

УДК 621.317.743.7

**ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ МЕТОДА ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО  
ОЦЕНИВАНИЯ В ЗАДАЧЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ДИАГРАММ  
НАПРАВЛЕННОСТИ АНТЕНН ПО СЛАБЫМ  
РАДИОИСТОЧНИКАМ**

*Л. А. Пасманик, В. И. Турчин, В. А. Угриновский*

Применительно к радиоастрономическому методу антенных измерений рассматривается способ обработки измеренных данных, заключающийся в непосредственном оценивании числовых параметров, характеризующих главный лепесток диаграммы, методом наименьших квадратов. По информационной матрице найдены погрешности определения усиления, направления максимального приема и пр. Приводятся результаты апробации метода на 7-метровой зеркальной антенне на волне 6 см.

Одним из ограничений радиоастрономического метода определения диаграмм направленности (ДН) антенн [1] является малость приращенния антенной температуры от источника  $\Delta T_a$  по сравнению с флуктуационным порогом измерительного приемника  $T_{\text{фл}}$ . При определении параметров, характеризующих главный лепесток ДН, представляется, однако, возможным снизить требования на отношение  $\Delta T_a/T_{\text{фл}}$  за счет оптимальных методов обработки результатов измерений. Обычно для этой цели используется линейная фильтрация (свертка измеренного сечения ДН с диаграммоподобной функцией — см., например, [2]), которая повышает отношение сигнал/шум в каждой точке «сглаженного» сечения ДН, сохраняя при определенных условиях неизменной его форму. В то же время на практике часто требуется не воспроизведение формы главного лепестка ДН, которая обычно известна, а определение числовых параметров, например усиления, пропорционального  $\Delta T_a$ , направления максимального приема  $\theta_{\text{гл}}$ , ширины главного лепестка по уровню 0,5,  $\Delta\theta_{0,5}$ , с погрешностью, не превышающей заданную. Эти параметры обычно находятся по «сглаженной» ДН графическим способом, однако при этом не всегда можно точно указать погрешность их определения; кроме того, такая процедура не является оптимальной.

В настоящей работе предлагается по измеренным данным сразу находить требуемые значения параметров с использованием подходящих оптимальных процедур параметрического оценивания; достоинством такого подхода является, в частности, возможность нахождения в явном виде погрешностей определения искомым параметров (см. ниже).

При определенных условиях —  $\Delta T_a \gtrsim 1 \dots 10$  К,  $T_{\text{фл}} \simeq 0, 1, \dots, 5$  К — и в отсутствие явных помех можно считать, что основной вклад в погрешности измерений вносят собственные шумы приемника, распределенные по нормальному закону [3]; в этом случае можно положить

$$x_k = T(\xi_k, \Xi) + u_k, \quad k = 1, \dots, n, \quad (1)$$

где  $x_k$  — измеренные при сканировании радиоисточника значения сигнала, отвечающие угловым координатам  $\xi_k$ ,  $T(\xi, \Xi)$  — функция известного вида, зависящая от неизвестных параметров  $\Xi = (\theta_0, \dots, \theta_N)$ ,  $u_k$  — случайные независимые величины, распределенные по нормальному закону

$$W(u_1, \dots, u_n) = N(0, \sigma^2 E), \quad (2)$$

где  $E$  — единичная матрица,  $\sigma \simeq T_{\text{фл}}^*$ . Способ решения задачи наилучшего оценивания (в смысле минимизации дисперсий оценок) хорошо известен и сводится для (1), (2) к обычному методу наименьших квадратов [4]:

$$L(\hat{\Xi}) = \min L(\Xi), \quad L(\Xi) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (x_k - T(\xi_k, \Xi))^2, \quad (3)$$

где  $\hat{\Xi}$  — искомая оценка. Известно [4], что в случае (2) оценки (3) являются асимптотически (при  $n \rightarrow \infty$ )\*\* несмещенными и наилучшими. Кроме того, при больших  $n$   $L(\Xi) \simeq \sigma^2$ , а ковариационная матрица оценок  $K$  может быть найдена в явном виде:

$$\|K_{ij}\| = \|M\{(\hat{\theta}_i - \theta_i)(\hat{\theta}_j - \theta_j)\}\| \simeq \|I_{ij}\|^{-1}, \quad (4)$$

где  $\theta_i$  — точные значения параметров,  $M\{\dots\}$  — математическое ожидание,  $I$  — информационная матрица,

$$I_{ij} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{k=1}^n \frac{\partial T(\xi_k, \Xi)}{\partial \theta_i} \frac{\partial T(\xi_k, \Xi)}{\partial \theta_j}. \quad (5)$$

Последнее свойство метода имеет большую практическую ценность, так как позволяет при известных  $n$ ,  $\sigma^2$  и пр. рассчитать погрешности определения параметров, а следовательно, обоснованно применять метод\*\*\*.

При оценивании параметров, характеризующих главные сечения ДН, можно принять

$$T(\xi, \Xi) = \theta_0 + \theta_1 f((\xi - \theta_3)/\theta_2) + \xi \theta_4, \quad (6)$$

где  $\theta_0$  — составляющая антенной температуры в отсутствие радиоисточника,  $\theta_1 \equiv \Delta T_a$ ,  $\theta_2 \equiv \Delta \theta_{0,5}$ ,  $\theta_3 \equiv \theta_{\text{гл}}$ ,  $\theta_4$  учитывает линейное изменение  $\theta_0$  при сканировании по углу места (в секторе порядка нескольких градусов), так как в этом случае меняется вклад в антенную температуру собственного излучения Земли и атмосферы [1]; с помощью  $\theta_4$  можно также учесть приводящую к линейному тренду нестабильность параметров приемника. Функция  $f(y)$  ( $f(0) = 1$ ,  $f(1/2) = 1/2$ ) описывает форму главного лепестка ДН и выбирается на основании математической модели, принятой для ДН испытуемой антенны (см., например, [1, 5]).

Для оценки параметров, характеризующих «объемную» ДН, может быть, например, использована модель

$$T(\xi, \eta, \Xi) = \theta_0 + \theta_1 f\left(\frac{\xi - \theta_3}{\theta_2}, \frac{\eta - \theta_5}{\theta_4}\right) + \eta \theta_6, \quad (7)$$

\* При условии  $\Delta T_a \ll T_{\text{фл}} Q$ , где  $Q$  — радиометрический выигрыш, и в пренебрежении шумами антенны.

\*\* Как показано в [4], при законе распределения (2) можно перейти в (3) от усреднения по ансамблю к усреднению по реализации.

\*\*\* Использование метода наименьших квадратов для определения ДН предлагалось также в [6] и [7]. Однако в [6] погрешности рассчитывались неровно, а в [7] метод рассматривался применительно к приемнику с преобладающей мультипликативной погрешностью, что часто не имеет места в практике радиоастрономических измерений.

где  $\xi, \eta$  — угловые координаты ( $\eta$  — угол места),  $\theta_0, \theta_1$  — то же, что и в (6),  $\theta_6$  — аналог  $\theta_4$  в (6),  $\theta_3, \theta_2$  и  $\theta_5, \theta_4$  характеризуют направление максимального приема и ширину главного лепестка в главных сечениях «объемной» ДН.

Количественный расчет погрешностей определения параметров был выполнен в соответствии с (4), (5) в предположении, что измерения производятся в секторе углов  $[-\theta_{изм}/2, \theta_{изм}/2]$  с шагом по углу  $\Delta\xi \ll \Delta\theta_{0,5}$  (при этом в (5) возможна замена суммирования интегрированием), главный лепесток ДН\* имеет гауссову форму

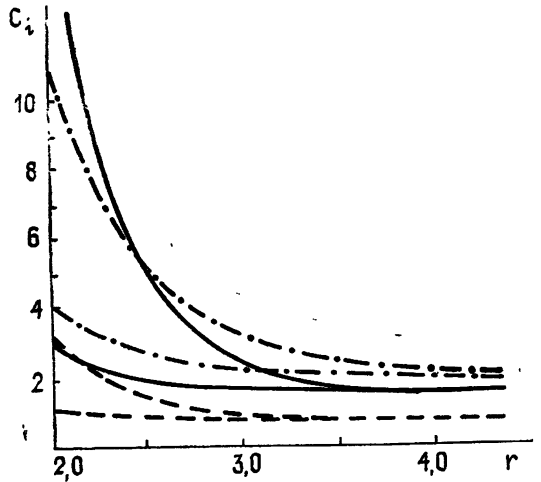
$$f(y) = \exp(-4 \ln 2 y^2). \quad (8)$$

При расчете был совершен переход к ковариациям относительных погрешностей  $\hat{\delta}_i = (\hat{\theta}_i - \theta_i) / \tilde{\theta}_i$ ,  $\tilde{\theta}_0 = \tilde{\theta}_1 = \theta_1$ ,  $\tilde{\theta}_2 = \tilde{\theta}_3 = \theta_2$ ,  $\tilde{\theta}_4 = \theta_1 / \theta_2$ ,  $K^{(0)} = \|M\{\hat{\delta}_i \hat{\delta}_j\}\| \simeq \|\tilde{\theta}_i \tilde{\theta}_j I_{ij}\|^{-1}$ . Из (6), (7) непосредственно выводится, что дисперсии относительных погрешностей — диагональные члены  $K_{ii}^{(0)}$  ( $i = 1, 2, 3$ ) ( $\theta_0$  и  $\theta_4$  не являются информативными для антенных измерений) могут быть представлены в виде

$$K_{ii}^{(0)} = (S^2/m) C_i^2(r, \alpha), \quad (9)$$

где  $S = T_{фл} / \Delta T_a$ ,  $m = \Delta\theta_{0,5} / \Delta\xi$  — число независимых отсчетов на главном лепестке,  $C_i$  — численные коэффициенты, являющиеся функциями  $r = \theta_{изм} / \Delta\theta_{0,5}$  и  $\alpha = \theta_{гл} / \Delta\theta_{0,5}$ .

Рис. 1. Зависимость коэффициентов  $C_i$  от  $r = \theta_{изм} / \Delta\theta_{0,5}$  для  $i = 1$  (—) (погрешность определения  $\Delta T_a$ );  $i = 2$  (-.-.) (погрешность определения  $\Delta\theta_{0,5}$ );  $i = 3$  (---) (погрешность определения  $\theta_{гл}$ ); нижние кривые соответствуют случаю  $\alpha = 0$ , верхние —  $\alpha = 0,5$ .



В выражении (9) множитель  $m^{-1}$  описывает обычное повышение отношения сигнал/шум при «сглаживании» (фильтрации), а  $C_i$  характеризуют собственно погрешности параметрического оценивания.  $C_i$  были найдены путем численного обращения матрицы, пропорциональной  $\|\tilde{\theta}_i \tilde{\theta}_j I_{ij}\|$ , где  $I_{ij}$  вычислялись согласно (5), (6), (8). Зависимости  $C_i$  от  $r$  для  $\alpha = 0$  и  $\alpha = 0,5$  даны на рис. 1. Физический смысл графиков рис. 1 достаточно очевиден, кроме того, из явных выражений для  $C_i$  нетрудно вывести, что  $C_i \rightarrow C_i^{(0)}$  при  $r \rightarrow \infty$ , где  $C_1^{(0)} = 1,41$ ,  $C_2^{(0)} = 2,66$ ,  $C_3^{(0)} = 0,58$  (практически  $C_i \simeq C_i^{(0)}$  при  $r \gtrsim 2 \div 3$ ).

\* Так как (8) практически совпадает до уровней порядка  $-10$  дБ с комбинациями многих функций, используемых для описания ДН [5], можно рассчитывать, что представленные ниже результаты имеют достаточно общий характер.

В принципе, погрешность может быть уменьшена, если часть параметров априори известна и понижается размерность  $\Xi$ . Последнее определяется структурой матрицы  $I$ . При  $\alpha=0$   $I$  имеет блочно-диагональную структуру: в блоки выделяются элементы, отвечающие  $\theta_0, \theta_1, \theta_2$  и  $\theta_3, \theta_4$ , так что при  $r \rightarrow \infty$  исключение из рассмотрения  $\theta_{ГЛ}$  не меняет погрешности определения  $\Delta T_a$  и  $\Delta \theta_{0,5}$ , а исключение  $\Delta \theta_{0,5}$  снижает  $C_1^{(0)}$  до 1,15 (на  $\sim 20\%$ ).

Аналогичные расчеты были проделаны для модели (7); в частности, для  $C_i^{(0)}$  получены следующие значения:  $C_1^{(0)} = 1,32$ ;  $C_2^{(0)} = C_4^{(0)} = 1,15$ ;  $C_3^{(0)} = C_5^{(0)} = 1,32$ , что ненамного отличается от величин  $C_i^{(0)}$  для модели (6). Отсюда следует важный практический вывод: необходимое число замеров главного лепестка «объемной» ДН остается практически тем же, что и для одного сечения ДН; тем самым, за счет увеличения шага по углу может быть существенно снижена длительность измерений по сравнению с обычной процедурой построчного сканирования [1].

На основе (9), графиков рис. 1 и расчетных значений  $C_i^{(0)}$  условия измерения могут быть выбраны так, что погрешность определения параметров не превысит заданную\*.

Заметим, что линейная фильтрация с последующим графическим оцениванием проигрывает процедуре (3), во-первых, из-за появления методических погрешностей (например, уширения главного лепестка) при ограниченном секторе измерений ( $r \simeq 2-3$ ), в то время как (3) заранее строится с учетом конечной величины  $\theta_{изм}$ , и, во-вторых, из-за увеличения дисперсии погрешности вследствие неоптимальности процедуры оценивания. Можно показать (подробности расчета мы опускаем), что при  $r \rightarrow \infty$  дисперсия оценивания, например,  $\theta_{ГЛ}$  при свертке  $x_k$  с функцией Гаусса, повторяющей сечение ДН, возрастает в  $\sqrt{2}$  раз.

Программная реализация расчета вектора оценок согласно (3) для моделей (6) и (7) исследовалась авторами на основе типовых программ из Библиотеки 1 ЭВМ БЭСМ-6. Рассматривались, в основном, поисковые методы минимизации  $L(\Xi)$  [4, 8]: прямого поиска, деформируемого симплекса и т. д. Наилучшие результаты были достигнуты с помощью программы минимизации суммы квадратов функций MINSQ; при этом на вычисление пяти параметров при  $n \simeq 300$  затрачивалась примерно 1 минута. Таким образом, оказалось, что, хотя по сложности вычислений метод (3) проигрывает линейной фильтрации, время вычислений остается приемлемым для большинства современных мини-ЭВМ (ориентировочно — единицы минут).

Порядок выполнения измерений применительно к изложенному способу обработки не отличается от принятого в радиоастрономическом методе [1]. Заметим лишь, что в случае модели (7) должно обращать особое внимание на стабильность приемника, так как «параметрическое» исключение, например, линейного тренда приемника в этом случае затруднительно из-за сложной зависимости  $\xi, \eta$  от времени. Кроме того, для реализации преимуществ модели (7) требуется автоматизированное управление опорно-поворотным устройством из-за сложности быстрой «дискретной» переориентации антенны по обеим осям относительно движущегося радиоисточника.

Метод параметрического оценивания апробировался на осесимметричной зеркальной антенне диаметром 7 м на волне 6 см; измерения проводились по радиоисточнику ЗС 461 (Кассиопея-А) с использова-

\* Заметим, что приведенные результаты расчетов могут оказаться полезными не только в задаче антенных измерений, но и в весьма распространенной задаче оценивания амплитуды, ширины и времени прихода гауссова импульса на фоне нормального шума, в особенности, когда интервал измерений порядка ширины импульса.

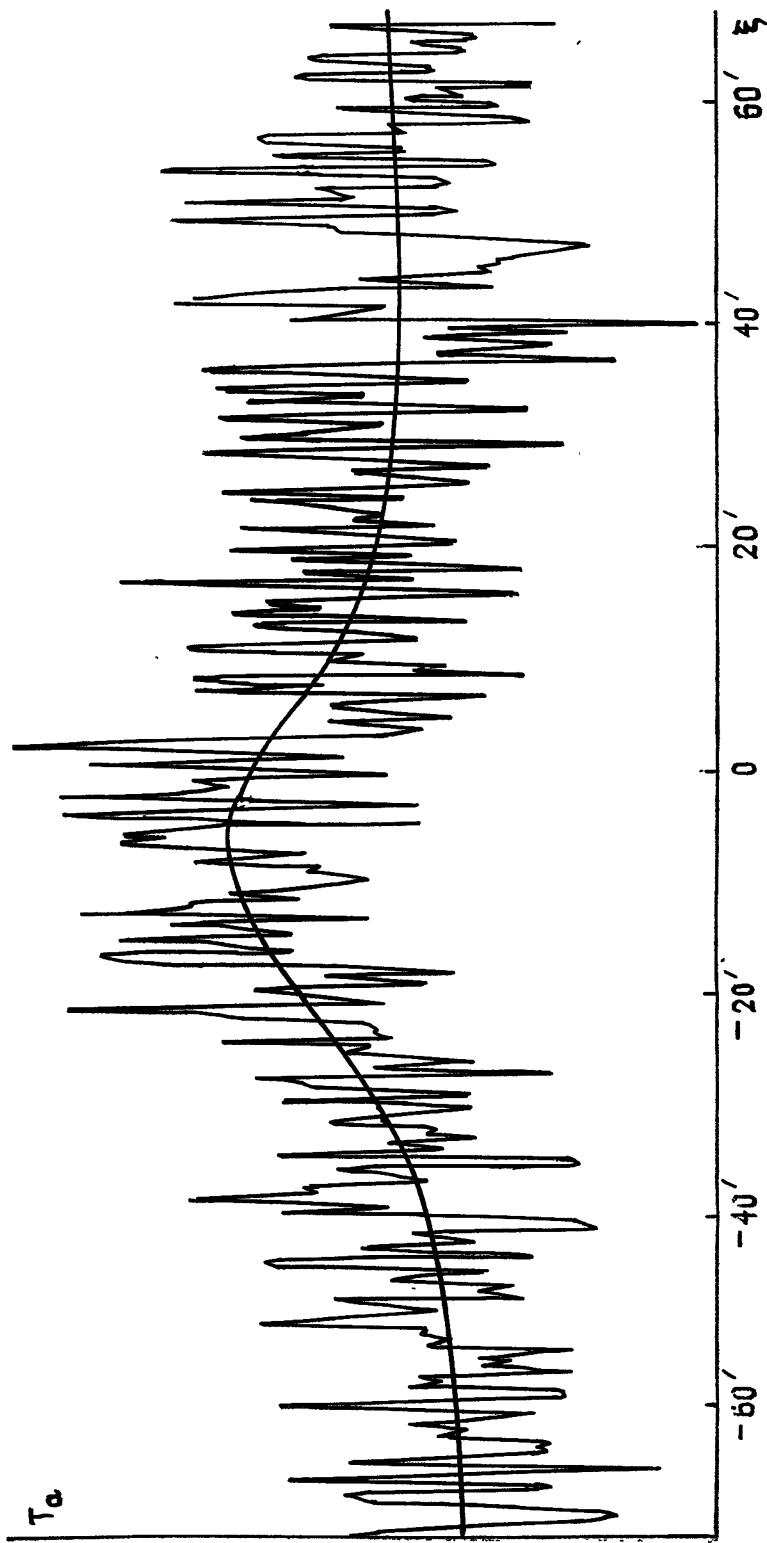


Рис. 2. Одна из реализаций записи сигнала при прохождении радиостанчика через диаграмму направленности («ломаная» кривая) и построенная по результатам параметрического оценивания «гладкая» кривая (2). По оси ординат отложены относительные единицы, пропорциональные антенной температуре  $T_a$ , по оси абсцисс — разность  $\xi$  угловой координаты радиостанчика и углового направления электрической оси антенны\*.

\* Эксперимент выполнялся при постоянной времени приемника 1 с, что соответствовало примерно 100 независимым (производимым через 3 с) отсчетам на интервале  $\Delta\theta_{0.5}$ . В принципе, при обработке на ЭВМ могло быть выполнено предварительное сглаживание кривой прохождения (в данном случае — примерно по 10 отсчетам), что уменьшило бы длину обрабатываемого массива практически без увеличения погрешности оценивания, однако эта операция не проводилась, так как представляла интерес проверка устойчивости работы алгоритма оценивания к большим шумам.

нием приемника ПК7-11 с малошумящим усилителем, обеспечивавшим  $T_{\text{фл}} \approx 0,5$  К. Чтобы обеспечить возможность контрольных измерений по Солнцу, главный лепесток расширялся до  $42'$  за счет смещения облучателя из фокуса вдоль оси зеркала: КИП при этом снижался до 0,15. При этих условиях и потерях в тракте около  $-2$  дБ  $\Delta T_a$  составило 1,0 К, т. е. измерения проводились практически на уровне флуктуационного порога. Измеренные данные представляли собой 15—20-минутные записи сигнала при прохождении радиоисточника через ДН антенны; по этим реализациям рассчитывались пять параметров для модели (6) (см. рис. 2). Параллельно проводились контрольные измерения по Солнцу, из которых находились  $\theta_{\text{ГЛ}}$  и  $\Delta\theta_{0,5}$ . С учетом конкретных условий эксперимента ( $S \approx 0,5$ ;  $m \approx 100$ ,  $r \approx 2,0 \dots 2,5$ ) отклонения  $\hat{\theta}_i$  ( $i=1, 2, 3$ ) в разных реализациях от «точных» значений в основном соответствовали расчетным. Так, среднеквадратическое отклонение  $\hat{\delta}_1$  составило 13% (расчетное значение — 14%),  $\hat{\delta}_2$  — 9% (расчетное значение — 6%). С худшей точностью, как это и следует из рис. 1, определялась ширина главного лепестка (при расчетном значении погрешности 20% отклонения результатов оценивания  $(\Delta\hat{\theta}_{0,5} - \Delta\theta_{0,5})/\Delta\theta_{0,5}$  составили 25—35%); для достижения лучшей точности, очевидно, необходимо более высокое отношение сигнал/шум, чем это имело место в эксперименте.

Авторы выражают благодарность Н. М. Цейтлину за постоянное внимание к данной работе и Ю. И. Белову за помощь в проведении эксперимента.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Цейтлин Н. М. Антенная техника и радиоастрономия. — М.: Сов. радио, 1976.
2. Векслер Н. В и др — Изв вузов. — Радиофизика, 1984, 27, № 3, с. 341.
3. Есепкина Н. А., Корольков В. Д., Парийский Ю. Н. Радиотелескопы и радиометры. — М.: Наука, 1973.
4. Круг Г. К., Кабанов В. А., Фомин Г. А., Фомина Е. С. Планирование эксперимента в задачах нелинейного оценивания и распознавания образов — М.: Наука, 1981.
5. Фрадин А. З. Антенно-фидерные устройства. — М.: Связь, 1977.
6. Von Hoerner S. — Astrophys. J., 1967, № 2, p. 467.
7. Алексеев С. А., Деречинский Л. Р. — Вопросы радиоэлектроники. Сер. Радиоизмерительная техника, 1973, вып. 3.
8. Химмельблау Д. Анализ процессов статистическими методами. — М.: Мир, 1973.

Научно-исследовательский  
радиофизический институт

Поступила в редакцию  
18 января 1984 г.,  
после доработки  
5 июля 1984 г.

#### THE USE OF PARAMETRIC ESTIMATION METHOD IN THE PROBLEM OF THE ANTENNA DIRECTIVITY PATTERN DEFINITION OVER THE WEAK RADIO SOURCES

*L. A. Pismanik, V. I. Turchin, V. A. Ugrinovskij*

Applicable to the radioastronomical method of antenna measurements a method is considered for processing of measurement data of direct estimation of numerical parameters characterizing the principal lobe of patterns by least square method. Errors of the amplification definition, direction of the maximal reception etc. have been found over the information matrix. Results are given of the method approbation by 7-meter mirror antenna at 6 cm.