ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XXVIII, № 10 РАДИОФИЗИКА 1985

УДК 621.372.8

ГОРИЗОНТАЛЬНЫЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ДИПОЛЬ В СФЕРИЧЕСКОМ НЕРЕГУЛЯРНОМ ВОЛНОВОДЕ

А. Д. Авдеев

Методом поперечных сечений построено решение задачи о поле горизонтального электрического диполя в сферическом нерегулярном волноводе.

Представление решения задачи о горизонтальном электрическом диполе в сферическом регулярном волноводе в виде нормальных волн, распространяющихся в меридиональном направлении, хорошо известно [1]. Решение этой, а также аналогичной задачи о возбуждении шара может быть построено различными методами. В [2] искомое представление получено с помощью преобразования Ватсона. В работах [1, 3] использованы теорема взаимности и выражения для полей вертикальных электрического и магнитного диполей. В статье [4] задача о возбуждении шара произвольными источниками решена методом вариации постоянных. Эти методы, использующие потенциалы Дебая, достаточно просты, но неизвестно их обобщение на случай нерегулярных волноводов.

В данной работе рассматривается азимутально-симметричный изотропный сферический нерегулярный волновод, возбуждаемый горизонтальным электрическим диполем. Уравнения Максвелла сводятся к краевой задаче для поперечных по отношению к координате θ компонент электромагнитного поля [5], решение которой строится в виде ряда по собственным функциям поперечного оператора. Коэффициенты разложения определяются из системы волноводных уравнений. Эта система, соответствующая регулярному волноводу, интегрируется точно. В случае нерегулярного волновода построено решение, в первом приближении учитывающее перевозбуждение нормальных волн.

1. ИСХОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим задачу о поле гармонического ($\sim \exp(-i\omega t)$) горизонтального электрического диполя в волноводе, образованном концентрическими сферами с радиусами $r=a$, $r=b$, $a<b$, отражающие свойства которых описываются приведенными поверхностными импедансами $\tilde{\delta}_{1,2}(\theta, \varphi)$. Волновод заполнен неоднородной средой с относительной комплексной диэлектрической проницаемостью $\tilde{\varepsilon}(r, \theta, \varphi)$. Пусть L — характерный масштаб изменения параметров волновода в горизонтальном направлении, т. е.

$$\frac{1}{r}\frac{\partial\tilde{\varepsilon}}{\partial\theta} = O\left(\frac{\tilde{\varepsilon}}{L}\right), \quad \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\tilde{\varepsilon}}{\partial\varphi} = O\left(\frac{\tilde{\varepsilon}}{L}\right), \quad \frac{1}{r}\frac{\partial\tilde{\delta}_{1,2}}{\partial\theta} = O\left(\frac{\tilde{\delta}_{1,2}}{L}\right),$$

$$\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\tilde{\delta}_{1,2}}{\partial\varphi} = O\left(\frac{\tilde{\delta}_{1,2}}{L}\right).$$

Предполагаем, что $L = O(a)$ и длина волны $\lambda \ll a$.

Можно ожидать, что поле в точке приема, расположенной достаточно далеко от антипода, определяется в основном параметрами волновода в существенной для распространения зоне с шириной $l = O(\sqrt{\lambda R})$, где R — расстояние от источника до приемника. Так как при $R = O(a)$ параметр $l/L = O(\sqrt{\lambda/a})$ мал, то в первом приближении можно не учитывать отличие параметров волновода от их значений в плоскости $\varphi = \varphi_0$, проходящей через источник и приемник. Искомое поле мало отличается от поля в волноводе с параметрами $\varepsilon(r, \theta) = \tilde{\varepsilon}(r, \theta, \varphi_0)$, $\delta_{1,2}(\theta) = \tilde{\delta}_{1,2}(\theta, \varphi_0)$, неявно зависящими от азимута приемника. Таким образом, поставленная задача сводится к следующей упрощенной краевой задаче для уравнений Максвелла:

$$\operatorname{rot}\tilde{\boldsymbol{H}} = -i\omega\varepsilon_0\varepsilon(r, \theta)\tilde{\boldsymbol{E}} + \boldsymbol{j}_{\text{ст}}, \quad \operatorname{rot}\tilde{\boldsymbol{E}} = i\omega\mu_0\tilde{\boldsymbol{H}},$$

$$\begin{pmatrix}\tilde{E}_\theta\\ \tilde{E}_\varphi\end{pmatrix} = \mp\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\,\delta_{1,2}(\theta)\begin{pmatrix}\tilde{H}_\varphi\\ -\tilde{H}_\theta\end{pmatrix}, \quad r = a, b. \tag{1.1}$$

Поля $\tilde{\boldsymbol{E}}$ и $\tilde{\boldsymbol{H}}$ ограничены вне источника, плотность тока которого имеет вид

$$\boldsymbol{j}_{\text{ст}} = Ih_g\frac{\delta(r - r_0)\,\delta(\theta - \theta_0)}{2\pi r^2\sin\theta}(\boldsymbol{e}_\theta\cos\varphi - \boldsymbol{e}_\varphi\sin\varphi), \quad a < r_0 < b \tag{1.2}$$

и соответствует кольцу горизонтальных электрических диполей. В окончательном ответе положим $\theta_0 = 0$.

Считаем, что относительная комплексная диэлектрическая проницаемость $\varepsilon(r, \theta)$ и приведенные поверхностные импедансы $\delta_{1,2}(\theta)$ удовлетворяют условиям

$$\frac{\partial\varepsilon(r, 0)}{\partial\theta} = \frac{\partial\varepsilon(r, \pi)}{\partial\theta} = 0, \quad \frac{d\delta_{1,2}(0)}{d\theta} = \frac{d\delta_{1,2}(\pi)}{d\theta} = 0. \tag{1.3}$$

Решение задачи (1.1), (1.2) ищем в виде

$$(\tilde{E}_r, \tilde{E}_\theta, \tilde{H}_\varphi) = \frac{\cos\varphi}{r\sqrt{\sin\theta}}\left(E_r(r, \theta), E_\theta(r, \theta), \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}H_\varphi(r, \theta)\right),$$

$$(\tilde{H}_r, \tilde{H}_\theta, \tilde{E}_\varphi) = \frac{\sin\varphi}{r\sqrt{\sin\theta}}\left(\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}H_r(r, \theta), \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}H_\theta(r, \theta), E_\varphi(r, \theta)\right).$$

Введем обозначения:

$$k = \omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}, \quad f(r, \theta) = Ih_g\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\frac{\delta(r - r_0)\,\delta(\theta - \theta_0)}{2\pi r\sqrt{\sin\theta}}.$$

Из уравнений (1.1) находим выражения для продольных компонент

$$E_\theta = \frac{1}{ik\varepsilon}\frac{\partial H_\varphi}{\partial r} - \frac{H_r}{ikr\varepsilon\sin\theta} + \frac{f}{ik\varepsilon},$$

$$H_\theta = -\frac{1}{ik}\frac{\partial E_\varphi}{\partial r} - \frac{E_r}{ikr\sin\theta}. \qquad (1.4)$$

Для поперечных компонент получаем систему уравнений

$$\gamma\frac{\partial u}{\partial\theta} + \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\theta\gamma_0 u = iLu + F, \qquad (1.5)$$

в которой

$$u^{\text{т}} = (H_\varphi, E_r, E_\varphi, H_r), \quad F^{\text{т}} = \left(\frac{i}{k}\frac{\partial}{\partial r}\frac{f}{\varepsilon}, 0, -f, \frac{if}{kr\sin\theta}\right),$$

$$\gamma = \frac{1}{r}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = -\gamma^{\text{т}}, \quad \gamma_0 = \frac{1}{r}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \gamma_0^{\text{т}},$$

$$L =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{k}\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial r} + k, & 0, & 0, & -\frac{1}{k\sin\theta}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r\varepsilon}\cdot\right) \\ 0, & -k\varepsilon + \frac{1}{kr^2\sin^2\theta}, & \frac{1}{kr\sin\theta}\frac{\partial}{\partial r}, & 0 \\ 0, & -\frac{1}{k\sin\theta}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\cdot\right), & -\frac{1}{k}\frac{\partial^2}{\partial r^2} - k\varepsilon, & 0 \\ \frac{1}{kr\varepsilon\sin\theta}\frac{\partial}{\partial r}, & 0, & 0, & k - \frac{1}{kr^2\varepsilon\sin^2\theta} \end{bmatrix}$$

На стенках волновода u удовлетворяет условиям

$$\begin{pmatrix} E_\theta \\ E_\varphi \end{pmatrix} = \mp\delta_{1,2}(\theta)\begin{pmatrix} H_\varphi \\ -H_\theta \end{pmatrix}, \quad r = a, b, \qquad (1.6)$$

где E_θ и H_θ определяются выражениями (1.4).

2. ПОПЕРЕЧНЫЙ ОПЕРАТОР

1. Рассмотрим задачу на собственные значения для поперечного оператора

$$L\Psi_n = \lambda_n(\theta)\gamma\Psi_n(r,\theta), \quad \begin{pmatrix} E_\theta^n \\ E_\varphi^n \end{pmatrix} = \mp\delta_{1,2}\begin{pmatrix} H_\varphi^n \\ -H_\theta^n \end{pmatrix}, \quad r = a, b, \qquad (2.1)$$

где

$$\Psi_n^{\text{тт}} = (H_\varphi^n, E_r^n, E_\varphi^n, H_r^n),$$

$$E_\theta^n = \frac{1}{ik\varepsilon}\frac{\partial H_\varphi^n}{\partial r} - \frac{H_r^n}{ikr\varepsilon\sin\theta}, \quad H_\theta^n = -\frac{1}{ik}\frac{\partial E_\varphi^n}{\partial r} - \frac{E_r^n}{ikr\sin\theta}. \qquad (2.2)$$

Легко видеть, что вместе с λ_n собственным значением будет

$$\lambda_{-n} = -\lambda_n, \qquad (2.3)$$

которому отвечает собственная функция

$$\Psi_{-n}^{\text{т}} = c\,(H_\varphi^n, -E_r^n, -E_\varphi^n, H_r^n),$$

$$E_\theta^{-n} = cE_\theta^n, \quad H_\theta^{-n} = -cH_\theta^n, \quad \frac{\partial c}{\partial r} \equiv 0. \tag{2.4}$$

Собственные значения λ_n нумеруем так, чтобы в волноводе с потерями $\operatorname{Im}\lambda_n>0$ при $n\geqslant 1$ и $\operatorname{Im}\lambda_n<0$ при $n\leqslant -1$.

Введем в рассмотрение псевдоскалярное произведение

$$[\Psi,\Phi] \equiv \int_a^b \sum_{p=1}^{4} \Psi_p \Phi_p dr.$$

Интегрированием по частям можно показать, что

$$[L\Psi_n, \Psi_m] = [\Psi_n, L\Psi_m].$$

Отсюда следует соотношение ортогональности

$$(\lambda_n + \lambda_m)[\gamma\Psi_n, \Psi_m] = 0,$$

которое, учитывая (2.3), запишем так:

$$[\gamma\Psi_n, \Psi_m] = N_n \delta_{n,-m}, \quad N_n = [\gamma\Psi_n, \Psi_{-n}] = -N_{-n}, \tag{2.5}$$

где N_n — нормирующий множитель.

2. Из двух уравнений системы (2.1) находим

$$E_r^n = \frac{r\sin\theta}{k^2 r^2 \varepsilon \sin^2\theta - 1}\left[\frac{\partial E_\varphi^n}{\partial r} - \lambda_n k \sin\theta\, H_\varphi^n\right],$$

$$H_r^n = -\frac{r\sin\theta}{k^2 r^2 \varepsilon \sin^2\theta - 1}\left[\frac{\partial H_\varphi^n}{\partial r} - \lambda_n k\varepsilon \sin\theta\, E_\varphi^n\right]. \tag{2.6}$$

Используя эти выражения в оставшихся уравнениях (2.1) и граничных условиях (1.6), получаем задачу на собственные значения для H_φ^n и E_φ^n, которую будем называть (H, E)-задачей. Можно показать, что решения этой задачи разбиваются на два класса, которые определяются следующим образом.

Пусть U_n — решение задачи на собственные значения:

$$\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial U_n}{\partial r} + \left(k^2 - \frac{\mu_n^2}{r^2\varepsilon}\right)U_n = 0, \quad \frac{\partial U_n}{\partial r} = \mp ik\varepsilon\delta_{1,2}U_n, \quad r = a, b. \tag{2.7}$$

Тогда решения первого класса (H, E)-задачи и соответствующие ему компоненты нормальных волн имеют вид

$$\lambda_n^2 = \mu_n^2 - \sin^{-2}\theta, \quad H_\varphi^n = U_n, \quad H_r^n = 0,$$

$$H_\theta^n = (i\lambda_n \sin\theta)^{-1} U_n, \tag{2.8}$$

$$E_\varphi^n = \frac{1}{\lambda_n k\varepsilon\sin\theta}\frac{\partial U_n}{\partial r}, \quad E_r^n = -\frac{\mu_n^2}{\lambda_n k r\varepsilon}U_n, \quad E_\theta^n = \frac{1}{ik\varepsilon}\frac{\partial U_n}{\partial r}.$$

Очевидно, это ТМ-волны. Величины этого класса будем иногда снабжать индексом «H», например Ψ_n^H. Считаем, что

$$\mu_{-n} = -\mu_n, \quad U_{-n} = U_n. \tag{2.9}$$

Поэтому в (2.4) $c^H = 1$. Из (2.5), (2.8) и (2.9) следует

$$N_n^H = \frac{2\mu_n^2}{\lambda_n} \int\limits_a^b \frac{U_n^2}{kr^2 \varepsilon} dr. \tag{2.10}$$

Второй класс решений (H, E)-задачи строится с помощью следующей задачи на собственные значения:

$$\frac{\partial^2 V_n}{\partial r^2} + \left(k^2 \varepsilon - \frac{\mu_n^2}{r^2}\right) V_n = 0, \quad \frac{\partial V_n}{\partial r} = \mp \frac{ik}{\delta_{1,2}} V_n, \quad r = a, b,$$
$$\mu_{-n} = -\mu_n, \quad V_{-n} = V_n. \tag{2.11}$$

В этом случае

$$\lambda_n^2 = \mu_n^2 - \sin^{-2}\theta,$$

$$E_\varphi^n = V_n, \quad E_r^n = 0, \quad E_\theta^n = -(i\lambda_n \sin\theta)^{-1} V_n, \tag{2.12}$$

$$H_\varphi^n = \frac{1}{\lambda_n k \sin\theta} \frac{\partial V_n}{\partial r}, \quad H_r^n = \frac{\mu_n^2}{\lambda_n kr} V_n, \quad H_\theta^n = -\frac{1}{ik} \frac{\partial V_n}{\partial r}.$$

Таким образом, это ТЕ-волны, которые будем отмечать индексом «E». Очевидно, в (2.4) $c^E = -1$ и

$$N_n^E = -\frac{2\mu_n^2}{\lambda_n} \int\limits_a^b \frac{V_n^2}{kr^2} dr. \tag{2.13}$$

Используя тождество

$$\mu_n^2 \int\limits_a^b \frac{U_n}{r^2 \varepsilon} \frac{\partial V_m}{\partial r} dr + \mu_m^2 \int\limits_a^b \frac{V_m}{r^2 \varepsilon} \frac{\partial U_n}{\partial r} = 0, \tag{2.14}$$

которое проверяется с помощью (2.7) и (2.11), можно показать, что $[\gamma\Psi_n^H, \Psi_m^E] = 0$, т. е. ТМ- и ТЕ-волны ортогональны.

3. ВОЛНОВОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ

1. В дальнейшем предполагаем, что поперечный оператор (2.1) имеет простой спектр. Это эквивалентно тому, что спектры задач (2.7) и (2.11) просты и, кроме того, $\lambda_n^H(\theta) \neq \lambda_m^E(\theta)$ при всех n и m.

Решение задачи (1.5), (1.6) ищем в виде

$$u(r, \theta) = \sum_{m=-\infty}^{\infty}{}' \frac{a_m(\theta)\Psi_m(r, \theta)}{\sqrt{N_m(\theta)}},$$

где по определению

$$a_m = (\sqrt{N_m})^{-1} [\gamma u, \Psi_{-m}].$$

Умножив (1.5) на $(\sqrt{N_n})^{-1}\Psi_{-n}$ и проинтегрировав по r от a до b, после очевидных преобразований получим для коэффициентов разложения $a_n(\theta)$ систему волноводных уравнений

$$\frac{da}{d\theta} + \frac{1}{2} \operatorname{ctg}\theta \mathrm{R}(\theta) a = i\Lambda(\theta) a + \mathrm{S}(\theta) a + j(\theta). \tag{3.1}$$

Здесь $\boldsymbol{a}$ — бесконечномерный вектор-столбец с компонентами a_n, $\Lambda(\theta)$ — диагональная матрица с элементами $\lambda_n(\theta)$. Матрицы коэффициентов связи волн $R(\theta)$ и $S(\theta)$ определены следующим образом:

$$R_{nm}=\frac{1}{\sqrt{N_n}\sqrt{N_m}}\,[\gamma_0\Psi_m,\Psi_{-n}];\qquad(3.2)$$

$$S_{nm}=\frac{1}{\sqrt{N_n}\sqrt{N_m}}\left\{\frac{1}{2}\frac{dN_n}{d\theta}\,\delta_{nm}-\left[\gamma\frac{\partial\Psi_m}{\partial\theta},\Psi_{-n}\right]\right\}.\qquad(3.3)$$

Компоненты вектора $\boldsymbol{j}(\theta)$ имеют вид

$$j_n=(\sqrt{N_n})^{-1}\,[F,\Psi_{-n}].$$

2. Рассмотрим коэффициенты связи волн. При $c=\pm1$ в (2.4) из (2.5) следует

$$\left[\gamma\frac{\partial\Psi_n}{\partial\theta},\Psi_{-n}\right]=\left[\gamma\Psi_n,\frac{\partial\Psi_{-n}}{\partial\theta}\right]=\frac{1}{2}\frac{dN_n}{d\theta},$$

поэтому $S_{nn}=0$.

Пусть

$$\alpha_n=\frac{\sqrt{N_n}}{\sqrt{N_{-n}}}=\frac{\sqrt{\lambda_{-n}}}{\sqrt{\lambda_n}},\quad \alpha_{-n}=-\alpha_n,\quad \alpha_n^2=-1.\qquad(3.4)$$

При $n\neq m$ из (2.5) находим

$$\left[\gamma\frac{\partial\Psi_m}{\partial\theta},\Psi_{-n}\right]=\left[\gamma\frac{\partial\Psi_{-n}}{\partial\theta},\Psi_m\right].$$

Используя в (3.3) то соотношение и определение (3.4), получаем

$$S_{-m,-n}=\alpha_n\alpha_m S_{nm}.\qquad(3.5)$$

Найдем для S_{nm} выражение, не содержащее $\partial\Psi_m/\partial\theta$. Для этого задачу (2.1) продифференцируем по θ, умножим на Ψ_{-m} и проинтегрируем по r от a до b. Интегрируя по частям, приходим к следующему представлению:

$$S_{mn}(\theta)=P_{mn}(\theta)+T_{mn}(\theta),\quad n\neq m,$$

$$P_{mn}=\frac{i\operatorname{ctg}\theta}{\sin\theta(\lambda_m-\lambda_n)\sqrt{N_m}\sqrt{N_n}}\int\limits_a^b(H_\theta^nE_r^{-m}-H_r^nE_\theta^{-m}+E_r^nH_\theta^{-m}-E_\theta^nH_r^{-m})\frac{dr}{r};\qquad(3.6)$$

$$T_{mn}=\frac{1}{(\lambda_m-\lambda_n)\sqrt{N_m}\sqrt{N_n}}\left\{-k\int\limits_a^b\frac{\partial\varepsilon}{\partial\theta}(E_n,E_{-m})\,dr+i\frac{d\delta_2}{d\theta}(H_\theta^nH_\theta^{-m}+H_\varphi^nH_\varphi^{-m})_{r=b}+i\frac{d\delta_1}{d\theta}(H_\theta^nH_\theta^{-m}+H_\varphi^nH_\varphi^{-m})_{r=a}\right\}.\qquad(3.7)$$

Здесь

$$E_n^{\mathrm{T}}=(E_r^n,E_\theta^n,E_\varphi^n).$$

Таким образом, матрица $\hat{S}$, элементы которой являются коэффициентами разложений

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\frac{\Psi_n}{\sqrt{N_n}} = -\sum_{m=-\infty}^{\infty}{}' S_{mn}\frac{\Psi_m}{\sqrt{N_m}},$$

состоит из двух слагаемых. Матрица $\hat{T}$ определяется зависимостью параметров волновода от θ. В регулярном волноводе $\hat{T}=0$. Матрица $\hat{P}\neq 0$ и в регулярном волноводе. Это связано с тем, что компоненты собственной функции Ψ_n имеют различную зависимость от θ.

Наличие матрицы $\hat{R}$ в волноводных уравнениях обусловлено сферичностью волновода. В плоском волноводе, параметры среды в котором зависят только от цилиндрических координат z и r, аналогичная задача о горизонтальном диполе сводится к системе волноводных уравнений вида (3.1) с $\hat{R}=0$.

Пусть $a=\begin{pmatrix} a^H \\ a^E \end{pmatrix}$. Тогда матрицы в (3.1) разбиваются на блоки, например,

$$\hat{R} = \begin{pmatrix} R^{HH} & R^{HE} \\ R^{EH} & R^{EE} \end{pmatrix}.$$

Используя в (3.2) и (3.6) выражения (2.8), (2.12), (2.10), (2.13), (3.4) и тождество (2.14), получаем

$$R_{nm}^{HH} = R_{nm}^{EE} = \alpha_n \delta_{n,-m},$$

$$P_{nm}^{HH} = P_{nm}^{EE} = -\frac{\alpha_n}{2\lambda_n^2 \sin^2\theta}\operatorname{ctg}\theta\,\delta_{n,-m},$$

$$\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\theta\, R_{nm}^{HE} = P_{nm}^{HE} = \frac{\operatorname{ctg}\theta\mu_n^2}{\sin\theta\,\lambda_n\lambda_m\sqrt{N_n}\sqrt{N_m}}\int_a^b \frac{U_n}{k^2r^2\varepsilon}\frac{\partial V_m}{\partial r}dr, \tag{3.8}$$

$$\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\theta\, R_{nm}^{EH} = P_{nm}^{EH} = -\frac{\operatorname{ctg}\theta\,\mu_n^2}{\sin\theta\,\lambda_n\lambda_m\sqrt{N_n}\sqrt{N_m}}\int_a^b \frac{V_n}{k^2r^2\varepsilon}\frac{\partial U_m}{\partial r}dr.$$

Видим, что блоки матриц $(1/2)\operatorname{ctg}\theta\hat{R}$ и $\hat{P}$, связывающие ТМ- и ТЕ-волны, взаимно сокращаются.

Из (3.7), (2.8) и (2.12) следует

$$T_{nm}^{HH} = -T_{mn}^{HH},\quad T_{nm}^{EE} = -T_{mn}^{EE},\quad T_{nm}^{HE} = T_{mn}^{EH}. \tag{3.9}$$

4. ПОЛЕ В ВОЛНОВОДЕ

Найдем приближенные выражения для амплитуд взаимодействующих нормальных волн в нерегулярном волноводе с медленно меняющимися достаточно гладкими параметрами, считая, что $ka\gg 1$. Ограничимся рассмотрением нормальных волн с номерами $1\leqslant|n|\leqslant M$, вносящих основной вклад в поле при $\theta\gg(ka)^{-1}$. Предполагаем, что затухание в волноводе достаточно велико, а точка наблюдения значительно удалена от антипода, т. е. выполняются неравенства

$$\left|\exp\left(i\int_0^\pi \mu_n(t)\,dt\right)\right| \ll 1,\quad \left|\exp\left(2i\int_\theta^\pi \mu_n(t)\,dt\right)\right| \ll 1,\quad 1\leqslant n\leqslant M. \tag{4.1}$$

Так как у мод первых номеров $\mu_n(\theta)=O(ka)$, то $\lambda_n(\theta)=O(ka)$ при

$$0<\theta_1\leqslant\theta\leqslant\pi-\theta_1, \quad (ka)^{-1}\ll\theta_1\ll1. \tag{4.2}$$

Из (3.7), (2.8) и (2.12) следует, что при данных θ коэффициенты связи T_{nm}^{HE} и T_{nm}^{EH} по порядку величины в ka раз меньше коэффициентов T_{nm}^{HH} и T_{nm}^{EE}. Поэтому пренебрегаем связью между ТМ- и ТЕ-волнами.

Таким образом, учитывая выражения (3.8), приходим к следующей упрощенной системе волноводных уравнений:

$$\begin{aligned}
&\frac{da_n}{d\theta}+\frac{\alpha_n}{2}\operatorname{ctg}\theta\,\frac{\mu_n^2}{\lambda_n^2}\,a_{-n}=i\lambda_n a_n+\sum_{m=-M}^{M}{}' T_{nm}a_m+j_n,\\
&\frac{da_{-n}}{d\theta}-\frac{\alpha_n}{2}\operatorname{ctg}\theta\,\frac{\mu_n^2}{\lambda_n^2}\,a_n=-i\lambda_n a_{-n}+\sum_{m=-M}^{M}{}' T_{-n,-m}a_{-m}+j_{-n},
\end{aligned} \tag{4.3}$$

описывающей распространение как ТМ-волн при $T_{nm}=T_{nm}^{HH}$, так и ТЕ-волн при $T_{nm}=T_{nm}^{EE}$.

Пусть

$$x_n(\theta)=\frac{1}{\mu_{0n}}\int_0^\theta\mu_n(t)\,dt,\quad \mu_{0n}=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\mu_n(t)\,dt.$$

Очевидно, что $x_n(0)=0$, $x_n(\pi)=\pi$.

Перейдем в (4.3) к новым неизвестным:

$$\begin{aligned}
&b_n=\sqrt{\lambda_n(\theta)}\,\sqrt{\mu_{0n}/\mu_n(\theta)}\,\left(a_n+\alpha_n a_{-n}\right)=b_{-n},\\
&c_n=\left(\sqrt{\lambda_n(\theta)}\right)^{-1}\sqrt{\mu_n(\theta)/\mu_{0n}}\,\left(a_n-\alpha_n a_{-n}\right)=c_{-n}.
\end{aligned} \tag{4.4}$$

Учитывая соотношения

$$\frac{d\lambda_n}{d\theta}=\frac{1}{\lambda_n\sin^2\theta}\operatorname{ctg}\theta+\frac{\mu_n}{\lambda_n}\frac{d\mu_n}{d\theta},$$

$$\alpha_n T_{-n,-m}=T_{nm}\alpha_m,$$

вытекающие из (2.8), (2.12) и (3.5), (3.9), для b_n и c_n получаем систему уравнений

$$\begin{aligned}
&\frac{db_n}{d\theta}+\frac{1}{2}\frac{\mu_n(\theta)}{\mu_{0n}}\operatorname{ctg}x_n(\theta)\,b_n=\frac{i\mu_n(\theta)}{\mu_{0n}}\left(\mu_{0n}^2-\frac{1}{\sin^2x_n(\theta)}\right)c_n+\\
&\quad+\beta_{1n}(\theta)\,b_n+\beta_{2n}(\theta)\,c_n+\sum_{m=-M}^{M}{}' T_{nm}(\theta)\,\gamma_{nm}(\theta)\,b_m+J_n(\theta_0)\times\\
&\quad\times\sqrt{\frac{\mu_{0n}}{\mu_n(\theta_0)}}\,\frac{\delta(\theta-\theta_0)}{(\sin\theta_0)^{3/2}},\\
&\frac{dc_n}{d\theta}-\frac{1}{2}\frac{\mu_n(\theta)}{\mu_{0n}}\operatorname{ctg}x_n(\theta)\,c_n=i\frac{\mu_n(\theta)}{\mu_{0n}}\,b_n-\beta_{1n}(\theta)\,c_n+
\end{aligned} \tag{4.5}$$

$$+\sum_{m=-M}^{M}{}' T_{nm}(\theta)\,\gamma_{mn}(\theta)\,\hat{c}_m - iJ_n(\theta_0)\sqrt{\frac{\mu_n(\theta_0)}{\mu_{0n}}}\frac{\delta(\theta-\theta_0)}{(\sin\theta_0)^{1/2}},$$

в которой

$$\beta_{1n}(\theta)=\frac{1}{2}\left(\frac{d}{d\theta}\ln\frac{\sin x_n(\theta)}{\sin\theta}+\frac{1}{\mu_n^2(\theta)\,(\mu_n^2(\theta)\sin^2\theta-1)}\frac{d\mu_n(\theta)}{d\theta}\right),$$

$$\beta_{2n}(\theta)=i\left(\frac{\mu_n(\theta)}{\mu_{0n}\sin^2 x_n(\theta)}-\frac{\mu_{0n}}{\mu_n(\theta)\sin^2\theta}\right),$$

$$\gamma_{nm}(\theta)=\sqrt{\frac{\lambda_n(\theta)\,\mu_m(\theta)\,\mu_{0n}}{\lambda_m(\theta)\,\mu_n(\theta)\,\mu_{0m}}}=\gamma_{mn}^{-1}(\theta),$$

$$J_n^H(\theta_0)=\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\frac{Ih_g}{\pi r_0\,\varepsilon(r_0,\theta_0)\sqrt{N_n(\theta_0)}\sqrt{\lambda_n(\theta_0)}}\frac{\partial U_n(r_0,\theta_0)}{\partial r},$$

$$J_n^E(\theta_0)=\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\frac{Ih_g}{i\pi r_0\sqrt{N_n(\theta_n)}\sqrt{\lambda_n(\theta_n)}}V_n(r_0,\theta_0).$$

Легко показать, что функция $\beta_{1n}(\theta)$ ограничена при $0\leqslant\theta\leqslant\pi$. Для ограниченности $\beta_{2n}(\theta)$ при $\theta=0,\pi$ необходимо, чтобы $\frac{d\mu_n(0)}{d\theta}=\frac{d\mu_n(\pi)}{d\theta}=0$. Эти равенства, а также

$$T_{nm}(0)=T_{nm}(\pi)=\beta_{1n}(0)=\beta_{1n}(\pi)=0, \tag{4.6}$$

следуют из условий (1 3).

Опуская в (4.5) слагаемые с T_{nm}, β_{1n}, β_{2n} и переходя от переменной θ к x_n, получим волноводные уравнения нулевого приближения:

$$\begin{aligned}
&\frac{db_n^{(0)}}{dx_n}+\frac{1}{2}\operatorname{ctg}x_n\,b_n^{(0)}=i\left(\mu_{0n}^2-\frac{1}{\sin^2 x_n}\right)c_n^{(0)}+J_n(0)\frac{\mu_n(0)}{\mu_{0n}}\times\\
&\qquad\times\frac{\delta(x_n-x_{n0})}{(\sin x_{n0})^{3/2}},\\
&\frac{dc_n^{(0)}}{dx_n}-\frac{1}{2}\operatorname{ctg}x_n\,c_n^{(0)}=ib_n^{(0)}-iJ_n(0)\frac{\mu_n(0)}{\mu_{0n}}\frac{\delta(x_n-x_{n0})}{(\sin x_{n0})^{1/2}},\qquad x_{n0}\to 0.
\end{aligned}\tag{4.7}$$

При написании выражений для источников учтено, что

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin x_n(\theta)}{\sin\theta}=\frac{\mu_n(0)}{\mu_{0n}}.$$

Построим матрицу-функцию Грина $G_n(x_n,x_{n0})$ системы (4.7), которая удовлетворяет матричному уравнению

$$\begin{aligned}
&\frac{dG_n}{dx_n}+\frac{1}{2}\operatorname{ctg}x_n\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}G_n=i\begin{pmatrix}0, & \mu_{0n}^2-\dfrac{1}{\sin^2 x_n}\\ 1 & 0\end{pmatrix}G_n+\\
&\qquad+\delta(x_n-x_{n0})\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}
\end{aligned}\tag{4.8}$$

и ограничена при $x_n=0, \pi$, $x_{0n}\neq 0, \pi$. Положим $\nu_n^2=\mu_{0n}^2+1/4$. Легко проверить, что решением однородного уравнения (4.8) является матрица

$$Y_n(x_n)=\sqrt{\sin x_n}\begin{pmatrix}\frac{1}{i}\frac{d}{dx_n}P^1_{\nu_n-1/2}(\cos x_n), & \frac{1}{i}\frac{d}{dx_n}P^1_{\nu_n-1/2}(\cos(\pi-x_n))\\ P^1_{\nu_n-1/2}(\cos x_n), & P^1_{\nu_n-1/2}(\cos(\pi-x_n))\end{pmatrix},$$

где $P^1_\nu(x)$ — функции Лежандра. Первый столбец матрицы $Y_n(x_n)$ ограничен при $x_n=0$, а второй — при $x_n=\pi$. Пусть

$$I_1=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\quad I_2=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Тогда очевидно, что

$$G_n(x_n(\theta), x_n(\theta_0))=\begin{cases}-Y_n(x_n(\theta))I_1Y_n^{-1}(x_n(\theta_0)), & \theta<\theta_0\\ Y_n(x_n(\theta))I_2Y_n^{-1}(x_n(\theta_0)), & \theta>\theta_0\end{cases}.$$

Используя явное выражение для G_n, можно показать, что решение системы (4.7) при $\theta_0\to 0$ имеет вид

$$\begin{pmatrix}b_n^{(0)}(x_n)\\ c_n^{(0)}(x_n)\end{pmatrix}=-J_n(0)\frac{\mu_n(0)}{\mu_{0n}}\frac{\pi\sqrt{\sin x_n}}{2\cos\pi\nu_n}\begin{pmatrix}\frac{d}{dx_n}P^1_{\nu_n-1/2}(\cos(\pi-x_n))\\ iP^1_{\nu_n-1/2}(\cos(\pi-x_n))\end{pmatrix}. \quad (4.9)$$

В регулярном волноводе $T\equiv 0$, $\mu_n(\theta)\equiv\mu_{0n}$, $x_n(\theta)\equiv\theta$. Поэтому из (4.9) и (4.4) получаем точное решение системы (3.1), соответствующей регулярному волноводу.

Решение системы (4.5) в первом приближении построим, подставив нулевое приближение (4.9) в неучтенные ранее слагаемые в уравнениях (4.5) и решив неоднородную систему с помощью $G_n(x_n(\theta), x_n(\theta'))$. В полученном выражении заменим функции Лежандра их асимптотиками, справедливыми при $|\nu_n|\gg 1$ на промежутке (4.2). Можно показать, учитывая равенства (4.6), что использование этих асимптотик на промежутке $0\leqslant\theta\leqslant\pi$ приводит к пренебрежимо малым погрешностям в интегралах. Далее, отбрасывая слагаемые, малые в силу условий (4.1), а также слагаемые, содержащие под интегралом быстро осциллирующие множители вида $\exp(i\int_0^{\theta'}(\mu_n+\mu_m)dt$, после ряда очевидных упрощений придем к следующему выражению для решения в первом приближении:

$$a_n(\theta)+\alpha_n a_{-n}(\theta)=-\exp\left(i\frac{\pi}{4}\right)\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\frac{\mu_n(\theta)}{\lambda_n(\theta)}}\left[\exp\left(i\int_0^\theta\mu_n\,dt\right)\times\right.$$

$$\times J_n(0)\mu_n(0)+\sum_{m=1}^{M}J_m(0)\mu_m(0)\int_0^\theta\exp\left(i\int_{\theta'}^{\theta}\mu_n\,dt\right)T_{nm}(\theta')\times$$

$$\left.\times\exp\left(i\int_0^{\theta'}\mu_m\,dt\right)d\theta'\right],$$

$$a_n(\theta)-\alpha_n a_{-n}(\theta)=\frac{\lambda_n(\theta)}{\mu_n(\theta)}[a_n(\theta)+\alpha_n a_{-n}(\theta)].$$

Это выражение учитывает только однократно перевозбужденные вперед волны, пришедшие по кратчайшему расстоянию от источника до точки наблюдения $\theta \gg 1/ka$.

Компоненты электромагнитного поля в волноводе определяются по формулам вида

$$\tilde{H}_\varphi(r, \theta, \varphi) \approx \frac{\cos\varphi}{r\sqrt{\sin\theta}} \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \left[\sum_{n=1}^{M} \frac{a_n^H(\theta) + \alpha_n a_{-n}^H(\theta)}{\sqrt{N_n(\theta)}} U_n(r, \theta) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{k \sin\theta} \sum_{n=1}^{M} \frac{a_n^E(\theta) - \alpha_n a_{-n}^E(\theta)}{\lambda_n(\theta)\sqrt{N_n(\theta)}} \frac{\partial V_n(r, \theta)}{\partial r} \right].$$

Таким образом, использование варианта метода поперечных сечений, предложенного в [5], позволяет, во-первых, прямым путем получить представление решения задачи о горизонтальном диполе в регулярном сферическом волноводе в виде нормальных волн, во-вторых, достаточно просто учесть перевозбуждение этих волн в нерегулярном волноводе, что, по-видимому, трудно сделать традиционными методами.

ЛИТЕРАТУРА

1. Wait J. R. Electromagnetic waves in Stratified Media. — N. Y., 1962.
2. Фок В. А. Проблемы дифракции и распространения электромагнитных волн. — М.: Сов. радио, 1970.
3. Марков Г. Т., Чаплин А. Ф. Возбуждение электромагнитных волн. — М. — Л.: Энергия, 1967.
4. Фельд Я. Н., Фельд С. Я. — Радиотехника и электроника, 1977, 22, № 9, с. 1829.
5. Авдеев А. Д. В кн.: Проблемы дифракции и распространения волн. — Л., 1983, вып. 19, с. 75.

Ленинградский государственный университет

Поступила в редакцию 26 декабря 1983 г.

HORIZONTAL ELECTRIC DIPOLE IN THE SPHERICAL IRREGULAR WAVEGUIDE

A. D. Avdeev

The fields of a horizontal electric dipol in the isotropic spherical irregular waveguide is obtained by cross-section method