

УДК 537.874.4

## СТРОГАЯ ТЕОРИЯ ОТКРЫТЫХ ДВУМЕРНЫХ РЕЗОНАТОРОВ С ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИМИ ВКЛЮЧЕНИЯМИ

*В. Н. Кошпаренко, П. Н. Мележик, А. Е. Поединчук, В. П. Шестопалов*

Построена строгая математическая модель, описывающая спектральные характеристики двумерных открытых резонаторов с диэлектрическими включениями. В предположении существования спектра комплексных собственных частот доказана его дискретность. Создан и обоснован численный алгоритм расчета собственных частот; исследовано влияние диэлектрического включения на спектральные характеристики открытого резонатора.

В работах [1, 2] построены приближенные модели ленточного ОР с прямоугольной диэлектрической призмой. При этом использовался эвристический подход, который применим далеко не всегда и является принципиально приближенным. В работе [3] методом возмущений (волновые размеры включения намного меньше единицы) оценено влияние включения (пробного тела) на спектральные характеристики «пустого» ОР. В случае, когда геометрический размер включения намного меньше размеров ОР, но соизмерим с резонансной длиной волны «пустого» ОР, в [4, 5] построены приближенные интегральные уравнения в предположении равенства нулю токов на теневых поверхностях зеркал. На основе обобщенного метода собственных колебаний в [6] исследован ряд двумерных ОР с диэлектрическими включениями. К возникающей при этом спектральной задаче применялся вариационный аппарат, основанный на базе стационарных функционалов рэлеевского типа.

Цель настоящей работы — построение строгой математической модели, описывающей спектральные характеристики двумерных ОР с зеркалами, совпадающими с частями незамкнутых круговых цилиндрических поверхностей и с включением в виде кругового диэлектрического цилиндра. При этом на размеры включения, его диэлектрическую проницаемость и положение практически не накладываются ограничения (рис. 1).

Пусть в безграничной однородной и изотропной среде с электродинамическими параметрами  $\epsilon_0$  и  $\mu_0$  расположен ОР, образованный двумя незамкнутыми круговыми цилиндрическими поверхностями с диэлектрическим включением в виде кругового цилиндра с комплексными проницаемостями  $\epsilon$  и  $\mu$  ( $\epsilon \neq \epsilon_0$ ,  $\mu \neq \mu_0$ ). Будем предполагать, что образующие элементов структуры ОР  $\perp$  включение параллельны и вдоль них она бесконечна и однородна, а незамкнутые цилиндрические поверхности — бесконечно тонкие и идеально проводящие. Пусть  $Oxyz$  — декартова система координат с осью  $Oz$ , параллельной образующим элементов структуры, и  $S$  — сечение структуры плоскостью  $Oxy$ . Тогда  $S = \bigcup_{i=1}^3 S_i$ , где  $S_i$  ( $i=1, 2$ ) — дуга окружности с центром в  $O_i$ ,  $S_3$  — открытый круг с центром в точке  $O_3$  и постоянными по области комплексными  $\epsilon$  и  $\mu$  (рис. 1). С каждым  $S_i$  ( $i=1, 2, 3$ ) свяжем локальную полярную систему координат  $(r_i, \varphi_i)$  с центром в точке  $O_i$  (все полярные оси парал-

лельны оси  $Oz$ ). Геометрия рассматриваемой структуры описывается следующими параметрами:  $a_i$  — радиусы кривизны зеркал  $OP$ ,  $a_3$  — радиус включения,  $l_{ij} = l_{ji}$  — расстояния между  $i$ -й и  $j$ -й системами координат,  $\psi_{ij}$  — угол ориентации начала  $i$ -й системы координат в  $j$ -й;  $2\theta_i$  ( $i=1, 2$ ) — угловой размер  $S'_i$  — дополнения  $S_i$  до окружности,  $\psi_i$  ( $i=1, 2$ ) — угол ориентации середины  $S'_i$  в  $i$ -й системе координат. Относительно взаимного расположения элементов будем предполагать

$$(S_i \cup S'_i) \cap S_j = \emptyset, i \neq j, i, j = 1, 2; (S_i \cup S'_i) \cap S_3 = \emptyset, i = 1, 2.$$

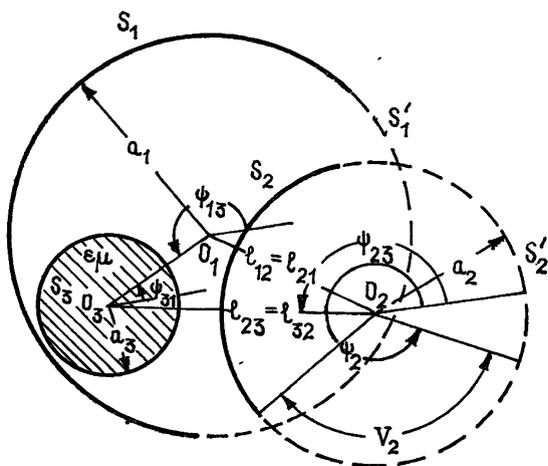


Рис. 1.

**1. Спектральная задача.** Математическая формулировка задачи о спектре (собственных частотах) двумерных ( $\partial/\partial z \equiv 0$ ) собственных электромагнитных колебаний  $E$ - и  $H$ -типа структуры  $S$  состоит в следующем. Требуется определить значения спектрального параметра  $k_0$  (собственной частоты  $\omega = k_0 c$ ,  $c$  — скорость света в вакууме), при которых существует нетривиальное решение уравнения Гельмгольца

$$\Delta u(x, y) + k_0^2 P(x, y) u(x, y) = 0, \quad (1)$$

удовлетворяющее на зеркалах  $OP$  однородным краевым условиям Дирихле или Неймана

$$\begin{aligned} u(x, y)|_{S_i} &= 0 & (\text{для колебаний } E\text{-типа}) \\ \left. \frac{\partial u(x, y)}{\partial n_i} \right|_{S_i} &= 0 & (\text{для колебаний } H\text{-типа}) \end{aligned}, \quad (2)$$

условиям сопряжения

$$(u^+ - u^-)|_{\partial S_3} = 0, \quad \left( \frac{1}{\mu} \frac{\partial u^+}{\partial n_3} - \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial u^-}{\partial n_3} \right) \Big|_{\partial S_3} = 0 \quad (3)$$

или

$$\left( \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial u^+}{\partial n_3} - \frac{1}{\epsilon_0} \frac{\partial u^-}{\partial n_3} \right) \Big|_{\partial S_3} = 0$$

(здесь  $\partial S_3$  — граница включения), условию конечности энергии в любой ограниченной области и условию излучения (временная зависимость выбрана в виде  $\exp(-i\omega t)$ )

$$u(x, y) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_m H_m^{(1)}(kr) \exp(im\varphi) \quad (4)$$

для достаточно больших  $|kr|$ ,  $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$ .

Здесь  $\mathbf{n}_i$ ,  $\mathbf{n}_3$  — соответственно нормаль к  $S_i$  и  $\partial S_3$ ,  $u^\pm$ ,  $\partial u^\pm / \partial \mathbf{n}_3$  — предельные значения  $u$ ,  $\partial u / \partial \mathbf{n}_3$  на  $\partial S_3$  ( $(+)$  — изнутри  $S_3$ , а  $(-)$  — извне),  $H_m^{(1)}(\dots)$  — функция Ханкеля первого рода,

$$P(x, y) = \begin{cases} \varepsilon\mu, & (x, y) \in S_3 \\ \varepsilon_0\mu_0, & (x, y) \notin S_3 \end{cases}$$

Функция  $u(x, y)$  описывает параллельную оси  $Oz$  компоненту собственного магнитного ( $H$ -тип) или электрического ( $E$ -тип) полей. Остальные компоненты собственного поля определяются через  $u(x, y)$  из однородной системы уравнений Максвелла. Спектральная задача (1) — (4) трудна для прямого исследования, поскольку на собственные функции налагается условие излучения. Однако, как будет показано ниже, удастся построить некоторую оператор-функцию, нелинейно зависящую от спектрального параметра  $k_0$ , задача на характеристические числа которой эквивалентна (1) — (4). В дальнейшем мы ограничимся колебаниями  $H$ -типа, а для колебаний  $E$ -типа построение не содержит принципиальных трудностей и проводится аналогично.

Решение задачи (1) — (4) на основе метода разделения переменных в локальных координатах  $(r_i, \varphi_i)$  ( $i=1, 2, 3$ ) будем искать в виде линейной суперпозиции рядов Фурье вида

$$u(x, y) = \begin{cases} \sum_{n=1}^3 \sum_{m=-\infty}^{+\infty} b_m^n G_m(kr_n, ka_n) e^{im\varphi_n}, & (x, y) \notin S_3 \\ \sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_m \frac{J_m(kr_3 \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1})}{J_m(ka_3 \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1})} e^{im\varphi_3}, & (x, y) \in S_3 \end{cases}, \quad (5)$$

где

$$G_m(kr_n, ka_n) = \begin{cases} J_m'(ka_n) H_m^{(1)}(kr_n), & r_n > a_n, n=1, 2 \\ J_m(kr_n) H_m^{(1)'}(ka_n), & r_n < a_n, n=1, 2, \\ J_m(ka_3) H_m^{(1)}(kr_3), & r_3 > a_3 \end{cases},$$

$$k = k_0 \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}, \quad \varepsilon_1 = \varepsilon \varepsilon_0^{-1}, \quad \mu_1 = \mu \mu_0^{-1}.$$

Здесь и далее  $J_m(\dots)$  — функция Бесселя, штрих означает операцию дифференцирования по аргументу.

В силу свойств цилиндрических функций и теорем сложения для последних функция  $u(x, y)$  из (5) удовлетворяет уравнению (1) всюду вне зеркал ОР и для любого  $k \neq 0$ ,  $|\arg k| < \pi$  выполняется условие излучения (4). Кроме того из условия конечности энергии собственного электромагнитного поля в любой ограниченной области следует, что

$$\{b_m^n\}_{m=-\infty}^{+\infty}, \{c_m\}_{m=-\infty}^{+\infty} \in l_2^{(1)} = \left\{ \{x_m\}_{m=-\infty}^{+\infty} : \sum_m |x_m|^2 |m| < \infty \right\}.$$

Так как справедливо включение  $l_2^{(1)} \subset l_2$ , то в дальнейшем удобно рассматривать неизвестные  $\{b_m^n\}$ ,  $\{c_m\}$  как элементы из  $l_2$ . Учитывая сказанное выше и подставляя (5) в (2) и (3), после ряда преобразований и применения метода задачи Римана—Гильберта [7] получаем для неизвестных  $\{b_m^n\}$  бесконечную систему линейных алгебраических уравнений, матричные элементы которой — мероморфные функции спектрального параметра  $k$  в  $C_k = \{k : |\arg k| < \pi, k \neq 0\}$ ,

$$b_p^n = \sum_{j=1}^3 \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_{pm}^{nj}(k) b_m^j, \quad n=1, 2, 3, \quad p=0, \pm 1, \dots \quad (6)$$

Здесь матрицы  $\|a_{pm}^{nj}(k)\|_{p,m=-\infty}^{+\infty}$  ( $n, j=1, 2$ ) описывают взаимодействие зеркал ОР и аналогичны матрицам в [8], а  $\|a_{pm}^{3n}(k)\|_{p,m=-\infty}^{+\infty}$ ,  $\|a_{pm}^{j3}(k)\|_{p,m=-\infty}^{+\infty}$  описывают взаимодействие диэлектрического включения с зеркалами ОР и имеют вид

$$a_{pm}^{j3}(k) = i\pi (ka_j)^2 J_m(ka_3) e^{im\varphi_{3j}} \sum_{q=-\infty}^{+\infty} R_q(ka_j) T_{m-q}(kl_{3j}) F_p^q(u_j), \quad (7)$$

$$a_{pm}^{3n}(k) = \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon + \varepsilon_0} \frac{R_m(ka_n) T_{m-p}(kl_{3n})}{H_p^{(1)}(ka_n)} e^{i(m-p)\varphi_{n3}},$$

$$a_{pm}^{33}(k) = \left[ 1 - \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon + \varepsilon_0} \Pi_p(ka_3 \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1}, \mu_1^{1/2} \varepsilon_1^{-1/2}) \right] \delta_m^p,$$

где

$$\Pi_p(x \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1}, y) = \frac{J_p(x) [H_p^{(1)'}(x) J_p(x \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1}) - y J_p'(x \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1}) H_p^{(1)}(x)]}{H_p^{(1)}(x) [J_p'(x \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1}) J_p(x) y - J_p(x \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1}) J_p'(x)]},$$

$$F_p^q(u_j) = \exp[iq(\psi_j - \psi_{3j} + \pi)] \begin{cases} -\ln [(1 + u_j)/2], & p = q = 0 \\ q^{-1} V_{q-1}^{-1}(u_j), & p = 0, q \neq 0, \\ p^{-1} V_{p-1}^{q-1}(u_j), & p \neq 0 \end{cases}$$

$$R_q(x) T_{m-q}(y) = \begin{cases} J_q'(x) H_{m-q}^{(1)}(y), & |x| < |y| \\ J_{q-m}(y) H_q^{(1)'}(x), & |x| > |y| \end{cases}$$

$u_j = -\cos \theta_j$ ,  $\delta_m^p$  — символ Кронекера, а  $V_{p-1}^{q-1}(\dots)$  вычислены в [7]. Неизвестные  $\{c_m\}$  определяются через  $\{b_m^3\}$  по формуле

$$c_m = b_m^3 \frac{2I_m(ka_3) J_m(ka_3 \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1})}{i\pi ka_3 [J_m(ka_3 \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1}) J_m'(ka_3) - \mu_1^{1/2} \varepsilon_1^{-1/2} J_m'(ka_3 \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1}) J_m(ka_3)]}. \quad (5a)$$

Используя представления цилиндрических функций через полиномы Ломмеля [9] и оценки для  $V_p^q(x)$  [7], можно получить следующие оценки для  $a_{pm}^{nj}(k)$ :

если  $n=1, 2$  и  $j \leq 3$ , то

$$|a_{pm}^{nn}(k)| < R(B) |p - m|^{-1} (|p| |m|^3)^{-1/2}, \quad p \neq m, \quad |a_{pp}^{nn}(k)| < R(B) p^{-2}, \quad (8)$$

$$|a_{pm}^{nj}(k)| < R(B) |m| \gamma^{|m|} |p|^{-3/2} \ln |p|, \quad 0 < \gamma < 1, \quad n \neq j;$$

если  $j=1, 2$  и  $a_j > l_{3j}$ ,  $a_j > a_3$ , то для  $\text{sign } m \neq \text{sign } p$

$$|a_{pm}^{3j}(k)| < R(B) G \frac{(|m|)!}{(|p| + |m|)!} \left(\frac{l_{3j}}{a_j}\right)^{|m|},$$

в случае  $\text{sign } m = \text{sign } p$  при  $|m| \geq |p|$

$$|a_{pm}^{3j}(k)| < R(B) G \frac{(|m|)!}{(|p|-1)! (|m| - |p|)!} \left(\frac{l_{3j}}{a_j}\right)^{|m|-|p|} \left(\frac{a_3}{a_j}\right)^{|p|}, \quad (9)$$

при  $|m| < |p|$

$$|a_{pm}^{3j}(k)| < R(B)G \frac{(|m|)!}{(|p|-1)!} \left(\frac{a_3}{a_j}\right)^{|m|};$$

если  $j=1, 2$  и  $a_j < l_{3j}$ ,  $a_3 < l_{3j}$ , то

$$|a_{pm}^{3j}(k)| < R(B)G \frac{(|m|+|p|)!}{(|m|-1)! (|p|-1)!} \left(\frac{a_j}{l_{3j}}\right)^{|m|} \left(\frac{a_3}{l_{3j}}\right)^{|p|}, \quad m \neq p, \quad (10)$$

$$|a_{pp}^{3j}(k)| < R(B)G \frac{1}{(|p|)!}, \quad |a_{pp}^{33}(k)| < R(B)p^{-2};$$

здесь  $G = |\varepsilon - \varepsilon_0| |\varepsilon + \varepsilon_0|^{-1}$ .

Оценки (8)–(10) справедливы при  $|p|, |m| \rightarrow \infty$  и равномерны по  $k$  на любом компакте  $B \subset C_k$ , не содержащем полюсов функций  $a_{pm}^{3n}(k)$ ,  $n=1, 2, 3$  (см. (7)). Через  $R(B)$  обозначена константа, зависящая только от  $B$  и геометрических параметров структуры. На основании оценок (8)–(10) получаем, что для любого  $k \in \hat{B} = C_k \setminus B_1$ ,  $B_1$  — множество корней функции  $H_p^{(1)}(ka_3)$  и  $J_p(ka_3 \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1}) J_p'(ka_3) - \mu_1^{1/2} \varepsilon_1^{-1/2} J_p'(ka_3 \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1}) J_p(ka_3)$ , справедливо неравенство

$$\sum_{p,m} |a_{pm}^{n1}(k)| < \infty.$$

Поэтому матрицы из (6) задают в  $l_2$  ограниченные операторы, которые обозначим  $A^{nj}(k)$ . Далее, для произвольного ортонормированного базиса  $\{f_p\}_{p=-\infty}^{+\infty}$  из  $l_2$  будут сходиться ряды

$$\sum_{p=-\infty}^{+\infty} |(A^{nj}(k)f_p, f_p)| < \infty,$$

где  $(\cdot)$  — скалярное произведение в  $l_2$ . Следовательно, на основании [10] получаем, что операторы  $A^{nj}(k) : l_2 \rightarrow l_2$  являются ядерными для любого  $k \in \hat{B}$ . Введем пространство

$$l_2^3 = \left\{ b = \begin{pmatrix} b^1 \\ \vdots \\ b^3 \end{pmatrix} : b^i = \{b_m^i\}_{m=-\infty}^{+\infty} \in l_2, i = 1, 2, 3 \right\},$$

которое относительно скалярного произведения  $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^3 (x^i, y^i)$  будет сепарабельным гильбертовым пространством. Поставим в соответствие системе операторов  $\{A^{nj}(k)\}_{n,j=1}^3$  оператор  $A(k) = \|A^{nj}(k)\|_{n,j=1}^3$ , действующий в  $l_2^3$  по формуле

$$A(k)b = \begin{pmatrix} A^{11}(k), \dots, A^{13}(k) \\ \vdots \\ A^{31}(k), \dots, A^{33}(k) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b^1 \\ \vdots \\ b^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^3 A^{1j}(k) b^j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^3 A^{3j}(k) b^j \end{pmatrix}.$$

Видно, что  $A(k)$  — ядерный оператор в  $l_2^3$  для любого  $k \in \hat{B}$ . Поэтому  $A(k)$  задает оператор-функцию с областью определения  $\hat{B}$  и областью значений во множестве ядерных операторов, действующих в  $l_2^3$ . На основании изложенного выше бесконечную систему (6) можно рассматривать как операторное уравнение в  $l_2^3$ .

$$[I - A(k)]b = \theta, \quad (11)$$

где  $I$  — тождественный оператор,  $\theta$  — нулевой элемент в  $l_3^3$ .

Используя оценки (8)—(10), можно показать, что  $A(k)$  — конечномероморфная оператор-функция в  $C_k$ . Далее, на основании существования лишь тривиального решения ( $u \equiv 0$ ) задачи (1)—(4) при  $k \in \text{Im } k > 0$  (см. [11]) и конечномероморфной теоремы Фредгольма ([12], с. 123) получаем, что множество характеристических чисел  $\sigma(A)$  оператор-функции  $I - A(k)$  дискретно в  $C_k$  и расположено в полуплоскости  $\text{Im } k < 0$ .

Таким образом, если  $\sigma(A) \neq \emptyset$ , то для любого  $k \in \sigma(A)$  существует нетривиальное решение уравнения (11) в  $l_3^3$ . При этом на основании оценок (8)—(10) можно получить асимптотические оценки нетривиальных решений  $\{b_n^m\}$  уравнения (11):

$$b_n^m = \frac{P_{m-1}(u_n)}{m} C_1 + \frac{P_m(u_n)}{m} C_2 + O\left(\frac{\ln |m|}{|m|^{5/2}}\right), \quad n = 1, 2, \quad (12)$$

$$|b_m^3| < C_3 |m|^{-\gamma}, \quad 0 < \gamma < 1, \quad |m| \rightarrow \infty,$$

$C_i$  и  $\gamma$  — константы, не зависящие от  $m$ . Из (12) и представлений для функций  $u(x, y)$  в виде (5) следует, что  $u(x, y)$  удовлетворяет условию конечности энергии в любой ограниченной области.

На основании указанных выше свойств оператор-функции  $A(k)$ , а также оценок (8)—(10) и (12) можно доказать, что спектральная задача (1)—(4) и задача на характеристические числа оператор-функции  $I - A(k)$  эквивалентны, т. е. спектр собственных колебаний исследуемого ОР с диэлектрическим включением совпадает с  $\sigma(A)$ . Доказательство, которое слишком громоздко, мы приводить не будем, лишь укажем, что эквивалентность понимается в следующем смысле. Пусть  $k_0 \in \sigma(A)$  и  $b$  — решение уравнения (11) при  $k = k_0$ , тогда функция  $u(x, y)$ , построенная по формуле (5), где  $c_m$  определяются из (5а), не равна тождественно нулю и является решением задачи (1)—(4) при  $k = k_0$ . И наоборот, если функция вида (5) является решением задачи (1)—(4) при некотором  $k = k_0$ , то  $k_0 \in \sigma(A)$ .

**2. Задача дифракции.** Построим схему конструктивного решения двумерной задачи дифракции заданного  $H$ - и  $E$ -поляризованного монохроматического электромагнитного поля на структуре ОР + диэлектрическое включение. Пусть  $u^0(x, y)$  — параллельная оси  $Oz$  компонента магнитного ( $H$ -поляризация) или электрического ( $E$ -поляризация) возбуждающего поля. Относительно  $u^0(x, y)$  предположим, что в любой из локальных полярных координат  $r_j, \varphi_j$ , введенных выше, эта функция может быть представлена в виде ряда Фурье

$$u^0(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y_n(kr_j) \exp(in\varphi_j) \quad (13)$$

( $u^0(x, y)$ , например, — поле плоской, неоднородной плоской или цилиндрической электромагнитных волн), который допускает почленное дифференцирование по  $r_j$  и  $\varphi_j$ . Если обозначить через  $u^1(x, y)$  параллельную оси  $Oz$  компоненту магнитного ( $H$ -поляризация) или электрического ( $E$ -поляризация) поля, возникающего в результате дифракции  $u^0(x, y)$  на исследуемой структуре, то для определения  $u^1(x, y)$  получается следующая задача:  $u^1(x, y)$  удовлетворяет (1), краевым условиям на зеркалах ОР

$$\begin{aligned} \text{или} \quad [u^1(x, y) + u^0(x, y)]|_{S_1} &= 0 && (E\text{-поляризация}) \\ \frac{\partial [u^1(x, y) + u^0(x, y)]}{\partial n_1} \Big|_S &= 0 && (H\text{-поляризация}) \end{aligned} \quad (2a)$$

— условиям сопряжения (3), где в качестве  $u^-(x, y)$  принимается предельное значение функции  $(u^1 + u^0)$  на  $\partial S_3$  вне  $S_3$  (для простоты предполагается, что источники поля  $u^0$  расположены вне включения  $S_3$ ), условию конечности энергии в любой ограниченной области и условию погашаемости Малюжинца ( $\text{Im } \epsilon_0 > 0, \text{Im } \mu_0 \geq 0$ )

$$|u^1(x, y)| \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad (x^2 + y^2) \rightarrow \infty. \quad (4a)$$

Для поставленной таким образом задачи справедлива теорема единственности [11]. Формально решение задачи (1), (2a)–(4a) проводится аналогично решению спектральной задачи (1)–(4), в результате получаем неоднородную бесконечную систему линейных уравнений второго рода, которая в операторной форме имеет вид

$$[I - A(k)]b = d. \quad (14)$$

Здесь оператор-функция  $A(k)$  та же, что и в (11),  $b$  — неизвестные коэффициенты разложения  $u^1(x, y)$  в ряды Фурье (см. (5)),  $d$  — вектор, определяемый функцией  $u^0(x, y)$ .

Как было показано выше,  $A(k)$  — ядерный оператор-функция для любого  $k \in \hat{B}$ , причем при  $d \equiv \theta$  и  $\text{Im } k > 0$  уравнение (14) имеет только тривиальное решение в  $l_2^3$ . Следовательно, для любых  $k, u$  которых  $\text{Im } k > 0$  ( $k = \omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} / c$ ,  $\omega$  — частота возбуждаемого поля), существует единственное решение  $b \in l_2^3$  уравнения (14), что равносильно (в силу альтернативы Фредгольма) существованию ограниченного оператора  $[I - A(k)]^{-1}$  при  $\text{Im } k > 0$ .

**3. Численный алгоритм.** Описанный в предыдущих пунктах подход к задаче о спектре собственных двумерных колебаний ОР с диэлектрическим включением позволяет построить и обосновать алгоритм для расчета собственных частот, опирающийся на существование лишь изолированных характеристических чисел оператор-функции  $I - A(k)$ .

Построим последовательность «приближенных» уравнений вида

$$A_N(k)b = \theta.$$

Здесь  $A_N(k) = P_N - P_N A(k) P_N$ ,  $P_N$  — ортопроектор на конечномерное подпространство

$$P_N(l_2^3) = \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \\ \vdots \\ x^3 \end{pmatrix} : x_m^i = 0, \quad |m| > N, \quad i = 1, 2, 3 \right\}.$$

Из ядерности и аналитичности  $A(k)$  и результатов работы [13] следует, что если  $k_N \in \sigma(A_N)$  и  $|k_N - k| \rightarrow 0$  при  $N \rightarrow \infty$ ,  $k \in \hat{B}$ , то  $k \in \sigma(A)$ . Через  $\sigma(A_N)$  обозначено множество характеристических чисел  $A_N(k)$ . Таким образом, характеристические числа  $I - A(k)$  (а значит, и собственные частоты ОР с включением) можно аппроксимировать характеристическими числами последовательности оператор-функций  $A_N(k)$ , а в силу конечномерности  $A_N(k)$  — корнями уравнений

$$\det \|A_N(k)\| = 0.$$

Как показали систематические расчеты, проведенные на ЭВМ БЭСМ-6, для вычисления собственной частоты с точностью 4—5 значащих цифр достаточно выбирать  $N$  по формуле  $N = \lceil [ka] \rceil + 10$ , где  $a = \max_i a_i$ ,  $\lceil \dots \rceil$  — целая часть числа.

В случае задачи дифракции уравнение (14) может быть решено методом редукции с любой наперед заданной точностью. Обоснование этого следует из ядерности  $A(k)$ .

**4. Обсуждение численных результатов.** Применим полученные соотношения к расчету собственных частот открытого резонатора с диэлектрическим включением. Собственные частоты рассчитывались из уравнений (11) на основе численного алгоритма. Этот алгоритм был реализован в виде пакета программ для ЭВМ БЭСМ-6. Собственные частоты определялись с точностью до 4—5 значащих цифр. В качестве геометрических параметров, описывающих структуру, использовались безразмерные параметры:  $\epsilon_1$ ,  $\mu_1$  — диэлектрическая и магнитная проницаемости включения,  $d/a$  — диаметр включения,  $s/a$  — расстояние от центра включения до «левого» зеркала (рис. 1),  $2b/a$  — апертура зеркал ОР,  $a$  — радиус кривизны зеркал. При этом исследовался симметричный конфокальный резонатор.

1. Пусть центр включения совпадает с центром ОР (т. е.  $s/a = 1/2$ ) и  $\mu_1 = 1$ . Проанализируем зависимости  $ka = \omega a/c$  ( $c$  — скорость света в среде) ОР с включением от реальной части диэлектрической проницаемости ( $\text{Re } \epsilon$ ) последнего. При этом будем различать два случая: а)  $d\sqrt{\text{Re } \epsilon}/\lambda \ll 1$ ; б)  $d\sqrt{\text{Re } \epsilon}/\lambda \geq 1$ , здесь  $\lambda = 2\pi a/\text{Re}(ka)$  ( $\text{Re}(ka)$  соответствует собственной частоте ОР с включением). Рассмотрим случай а) и предположим, что  $\text{Im } \epsilon = 0$ . Расчеты, проведенные на ЭВМ, показали, что характер поведения  $\text{Re}(ka)$  как функции  $\text{Re } \epsilon$  существенно зависит от того, где находится включение: в пучности или узле собственного электрического поля ОР. Так, для колебаний типа  $H_{m2n}^*$  (электрическое поле имеет минимум в центре ОР) собственная частота  $\text{Re}(ka)$  и добротность собственного колебания  $Q$  ( $Q = -\text{Re}(ka) \times \times [2\text{Im}(ka)]^{-1}$ ) практически не зависят от  $\text{Re } \epsilon$ .

На рис. 2а, б представлены сплошной линией графики зависимостей  $\text{Re}(ka)$  и  $\lg Q$  от  $\text{Re } \epsilon$  для колебания  $H_{02}$ . Даже при  $\text{Re } \epsilon = 10$  расстройка по частоте по сравнению с «пустым» резонатором  $\left( \frac{\text{Re}(k_0 a) - \text{Re}(ka)}{\text{Re}(k_0 a)} 100\% \right)$  составляет 0,2%;

здесь  $\text{Re}(k_0 a)$  — собственная частота пустого резонатора. В случае же колебаний  $H_{m2n+1}$  (электрическое поле имеет максимум в центре ОР), как видно из рис. 2а, б и 3а, б, где представлены зависимости  $\text{Re}(ka)$  и  $\lg Q$  от  $\text{Re } \epsilon$  для колебаний  $H_{01}$  и  $H_{03}$ , реальная часть  $ka$  и  $\lg Q$  имеют явно выраженную зависимость от  $\text{Re } \epsilon$  и при  $\text{Re } \epsilon \rightarrow \infty$  асимптотически стремятся к соответствующим величинам (показаны штрихпунктирной линией) ОР с идеально проводящим включением того же размера, что и диэлектрическое включение (рис. 2 —  $H_{01} - b/a = 0,77$ ,  $H_{02} - b/a = 0,81$ ). Таким образом, малые по сравнению с длиной волны включения (как диэлектрические, так и идеально проводящие) практически не оказывают влияния на спектральные характеристики ОР, когда они помещаются в узел электрического поля. Если же размеры включения сравнимы с резонансной длиной волны ( $d \text{Re}(ka/\epsilon)/2\pi a \sim 1$ ), увеличение  $\text{Re } \epsilon$  существенно влияет как на собственную частоту ОР

\* Колебанием  $H_{mn}$  в открытом резонаторе с включением мы называем то, которое при  $\mu \rightarrow 1$  и  $\epsilon \rightarrow 1$  непрерывно преобразуется в колебание  $H_{mn}$  пустого резонатора, где их классификация аналогична работе [1].

с включением, так и на его добротность. Зависимости  $Re(ka)$  и  $lg Q$  для колебания  $H_{03}$  при  $1 \leq Re \epsilon \leq 10$  представлены на рис. 3а, б штриховой линией (рис. 3 — штриховая кривая —  $d/a=0,66$ ,  $Im \epsilon=2 \cdot 10^{-4}$ ,

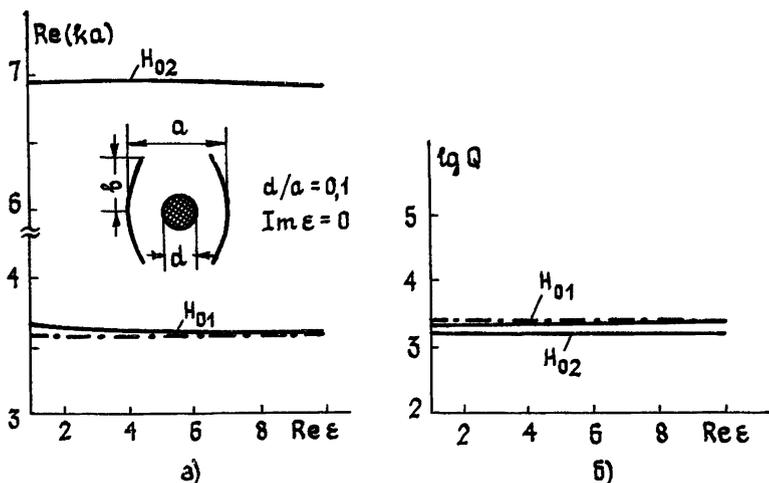


Рис. 2.

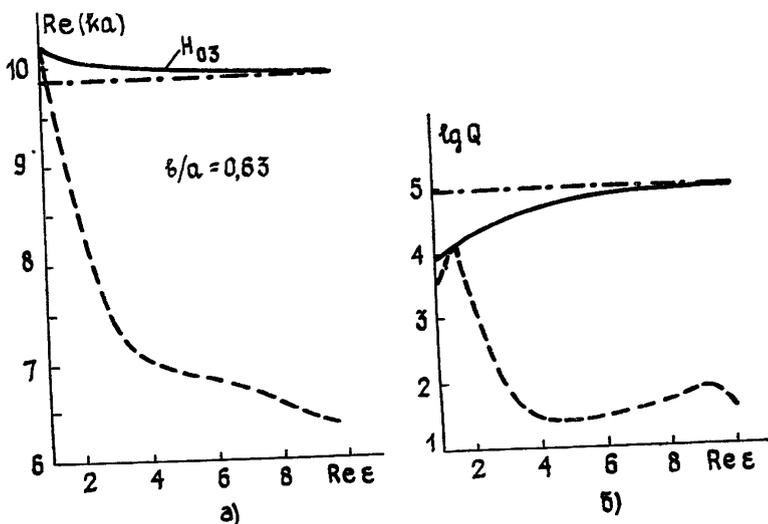


Рис. 3.

сплошная кривая —  $d/a=0,1$ ,  $Im \epsilon=0$ ). Результаты расчетов зависимостей собственной частоты ОР с включением и добротности от размера включения представлены на рис. 4. Как видно из рисунка, зависимости  $Re(ka)$  от  $d/a$  для колебаний типа  $H_{m2n}$  (включение в узле электрического поля) и колебаний  $H_{m2n+1}$  (включение в пучности электрического поля) имеют монотонно убывающий характер. Что же касается зависимостей добротностей, то для колебания  $H_{0n}$  (для  $n \geq 2$ ) они имеют ярко выраженный резонансный характер. Причем при достаточно малых потерях в диэлектрическом включении ( $Im \epsilon \sim 10^{-3}$ ) добротность ОР с включением, при некоторых резонансных значениях  $d/a$ , в несколько раз превышает добротность пустого ОР (рис. 4б, г — крестики —  $Im \epsilon=0$ , сплошная кривая —  $Im \epsilon=2 \cdot 10^{-4}$ , штриховая —  $Im \epsilon=10^{-3}$ , точечная кривая —  $Im \epsilon=10^{-2}$ , рис. 4г, штрихпунктиром

показана добротность пустого ОР). Как показал более детальный анализ явления резонансного увеличения добротности исследуемой структуры, физическая причина последнего заключается в возбуждении в самом диэлектрическом включении собственного колебания.

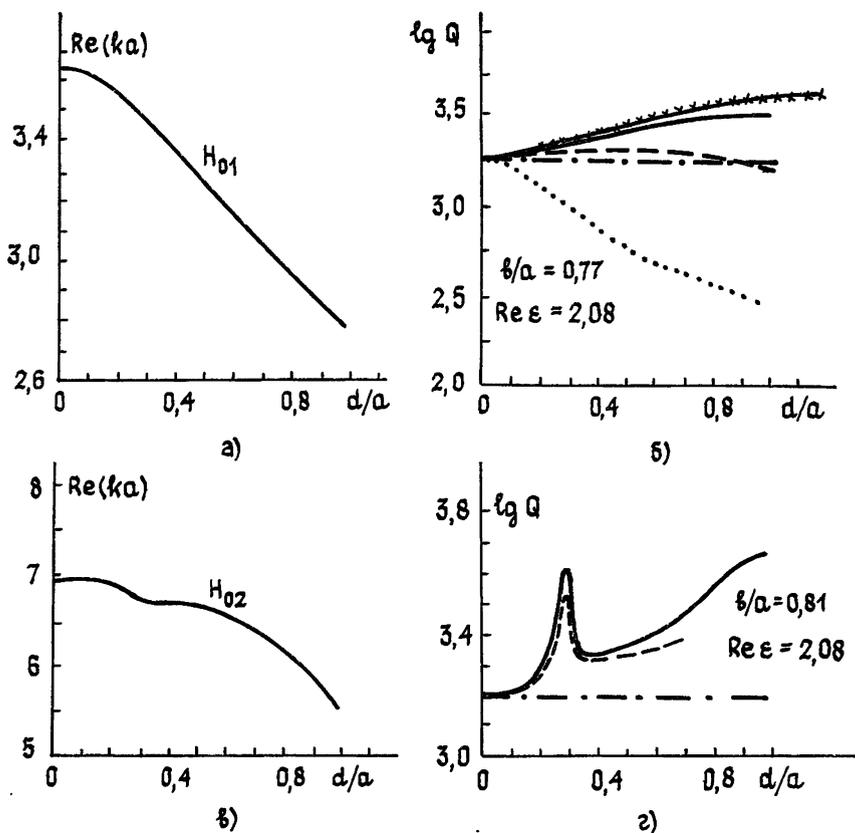


Рис. 4.

2. Как известно [14], одним из основных методов экспериментального измерения относительного амплитудного распределения электромагнитных полей собственных колебаний ОР является метод реактивного зондирования. Сущность его состоит в том, что в ОР вносят зонд из материала, сильно поглощающего электромагнитную энергию, и регистрируют изменение добротности ОР при перемещении зонда по объему ОР. По изменению добротности можно получить информацию об относительном амплитудном распределении собственного поля ОР. При этом, с одной стороны, размер зонда должен быть достаточно мал, чтобы разрешить сложную пространственную структуру электрического поля, а с другой стороны, достаточно велик для достижения высокой чувствительности измерений. В этой связи были проведены расчеты зависимостей  $Re(ka)$  и  $lg Q$  от  $x/a$  (здесь  $x$  — расстояние от центра диэлектрического включения до левого зеркала ОР, рис. 5а) при различных диаметрах включения с  $Re \epsilon = 2,08$  и  $Im \epsilon = 0,1$ . На рис. 5а, б представлены результаты этих расчетов для случая, когда в резонаторе собственным колебанием будет  $H_{03}$ . Кривые из точек на этих рисунках соответствуют  $Re(k_0 a)$  и  $lg Q_0$  пустого резонатора (сплошная кривая —  $d/a = 0,02$ , штриховая —  $d/a = 0,1$ , штрихпунктирная —  $d/a = 0,2$ ). Из рис. 5а, б видно, что зависимости  $Re(ka)$  и  $lg Q$  от  $x/a$  имеют ярко выраженный осциллирующий характер, соответствующий пространствен-

ной структуре электрического и магнитного поля, при этом максимальное отклонение  $\text{Re}(ka)$  от  $\text{Re}(k_0a)$  и  $\lg Q$  от  $\lg Q_0$  наблюдается, когда зонд находится в «пучности» («узле») электрического (магнитного) поля. С ростом параметра  $d/a$  амплитуда осцилляций  $\text{Re}(ka)$  увеличивается (рис. 5б, штрихпунктирная линия), а осцилляции добротности начинают сглаживаться, т. е. ухудшается разрешающая способность зонда. При уменьшении диаметра включения ( $d/a \rightarrow 0$ ) зависимости  $\text{Re}(ka)$  и  $\lg Q$  практически не осциллируют (рис. 5а, б; сплошные линии).

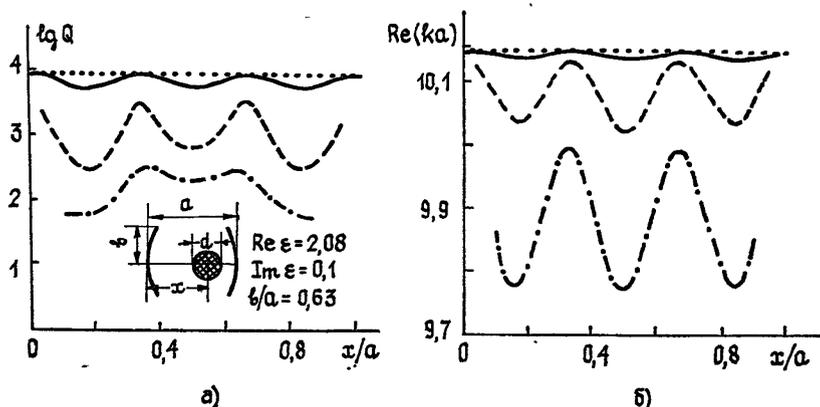


Рис. 5.

Таким образом, расчеты наглядно демонстрируют, что существует оптимальный размер диэлектрического зонда для метода реактивного зондирования ОР; например, при исследовании структуры поля колебания  $H_{03}$  оптимальные размеры зонда будут примерно определяться из соотношения  $d/\lambda \approx 0,15$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Вайнштейн Л. А. Открытые резонаторы и открытые волноводы. — М.: Сов. радио, 1966. — 476 с.
2. Нефедов Е. И. Дифракция волн на диэлектрических структурах. — М.: Наука, 1979. — 222 с.
3. Ципенюк Ю. М. — Электроника больших мощностей, 1965, № 4, с.173.
4. Белостоцкий В. В., Васильев Е. Н. — Радиотехника и электроника, 1979, 24, № 7, с. 1308.
5. Белостоцкий В. В., Васильев Е. Н., Седелникова З. В. — Сб. научно-методич. статей по прикладной электродинамике. — М.: Высшая школа, 1983, вып. 5, с. 225.
6. Войтович Н. Н. и др. Тезисы докладов VIII Всесоюзного симпозиума по дифракции и распространению волн. — М.: ИРЭ АН СССР, 1981, 1, с. 201.
7. Шестопалов В. П. Метод задачи Римана—Гильберта в теории дифракции и распространения электромагнитных волн. — Харьков: Гос. ун-т, 1971. — 400 с.
8. Кошпаренко В. Н., Мележик П. Н., Шестопалов В. П. — ДАН СССР, 1980, 250, № 2, с. 344.
9. Ватсон Г. Н. Теория бesselевых функций. Ч. 1. — М.: ИЛ, 1949. — 798 с.
10. Гохберг И. Ц., Крейн М. Г. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. — М.: Наука, 1965. — 356 с.
11. Хенл Х., Мауэ А., Вестпаль К. Теория дифракции. — М.: ИЛ, 1964. — 428 с.
12. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Ч. 4. — М.: Мир, 1982. — 428 с.
13. Вайникко Г. М., Карма О. О. — ЖВММФ, 1974, 14, № 6, с. 1393.
14. Техника миллиметровых волн. / Валитов Р. А., Дюбко С. Ф., Камышан В. В. и др. — М.: Сов. радио, 1976. — 437 с.

# THE RIGOROUS THEORY OF THE OPEN TWO-DIMENSIONAL RESONATORS WITH THE DIELECTRICAL INHOMOGENEITIES

V. N. Koshparenok, P. N. Melezhik, A. E. Poedinchuk, V. P. Shestopalov

The rigorous mathematical model which describes the spectral characteristics of the two-dimensional open resonators with dielectrical inhomogeneities is constructed. It is proved that the spectrum is discrete when there is an assumption on the existence of a complex spectrum. The algorithm of eigenvalue calculation is given. The influence of dielectrical inhomogeneities on spectral characteristics is studied.

---

## ИНФОРМАЦИЯ О НОВЫХ КНИГАХ

Вайнштейн Л. А., Шевелько В. П. Структура и характеристики ионов в горячей плазме. — М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1986. — 13 л.

Изложены универсальные методы расчета радиационных и столкновительных характеристик (вероятностей переходов, сечений и скоростей различных процессов взаимодействия электронов с атомами и ионами), составляющих основу необходимых атомных данных для задач в физике управляемого термоядерного синтеза, лазерной спектроскопии, астрофизики, теории атомных спектров и столкновений и т. д. Приведен справочный материал, методы расчета доведены до уровня, удобного для программирования на ЭВМ.

Для научных сотрудников и инженеров, работающих в области исследования лабораторной и астрофизической плазмы, а также аспирантов и студентов, специализирующихся в этой области.

Новиков И. Д., Фролов В. П. Физика черных дыр. — М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1986. — 20 л.

Излагается современное состояние проблемы физики черных дыр, возникающих в результате катастрофического сжатия небесных тел. Авторы охватывают все аспекты проблемы от теории пространства — времени самих черных дыр, механики движения тел, распространения полей в их окрестности до физических процессов в них, свойств вакуума и значения черных дыр в астрофизике. Первые черные дыры, вероятно, уже обнаружены.

Для физиков и астрономов-специалистов, аспирантов и студентов старших курсов.

Товмасын Г. М. Внегалактические источники радиоизлучения. — М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1986. — 18 л.

Применение радиоастрономических методов наблюдений за последние несколько десятилетий чрезвычайно обогатило наши знания о космических объектах, обнаружило объекты совершенно нового типа — радиогалактики и квазары, привело к открытию явления активности ядер галактик. Книга знакомит читателя с достижениями наблюдательной внегалактической радиоастрономии. Дано описание особенностей радиоизлучения радиогалактик и квазаров, сейфертовских и нормальных галактик, скоплений галактик. Кратко рассматриваются гипотезы объяснения мощного радиоизлучения внегалактических объектов. Приводится обширная библиография.

Для радиоастрономов, астрофизиков, физиков-специалистов, аспирантов и студентов.

---