 v'}{\partial \tau^2}\frac{\partial^2 v''}{\partial \tau^2}}$ воспользуемся результатами работы [6], где приведены корреляционные функции поля ускорений:

$$\overline{\frac{\partial v'}{\partial \tau}\frac{\partial v''}{\partial \tau}} = \overline{\left(\frac{\partial v}{\partial \tau}\right)^2}\,\alpha\left(\frac{r}{l_0}\right), \quad \overline{\left(\frac{\partial v}{\partial \tau}\right)^2} \approx \nu^{-1/2}\varepsilon^{3/2},$$

здесь l_0 — внутренний масштаб турбулентности, ν — коэффициент кинематической вязкости среды. Очевидно, что значение ускорения в одной точке определяется мелкими диссипирующими вихрями (в последней формуле есть зависимость от вязкости). Для $\alpha(r/l_0)$ в [6] выведены асимптотические формулы, которые в инерционном интервале неплохо аппроксимируются величиной $(1-r^{2/3}/L^{2/3})$, в результате чего $\overline{\frac{\partial v'_x}{\partial \tau}\frac{\partial v''_x}{\partial \tau}} \approx \nu^{-1/2}\varepsilon^{3/2}(1-r^{2/3}/L^{2/3})$. Аналогичные рассуждения позволяют найти корреляционные функции поля вторых производных от скоростей: из теории размерностей $\overline{\left(\frac{\partial^2 v}{\partial \tau}\right)^2} \approx \nu^{-3/2}\varepsilon^{5/2}$, а $\overline{\frac{\partial^2 v'_x}{\partial \tau^2}\frac{\partial^2 v''_x}{\partial \tau^2}} \approx \nu^{-3/2}\varepsilon^{5/2} \times$ $\times (1 - r^{2/3}/L^{2/3})$.

4. Примерами круговых вихрей в природе являются тропические циклоны — ураганы и тайфуны — и внетропические циклоны — вихревые бури, которые имеют большие размеры и повторяемость по сравнению с первыми, хотя и менее сильны [7]. Для ураганов средний диаметр штормовой зоны достигает $L=1000$ *км*, а типичная скорость ветра внутри такого урагана на средних высотах тропосферы $U=$ $=20$ $м\cdot с^{-1}$. Вертикальные размеры вихря $h=10$ *км* — область, где разыгрываются основные синоптические процессы.

Как отмечено в работе [8], крупномасштабный вихрь, находящийся в устойчиво стратифицированной атмосфере, будет только горизонтально (или двумерно) изотропным. Для его трехмерной изотропизации при дроблении на более мелкие вихри оси последних должны принимать любые направления: как вертикальные, так и горизонтальные. Согласно теории гидродинамической устойчивости горизонтальное направление перестает быть запрещенным для осей измельчающихся вихрей, если число Ричардсона (для атмосферы с экспоненциально убывающей по высоте плотностью)

$$\mathrm{Ri} = \frac{g}{H\,(\partial U/\partial z)^2} \leqslant \frac{1}{4}, \tag{9}$$

где H — высота однородной атмосферы.

В теории локально-изотропной турбулентности (как дву-, так и трехмерной) порядок величины ε можно оценить из соображений размерности по масштабу движения l и скорости U: $\varepsilon \sim U^3/l$. Отсюда следует оценка изменения скорости вдоль вихря размера l: $\partial U/\partial l \sim$ $\sim 1/3\varepsilon^{1/3}l^{-2/3}$. С помощью последней формулы и неравенства (9) находим максимальный размер l_3 вихрей, начиная с которого турбулентность может считаться трехмерно изотропной: $l_3 \leqslant (\varepsilon^{2/3}H/36g)^{3/4}$. Для $L=1000$ *км*, $U=20$ $м\cdot с^{-1}$ $\varepsilon \approx 8\cdot 10^{-3}$ $м\cdot с^{-3}$ и при $H=10$ *км* $l_3 \leqslant 1$ *м*. Экспериментальные исследования [9] турбулентности на тропосферных высотах подтверждают приведенную оценку, вытекающую из «закона—5/3» Колмогорова—Обухова. В результате в интервале $l_3 \leqslant l \leqslant l_2 \ll L$ турбулентность без сомнения является локально-изотропной в горизонтальной плоскости $z=\mathrm{const}$, т. е. двумерной. Трехмерная турбулентность с внутренним масштабом $l_0 < l_3$ локально изотропна в интервале $l_0 \ll l \leqslant l_3$.

Как известно [10, 11], в двумерной турбулентности осуществляется каскадная передача энергии по спектру в область малых волновых чисел (больших масштабов), в трехмерной — в область малых масштабов. Как показывает эксперимент [12], в атмосфере энергия вводится из полосы волновых чисел турбулентности, примерно соответствующих полученным масштабам l_3.

Приведенные в п. 3 соображения позволяют выразить $\overline{QQ^*}$ в (6) через корреляционные функции поля скоростей локально-изотропной двумерной — $B(\rho, z, \tau)$ и трехмерной — $B(r, \tau)$ турбулентности. Предположим, что пространственно-временные корреляционные функции факторизуются [3] в соответствующих инерционных интервалах $B(\rho, z, \tau) \sim B(\rho) B(z) B(\tau)$ при $l_2 \geqslant l \geqslant l_3$, а $B(r, \tau) \approx B(r) B(\tau)$ — при $l_3 \geqslant l \gg l_0$. При вычислении $B(r)$ используем структурную функцию, подчиняющуюся «закону 2/3» Колмогорова—Обухова: $D(r) = c\varepsilon^{2/3} r^{2/3}$. Для двумерно-изотропных в плоскости $z = \text{const}$ вихрей используем обобщение гипотезы подобия Колмогорова на случай турбулентности в вертикально расслоенной изотермической атмосфере [2], тогда $D(\rho) = c\varepsilon^{2/3}\rho^{2/3}$, $D(z) = c\varepsilon^{2/3} z^{2/3}$. Чтобы определить $B(\tau)$, привлечем гипотезу замороженной турбулентности (гипотезу Тэйлора), согласно которой турбулентные пульсации скорости через данную точку за время τ проносятся без искажений, если эти пульсации много меньше средней скорости U потока [2]. Тогда в инерционных интервалах на оси времени $t_2 = l_2/U \geqslant \tau \geqslant l_3/U = t_3$ и $t_3 \geqslant \tau \gg l_0/U = t_0$ $D(\tau) = c\varepsilon^{2/3} U^{2/3} \tau^{2/3}$, а корреляционные функции имеют вид

$$B(\rho, z, \tau) = \frac{1}{2} c\varepsilon^{2/3} l_2^{2/3} \left(1 - \frac{\rho^{2/3}}{l_2^{2/3}}\right)\left(1 - \frac{z^{2/3}}{h^{2/3}}\right)\left(1 - \frac{\tau^{2/3}}{t_2^{2/3}}\right), \quad \begin{matrix} l_2 \geqslant l \geqslant l_3 \\ t_2 \geqslant \tau \geqslant t_3 \end{matrix},$$

$$B(r, \tau) = \frac{1}{2} c\varepsilon^{2/3} l_3^{2/3} \left(1 - \frac{r^{2/3}}{l_3^{2/3}}\right)\left(1 - \frac{\tau^{2/3}}{t_3^{2/3}}\right), \quad \begin{matrix} l_3 \geqslant l \gg l_0 \\ t_3 \geqslant \tau \gg t_0 \end{matrix}.$$

Выпишем окончательную формулу для расчета среднего квадрата давления в АГВ, излучаемых обоими видами турбулентности в нашей модели:

$$\overline{|p_\omega|^2} = \frac{\rho_0^2 V_0 T}{2(8\pi^2)^2 \omega^2 (\omega_b^2 - \omega^2) R^2} \Bigg\{ \Bigg[k^4 (2\omega_b^4 c^2 \varepsilon^{4/3} l_2^{4/3} + 8\nu^{-1}\varepsilon^3 + c\varepsilon^{2/3} l_2^{2/3} \nu^{-3/2} \varepsilon^{5/2}) +$$

$$+ \frac{\omega_b^4}{g^2} k^2 (2c\varepsilon^{2/3} l_2^{2/3} \nu^{-3/2} \varepsilon^{5/2} + 4\nu^{-1}\varepsilon^3) \Bigg] \int\limits_{V_2} \int\limits_{t_3}^{t_2} \left(1 - \frac{\rho^{2/3}}{l_2^{2/3}}\right)^2 \left(1 - \frac{z^{2/3}}{h^{2/3}}\right)^2 \times$$

$$\times \left(1 - \frac{\tau^{2/3}}{t_2^{2/3}}\right)^2 e^{ik\rho} \cos \omega\tau dV_2 d\tau + \Bigg[k^4 (2\omega_b^4 c^2 \varepsilon^{4/3} l_3^{4/3} + 8\nu^{-1}\varepsilon^3 + c\varepsilon^{2/3} l_3^{2/3} \nu^{-3/2} \times \tag{10}$$

$$\times \varepsilon^{5/2}) + \frac{\omega_b^4}{g^2} k^2 (2c\varepsilon^{2/3} l_3^{2/3} \nu^{-3/2} \varepsilon^{5/2} + 4\nu^{-1}\varepsilon^3) \Bigg] \int\limits_{V_3} \int\limits_{t_0}^{t_3} \left(1 - \frac{r^{2/3}}{l_3^{2/3}}\right)^2 \left(1 - \frac{\tau^{2/3}}{t_3^{2/3}}\right)^2 \times$$

$$\times e^{ikr} \cos \omega\tau dV_3 d\tau \Bigg\}.$$

5. Интегралы в (10) легко вычисляются для малых или, напротив, больших значений безразмерных параметров $kl_{2,3}$ и $\omega t_{2,3}$. Опуская подробности расчета, приведем результат:

$$\int_{t_3}^{t_2}\left(1-\frac{\tau^{2/3}}{t_2^{2/3}}\right)^2\cos\omega\tau d\tau\simeq\begin{cases}0,25\,t_2, & \omega t_2\ll 1\\ \dfrac{1,7\,t_2}{(\omega t_2)^{5/3}}, & \omega t_2\gg 1\end{cases};$$

$$\int_{t_0}^{t_3}\left(1-\frac{\tau^{2/3}}{t_3^{2/3}}\right)^2\cos\omega\tau d\tau\simeq\begin{cases}0,25\,t_3, & \omega t_3\ll 1\\ \dfrac{1,7\,t_3}{(\omega t_3)^{5/3}}, & \omega t_3\gg 1\end{cases};$$

$$\int_{V_2}\left(1-\frac{\rho^{2/3}}{l_2^{2/3}}\right)^2\left(1-\frac{z^{2/3}}{h^{2/3}}\right)^2 e^{ik\rho}\,dV_2\simeq\begin{cases}0,025\,\pi l_2^2 h, & kl_2\ll 1\\ \dfrac{0,6\,\pi l_2^2 h}{(kl_2)^{8/3}}, & kl_2\gg 1\end{cases};$$

$$\int_{V_3}\left(1-\frac{r^{2/3}}{l_3^{2/3}}\right)^2 e^{ikr}\,dV_3\simeq\begin{cases}0,08\,\pi l_3^3, & kl_3\ll 1\\ \dfrac{12\,\pi l_3^2}{k(kl_3)^{8/3}}, & kl_3\gg 1\end{cases}.$$

При рассмотрении полей АГВ необходимо внимательно отнестись к эффектам, связанным с их резонансными свойствами. Так, из соотношения $k=\dfrac{\omega}{c_{зв}}\dfrac{(\omega_a^2-\omega^2)^{1/2}}{(\omega_b^2-\omega^2)^{1/2}}$ следует расходимость полей АГВ на частоте ω_b в (10). Чтобы выяснить, действительно ли она имеет место, определим ограничения на частоты ВГВ, излучаемые турбулентностью. Инерционным интервалам масштабов соответствуют инерционные интервалы спектров обоих видов турбулентности:

$$2\pi/l_2\leqslant k\leqslant 2\pi/l_3,\quad 2\pi/l_3\leqslant k\leqslant 2\pi/l_0. \tag{11}$$

При взаимодействии двух компонент турбулентности с близкими скалярными волновыми числами в пределах турбулентных спектров (11) излучаются волны с максимальными волновыми числами $k\sim 4\pi/l_3$ и $k\sim 4\pi/l_0$: спектры генерируемых ВГВ ограничены сверху частотами: $(\omega_b-\omega_{2max})/\omega_b=10^{-12}$ для двумерно- и $(\omega_b-\omega_{3max})/\omega_b=10^{-14}$ — для трехмерно-изотропной турбулентности. На самом деле эти спектры ограничены еще сильней благодаря значительной диссипации коротких волн. Из формулы, приведенной в работе [13], для коэффициента затухания коротких ($\lambda\ll 4\pi H$) ВГВ

$$\gamma=2,76\nu H^3k^5/c_{зв}$$

и условия $|\gamma R|\geqslant 1$ (амплитуда волн уменьшается в e и более раз) получается зависящее от R ограничение на верхнюю частоту спектра ВГВ, излучаемых обоими видами турбулентности:

$$(\omega_b-\omega_{max})/\omega_b=(\omega_a^2-\omega_b^2)(\nu H^3R)^{2/5}/2c_{зв}^{12/5}.$$

Из последней формулы при $\nu=10^{-2}$ $м\cdot c^{-1}$, $H=10^4$ $м$ нетрудно установить, что благодаря эффекту вязкой диссипации спектр ВГВ обрезается на высоких частотах гораздо сильнее, чем вследствие ограниченности турбулентного спектра (или масштабов турбулентности).

Средний квадрат (или дисперсия σ_p^2) пульсаций атмосферного давления находится интегрированием (10) по всему интервалу излучаемых частот:

$$\overline{p^2}=\sigma_p^2=\frac{1}{T}\int_0^{\omega_{max}}\overline{|p_\omega|^2}\,d\omega. \tag{12}$$

Оценим величину $\overline{p^2}$ в АГВ, генерируемых турбулентностью со следующими типичными границами инерционных интервалов [2]: $l_2=5\cdot 10^5$ $м$,

$l_3=1$ *м*, $l_0=0{,}1$ *м*, $t_2=2{,}5\cdot10^4$ *с*, $t_3=10^{-1}$ *с*, $t_0=10^{-2}$ *с*. Учитывая резонансные свойства АГВ, можно полагать, что их энергия излучается, в основном, на высокочастотном конце спектра ВГВ. Действительно, даже на сравнительно небольших расстояниях от источника вычисления интеграла в (12) при $0\leqslant\omega\leqslant\alpha$* дают очень малые значения $\overline{p^2}$ в этом интервале частот. Поэтому для двумерно-изотропной турбулентности

$$\overline{p^2}=\frac{\rho_0^2 V_0\,\pi h}{2\,(8\pi^2)^2 R^2 l_2^{2/3} t_2^{2/3}}\left[(2\omega_b^4 c^2 \varepsilon^{4/3} l_2^{4/3}+8\nu^{-1}\varepsilon^3+c\varepsilon^{2/3} l_2^{2/3}\nu^{-3/2}\varepsilon^{5/2})\times\right. \tag{13}$$

$$\times\int\limits_{\alpha}^{\omega_{\max}}\frac{k^4\,d\omega}{\omega^2(\omega_b^2-\omega^2)\,k^{8/3}\,\omega^{5/3}}+\frac{\omega_b^4}{g^2}(2c\varepsilon^{2/3} l_2^{2/3}\nu^{-3/2}\varepsilon^{5/2}+4\nu^{-1}\varepsilon^3)\times$$

$$\left.\times\int\limits_{\alpha}^{\omega_{\max}}\frac{k^2\,d\omega}{\omega^2(\omega_b^2-\omega^2)\,k^{8/3}\,\omega^{5/3}}\right],$$

для трехмерно-изотропной —

$$\overline{p^2}=\frac{0{,}02\,\rho_0\,V_0\,\pi l_3^3\,t_3}{2\,(8\pi^2)^2 R^2}\left[(2\omega_b^4 c^2\varepsilon^{4/3} l_3^{4/3}+8\nu^{-1}\varepsilon^3+c\varepsilon^{2/3} l_3^{2/3}\nu^{-3/2}\varepsilon^{5/2})\times\right. \tag{14}$$

$$\left.\times\int\limits_{\alpha}^{\omega_{\max}}\frac{k^4\,d\omega}{\omega^2(\omega_b^2-\omega^2)}+\frac{\omega_b^4}{g^2}(2c\varepsilon^{2/3} l_3^{2/3}\nu^{-3/2}\varepsilon^{5/2}+4\nu^{-1}\varepsilon^3)\int\limits_{\alpha}^{\omega_{\max}}\frac{k^2\,d\omega}{\omega^2(\omega_b^2-\omega^2)}\right].$$

Обратимся к результатам интегрирования в (13) и (14). Расчеты показывают, что в зоне Фраунгофера вклад дипольной составляющей (второе слагаемое в (13)) двумерной тубулентности в излучаемую мощность невелик — $\sigma_p^{(д)}\approx0{,}5$ *мкбар* при $R=10^4$ *км*. Источник квадрупольного типа (первое слагаемое в (13)) излучает несколько интенсивнее: $\sigma_p^{(к)}\approx1{,}5$ *мкбар*. В ближней зоне, где еще не сформировалась диаграмма направленности излучателя, например, при $R=2000$ *км*, $\sigma_p^{(д)}\approx3{,}5$ *мкбар*, а для $R=1000$ *км* — $\sigma_p^{(д)}+\sigma_p^{(к)}\approx30$ *мкбар*. Эффективность соответствующих составляющих трехмерно-изотропной турбулентности ввиду малости ее масштабов оказывается ничтожной при тех же R.

6. В заключение отметим основные факторы, влияющие на излучательную способность крупномасштабного циклонического вихря — турбулентного источника АГВ.

Как показано выше, исходный турбулентный объем представляет собой совокупность двух видов турбулентности — двумерно- и трехмерно-изоторпной, каждой со своим инерционным интервалом. С другой стороны, величина излучаемой источником энергии определяется резонансными свойствами полей АГВ, возрастая при $\omega\to\omega_b$. Например, для интенсивности излучения ВГВ источником квадрупольного типа (по сравнению со случаем звуковых волн) эффективность излучения возрастает в $\omega^2(\omega_a^2-\omega^2)^{5/2}/(\omega_b^2-\omega^2)^{7/2}$ раз, т. е. тем больше, чем ближе частота излучения к ω_b. Наиболее сильная расходимость поля

* $\alpha=5\cdot10^4\ c^{-1}$ определяется из неравенств $\omega l_2\gg1$, $kl_2\gg1$ при заданных l_2 и t_2, $\omega_a=1{,}85\cdot10^{-2}\ c^{-1}$, $\omega_b=1{,}67\cdot10^{-2}\ c^{-1}$.

ВГВ при $\omega \to \omega_b$ наблюдается у квадрупольной составляющей трехмерно-изотропной турбулентности. Однако значительное вязкое затухание высокочастотных ВГВ резко уменьшает ее эффективность. В результате генерация АГВ атмосферным вихрем сводится к излучению ВГВ квадрупольной составляющей двумерно-изотропной турбулентности. А энергия этого излучения определяется величиной внешних пространственно-временных масштабов двумерной турбулентности.

Из приведенных оценок видно, что крупные атмосферные бури способны порождать ВГВ, интенсивность которых значительно превышает уровень атмосферных шумов (5—7 *мкбар*, по данным работы [14]). Эксперименты [15] по измерению амплитуды пульсаций атмосферного давления на частотах ВГВ показали, что она достигает иногда 100 *мкбар*.

Таким образом, из полученных результатов можно сделать вывод о значительной роли атмосферной турбулентности в ряду других существующих в природе источников АГВ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Григорьев Г. И., Савина О. Н., Сомсиков В. М., Троицкий Б. В. — Сб.: Волновые возмущения в атмосфере. — Алма-Ата: АН КазССР, 1980.
2. Монин А. С., Яглом А. М. Статистическая гидромеханика. Ч. 2. — М.: Наука, 1967.
3. Stein R. F. — Sol. Phys., 1967, **2**, p. 385.
4. Pierce A. D. — J. Acoust. Soc. Amer., 1963, **35**, № 11, p. 1798.
5. Голыцын Г. С., Григорьев Г. И., Докучаев В. П. — Изв. АН СССР. Сер. Физика атмосферы и океана. 1977, **13**, № 9, с. 926.
6. Обухов А. М., Яглом А. М. — ПММ, 1951, **15**, № 1, с. 3.
7. Наливкин Д. В. Ураганы, бури и смерчи. — Л.: Наука, 1970.
8. Озмидов Р. В. — Изв. АН СССР. Сер. Физика атмосферы и океана, 1965, **1**, № 8, с. 853.
9. Татарский В. И. Распространение волн в турбулентной атмосфере. — М.: Наука, 1967.
10. Обухов А. М. — ДАН СССР, 1969, **184**, № 2, с. 309.
11. Мирабель А. П., Монин А. С. — Изв. АН ССР. Сер. Физика атмосферы и океана, 1980, **16**, № 10, с. 1011.
12. Старр В. Физика явлений с отрицательной вязкостью. — М.: Мир, 1971.
13. Голицын Г. С. — Изв. АН СССР. Сер. Физика атмосферы и океана, 1965, **1**, № 2, с. 136.
14. Голицын Г. С. — Изв. АН СССР. Сер. геофизическая, 1964, № 8, с. 1253.
15. Keliher T. E. — J. Geophys. Res., 1975, **80**, № 2, p. 2967.

Ленинградский государственный университет

Поступила в редакцию. 11 июня 1984 г.

GENERATION OF ACOUSTIC-GRAVITY WAVES BY ATMOSPHERIC TURBULENCE

I. N. Drobjazko, V. N. Krasil'nikov

Lighthill's method of calculation of sound wave aerodynamical radiations in a homogeneous atmosphere is used to study the generation of acoustic-gravity waves by turbulent motions in a stratified atmosphere. The turbulent volume (large-scale eddy) is shown to be a conjunction of two-dimension and three-dimension isotropic turbulence. Evaluations are given of the amplitudes of acoustic-gravity waves, produced by two-dimensional and three-dimensional turbulence.