

УДК 538 571 1

СПИРАЛЬНЫЕ ВОЛНЫ В АКТИВНЫХ СРЕДАХ

*В. И. Кринский, А. С. Михайлов, А. В. Панфилов,
Е. А. Ермакова, М. А. Цыганов*

Рассчитаны частоты вращения и радиус ядра спиральных волн как функции параметров активной среды для случая, когда ядро спиральной волны велико по сравнению с характерной диффузионной длиной-шириной фронта волны возбуждения. Обсуждаются методы расчета спиральных волн, вращающихся внутри канала кольцевой формы и вокруг отверстия в неограниченной активной среде. Анализируется зависимость характеристик спиральной волны от ее топологического заряда (числа рукавов спирали)

В последнее время большой интерес вызывает изучение явлений, происходящих в распределенных активных средах*. В таких средах могут возникать однородные и неоднородные колебания, возбуждаются бегущие без затухания импульсы и нелинейные волны или же образуются сложные стационарные диссипативные структуры [1-3]. Известно [4], что устройства передачи и обработки информации в живых организмах построены на активных средах, чем обеспечивается их большая функциональная гибкость и способность к быстрой перестройке. В то же время существующие сегодня микроэлектронные схемы для обработки информации представляют собой фактически элементы с жестко детерминированной программой. В литературе неоднократно отмечалось [5, 6], что использование процессов, протекающих в распределенных активных средах, могло бы значительно расширить элементную базу современной вычислительной техники. Открывается перспектива применения этих явлений для создания различных микроэлектронных устройств обработки информации, ячеек памяти и, в конечном счете, создания самоорганизующихся микроэлектронных схем [6]. С этой целью предложен целый ряд твердотельных реализаций активных сред на основе полупроводников и сегнетоэлектриков [7-11, 5].

Особым типом элементарных возбуждений в двумерных активных средах служат вращающиеся спиральные волны (рис. 1) [12]. Подобно вихрям в сверхпроводнике или в сверхтекучей жидкости, они обладают ненулевым топологическим зарядом и являются устойчивыми образованиями. Спиральные волны могут рождаться парами из разрывов фронта плоских волн возбуждения. Частота всех спиральных волн в среде одинакова и служит фундаментальной характеристикой активной среды.

При столкновении двух волн возбуждения в активной среде происходит их взаимное погашение. Благодаря этому наиболее быстрый периодический источник автоволн подавляет все более медленные источники. Спиральная волна является наиболее быстрым из автономных автоволновых источников — ее частота выше, чем у ведущего центра (автоволнового источника с нулевым топологическим зарядом). На рис. 1 показано, как спиральные волны подавляют ведущий центр в среде с химической реакцией Белоусова—Жаботинского.

* Активная распределенная среда состоит из связанных между собой автоколебательных, бистабильных или возбуждаемых (моностабильных) элементов.

Недавно открыты [13] устойчивые спиральные волны с несколькими рукавами, топологический заряд которых выше единицы.

Впервые теоретический анализ спиральных волн был предпринят в 1946 г. Винером и Розенблютом [14], предложившими «аксиоматическую» модель активной среды. Исследование спиральных волн в распределенных моделях активных сред, описываемых дифференциальными уравнениями с частными производными, было начато сравнительно недавно. Большинство работ посвящено процессам в квазигармонических активных автоколебательных средах, которые образованы по существу осцилляторами Ван дер Поля, связанными диффузией (см., например, [15, 16]). Между тем, для многих физических реализаций активных сред профиль волн возбуждения далек от гармонического; часто активные среды являются сильно релаксационными, т. е. характеризуются двумя сильно различающимися временными масштабами. В релаксационной среде фронт и спад импульса возбуждения очень крутые, тогда как в вершине импульса и в промежутке между импульсами изменения являются весьма плавными. В качественном отношении сильно релаксационные активные среды наиболее близки к аксиоматической модели (см. [17]). Для получения количественных предсказаний необходимо, однако, обратиться к изучению континуальных моделей активной среды, описываемых дифференциальными уравнениями в частных производных. В ряде предельных случаев рассмотрение циркуляции спиральных волн в однородной активной среде было произведено в [18, 19]. Численное моделирование спиральных волн в сильно релаксационных активных средах выполнено в [20, 21].

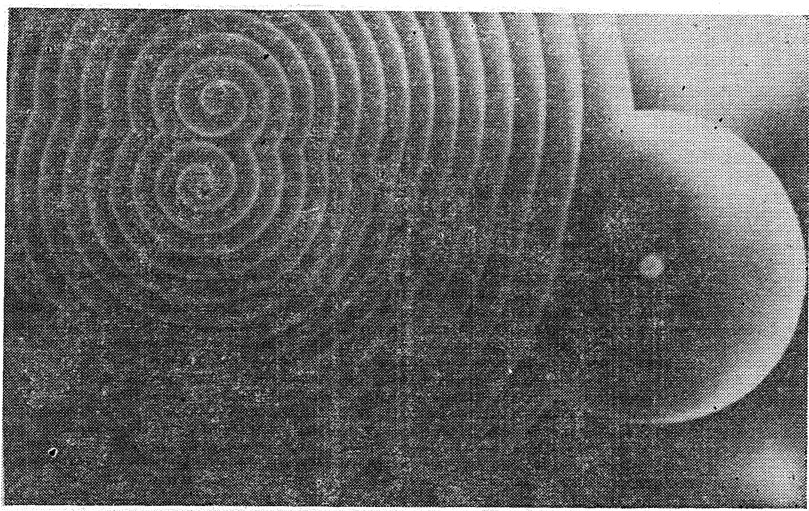


Рис. 1.

В настоящей работе построен метод теоретического расчета основных параметров спиральных волн с произвольным топологическим зарядом, предполагающий лишь знание закона дисперсии периодических плоских волн. С использованием этого метода вычислены частота вращения и другие характеристики спиральных волн для конкретной модели активной среды.

1. ЗАКОН ДИСПЕРСИИ АВТОВОЛН

Активные среды описываются уравнениями

$$\tau_u \dot{u} = f(u, v) + D_u \Delta u, \quad \tau_v \dot{v} = g(u, v) + D_v \Delta v, \quad (1)$$

одна из нуль-изоклин которых имеет S-образную форму (этим обеспечивается положительная обратная связь в системе). К таким уравнениям сводятся модели, предложенные в [5-11]. Эти уравнения справедливы также для разогретой электрическим полем или электромагнитным излучением газоразрядной и электрон-дырочной плазмы [22, 23] или среды с химической реакцией Белоусова—Жаботинского [3, 17]. Как правило, переменные u и v имеют смысл концентрации носителей заряда или химических реагентов, либо локальной температуры среды.

В зависимости от соотношения между коэффициентами диффузии D_u и D_v , а также между характерными временами τ_u и τ_v уравнения вида (1) могут содержать решения в виде покоящихся диссипативных структур (страт), однородных автоколебаний или пространственно-временных автоволновых режимов. Нами будет проанализирована ситуация, отвечающая сильно релаксационной активной среде, для которой $\tau_u \ll \tau_v$ и $D_u \gg D_v$. Хотя эти условия не являются обязательными для распространения автоволн [6], основная часть теоретических расчетов для плоских волн выполнена в настоящее время применительно именно к таким системам*.

Если обозначить малый параметр — отношение двух характерных времен — как $\varepsilon = \tau_u / \tau_v$, пренебречь диффузионным слагаемым во втором уравнении и положить коэффициент диффузии D_u равным единице, мы приходим к уравнениям

$$\dot{u} = f(u, v) + \Delta u, \quad \varepsilon^{-1} \dot{v} = g(u, v). \quad (2)$$

Будем предполагать, что изоклина $f(u, v) = 0$ имеет S-образную форму (рис. 2), а изоклина $g(u, v) = 0$ монотонна. Изоклины пересекаются в единственной точке, которая принадлежит устойчивой левой ветви S-образной изоклины и отвечает состоянию покоя среды, устойчивому по отношению к малым возмущениям (интенсивность которых ниже пороговой). Такая модель описывает ждущую активную среду, состоящую из возбудимых элементов.

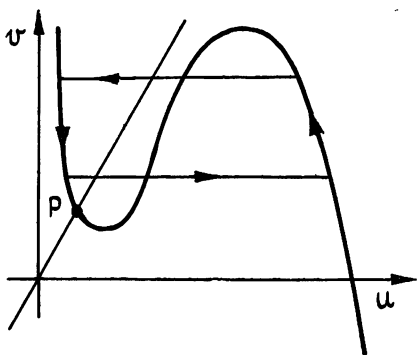


Рис. 2.

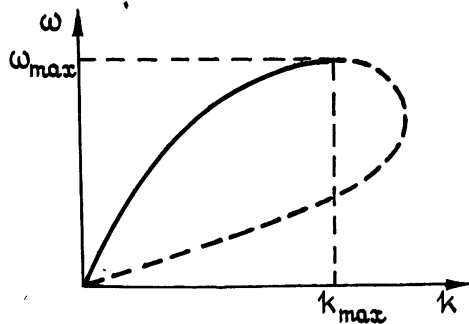


Рис. 3.

Рис. 2. Нуль-изоклины уравнений активной среды. Замкнутая фазовая траектория со стрелками отвечает решению в виде периодической последовательности импульсов

Периодической последовательности волн соответствуют одномерные решения вида

$$u = u(\xi), \quad v = v(\xi), \quad \xi = kx - \omega t. \quad (3)$$

* Исторически это объясняется тем, что указанные соотношения характерны для чрезвычайно важного частного случая распространения импульса возбуждения по нервному волокну и двумерным нейронным сетям [24].

Подставляя (3) в (2), мы приходим к уравнениям

$$-\omega u' = f(u, v) + k^2 u'', \quad -\omega \varepsilon^{-1} v' = g(u, v). \quad (4)$$

Требование 2π -периодичности решений по переменной ξ задает соотношение между ω и k , т. е. закон дисперсии автоволн $\omega = \Omega(k, \varepsilon)$. Заметим, что, поскольку волны нелинейны, указание волнового числа k определяет одновременно амплитуду волн и форму их профиля. В проекции на плоскость (u, v) периодической последовательности волн отвечает замкнутая фазовая траектория, изображенная на рис. 2.

На рис. 3 показан типичный вид (см. [1]) закона дисперсии плоских волн. Правая ветвь дисперсионной зависимости, описывающая медленные волны, соответствует неустойчивым режимам [25], она обозначена пунктиром*. Максимальная возможная частота следования импульсов имеет порядок $\omega_{\max} \sim \varepsilon^{1/2}$. При малых волновых числах k закон дисперсии линеен.

В дальнейшем нам придется использовать модифицированную форму закона дисперсии. Если зафиксировать в (4) отношение $v = \varepsilon/\omega$, а не параметр ε , мы можем получить закон дисперсии в виде $\omega = \Omega(k, v)$. Хорошей аппроксимацией такого закона дисперсии вплоть до k_{\max} служит [29] квадратичное выражение

$$\Omega(k, v) = ak - bk^2, \quad (5)$$

в котором a и b есть функции отношения $v = \varepsilon/\omega$.

2. СПИРАЛЬНЫЕ ВОЛНЫ В КОЛЬЦЕВОМ КАНАЛЕ

Вначале мы рассмотрим m -рукую спиральную волну, которая вращается внутри области кольцевой формы с внутренним радиусом R_1 и внешним радиусом R_2 . Стационарно вращающейся m -рукой волне соответствует решение уравнений (2) вида

$$u = u(m\varphi + \chi(r) - \omega t, r), \quad v = v(m\varphi + \chi(r) - \omega t, r), \quad (6)$$

где (φ, r) — полярные координаты на плоскости, а функция $\chi(r)$ определяет форму линии фронта спиральной волны; целое число m есть топологический заряд спиральной волны, $m = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$

Произведем переход к новой угловой переменной $\Phi = m\varphi + \chi(r)$ с неизвестной пока функцией $\chi(r)$, поставив своей целью выпрямить в новых координатах фронт спиралей. После такого преобразования уравнения (2) приобретают форму

$$\dot{u} = f(u, v) + Q \frac{\partial u}{\partial \Phi} + k^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \Phi^2} + J, \quad \varepsilon^{-1} \dot{v} = g(u, v), \quad (7)$$

где

$$Q = \frac{1}{r} \chi_r + \chi_{rr}, \quad k^2 = \chi_r^2 + \frac{m^2}{r^2}, \quad \chi_r = \frac{d\chi}{dr}, \quad (8)$$

$$J = \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + 2\chi_r \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \Phi}.$$

Функции u и v должны быть 2π -периодичны по углу Φ .

* Вообще говоря, область неустойчивости захватывает [25, 26] и малую окрестность $k = k_{\max}$ на левой ветви (быстрые волны). До настоящего времени, однако, отсутствуют аналитические расчеты положения границы устойчивости. Часто приближенно полагают, что устойчива вся левая ветвь дисперсионной зависимости вплоть до $k = k_{\max}$.

Основное приближение, используемое в настоящей работе, заключается в отбрасывании слагаемого J в уравнениях (7), величина отбрасываемых членов оценивалась в [29] (они малы при $k_{\max} \ll 1$).

Стационарно вращающимся спиральям отвечают решения вида $u = u(\Phi - \omega t)$, $v = v(\Phi - \omega t)$, которые удовлетворяют в рамках сделанного приближения уравнениям

$$-(\omega + Q) u' = f(u, v) + k^2 u'', \quad -\omega \varepsilon^{-1} v' = g(u, v). \quad (9)$$

Радиус r входит в эти уравнения лишь в качестве параметра. При каждом значении r они совпадают с уравнениями (4), описывающими распространение периодической последовательности плоских волн, с тем лишь отличием, что в первом из уравнений величина ω заменена на $\omega + Q$. Поэтому дисперсионное соотношение записывается в данном случае как

$$\omega + Q = \Omega(k, \nu). \quad (10)$$

В частности, для квадратичной аппроксимации закона дисперсии (5) мы получаем

$$\omega + \frac{1}{r} \chi_r + \chi_{rr} = a(\nu) \left(\chi_r^2 + \frac{m^2}{r^2} \right)^{1/2} - b(\nu) \left(\chi_r^2 + \frac{m^2}{r^2} \right). \quad (11)$$

Видно, что это есть дифференциальное уравнение первого порядка относительно производной от неизвестной функции $\chi(r)$, определяющей форму спирали*.

Уравнение (11) следует дополнить граничными условиями. Мы будем предполагать, что на границах выполняется условие непроницаемости (отсутствия диффузионного потока). Из него следует, что фронт волны должен быть ортогонален к границе. Для волны, вращающейся в кольцевом канале, это условие приобретает вид

$$\chi_r(R_1) = 0, \quad \chi_r(R_2) = 0. \quad (12)$$

На рис. 4 показано семейство фазовых траекторий уравнения (11), полученное путем численного расчета на ЭВМ. Граничным условиям (12) может удовлетворять одна из траекторий, возвращающихся после полуоборота к оси $\chi_r = 0$ на рис. 4. Заметим, что (11) есть дифференциальное уравнение первого порядка относительно χ_r , а поэтому задание величины χ_r

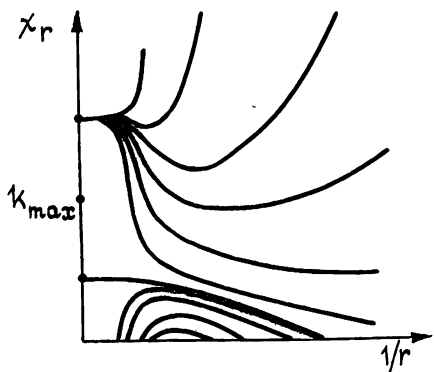


Рис. 4.

при $r = R_1$ уже полностью определяет всю фазовую траекторию. Совместное выполнение двух граничных условий (12) возможно лишь при определенном выборе частоты ω , входящей в качестве параметра в уравнение (11). Таким образом, частота вращения спиральной волны внутри кольцевого канала находится из решения нелинейной задачи на собственные значения для уравнения (11).

Если устремить радиус R_2 к бесконечности, получающееся решение будет описывать спиральную волну, вращающуюся в неограниченной

* Аналогичное уравнение было получено ранее в работе [27]. Оно использовалось в [27] для исследования асимптотической формы спирали вдали от центра вращения (частота вращения предполагалась при этом заданной)

среде вокруг отверстия радиуса R_1 . Такой волне отвечает единственная фазовая траектория уравнения (11), для которой $\chi_r \rightarrow \text{const}$ при $r \rightarrow \infty$, причем $\chi_r(\infty) < k_{\text{max}}$.

Заметим, что на больших удалениях от центра шаг спирали (т. е. пространственный период следования волн) равен $h = 2\pi/\chi_r$, поскольку он находится из условия

$$\chi(r+h) - \chi(r) = 2\pi. \quad (13)$$

Мы видим, что для спиральной волны, вращающейся вокруг отверстия, шаг спирали вдали от центра вращения постоянен, т. е. спираль имеет архимедову форму.

Из рис. 4 следует, что уравнение (11) содержит также решения, для которых $\chi_r \rightarrow \text{const}$ при $r \rightarrow \infty$, но $\chi_r(\infty) > k_{\text{max}}$. Эти решения неустойчивы, поскольку на больших удалениях от центра вращения они дают последовательность волн с волновым числом, превышающим k_{max} (ср. рис. 3).

3. УЕДИНЕННАЯ СПИРАЛЬНАЯ ВОЛНА В ОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

Результаты численного интегрирования на ЭВМ полных зависящих от времени уравнений активной среды показывают [21], что если уменьшать размер отверстия, вокруг которого вращается спиральная волна, то частота вращения ω возрастает, пока не будет достигнуто определенное значение радиуса отверстия $R = R_0$. После этого всякая существенная зависимость ω от R теряется. Обычно считают, что критический радиус R_0 дает размер собственного ядра спиральной волны в среде. Эти результаты свидетельствуют, что, по крайней мере для релаксационных активных сред, спиральные волны не чувствительны к тому, что происходит вблизи их центра, т. е. внутри ядра спиральной волны*. Таким образом, стационарно вращающаяся спиральная волна в однородной среде ведет себя так, как если бы в ее центре было расположено отверстие некоторого радиуса R_0 . Внешняя область ($r > R_0$) характеризуется самоподдерживающимся распространением волн, тогда как внутри ядра имеет место лишь вынужденное декрементное поведение.

Основываясь на этих замечаниях, мы полагаем, что частоту вращения спиральной волны в однородной среде следует рассчитывать как частоту волны, вращающейся вокруг некоторого эффективного отверстия в среде, т. е. путем наложения граничного условия $\chi_r(R_0) = 0$.

Радиус R_0 ядра спиральной волны может быть определен, исходя из исследования устойчивости. Вернемся для этого к уравнениям (7). Если пренебречь членами J в этих уравнениях, они описывают независимое распространение импульсов по системе окружностей, отвечающих различным значениям радиуса r . Уравнение (11) отражает тот факт, что частота вращения ω должна быть одинаковой для всех окружностей, если мы хотим построить решения для стационарно вращающихся спиралей. Следовательно, (11) представляет собой уравнение самосогласования. Подлинное взаимодействие между окружностями, описываемое членами J , в этом приближении не учитывается.

Устойчивость получаемого решения предполагает, в частности, что устойчивой должна быть циркуляция импульса по каждой независимо взятой окружности. Заметим, что при $Q = 0$ распространение импульса по окружности описывается фактически уравнениями для периодической последовательности плоских волн с пространственным периодом

* В работе [21] сообщалось об интересном численном эксперименте. Оказывается, что путем приложения внешнего возбуждения можно «поджечь» область ядра из центра и наблюдать распространяющийся по ядру наружу круговой фронт.

$L=2\pi/k$ и законом дисперсии $\omega=\Omega(k, \epsilon)$. Присутствие в (7) члена $Q(\partial u/\partial \Phi)$ модифицирует распространение и приводит к изменению закона дисперсии. Новый закон дисперсии $\omega=\Omega_Q(k, \epsilon)$ может быть получен, согласно (9), из решения уравнения (10). (Подчеркнем, что теперь мы рассматриваем отдельно взятую окружность, а поэтому (10) дает зависимость ω от k и ϵ при фиксированном Q).

Типичное семейство функций $\omega=\Omega_Q(k, \epsilon)$ для различных значений Q показано на рис. 5а. При каждом Q зависимости ω от k и k от ω двужначны, так что два периодических решения с различными k могут иметь одну и ту же частоту ω , а для каждого возможного значения k имеется два периодических решения с различной частотой ω . Следует ожидать, что устойчивому распространению импульса отвечает лишь определенный участок дисперсионной кривой $\omega=\Omega_Q(k, \epsilon)$ при заданном Q .

Наши дальнейшие рассуждения основываются, вообще говоря, лишь на том, что при любом заданном значении Q существует определенный интервал устойчивости $k^{**}<k<k^*$. Однако для проведения конкретных вычислений необходимо знать явные выражения для границ устойчивости k^* и k^{**} . Их можно было бы определить, рассматривая временную эволюцию малых возмущений периодического решения. Возникающие на этом пути технические трудности весьма серьезны. В настоящее время аналитическое рассмотрение устойчивости периодического распространения последовательности импульсов не проведено даже для простейших релаксационных моделей.

На практике прямой анализ устойчивости часто подменяют следующими приближенными аргументами. Именно, предполагают, что в задаче об одномерном периодическом распространении импульсов ($Q=0$) устойчивы все быстрые волны (рис. 3). В качестве дискриминационного принципа используется, таким образом, требование взаимной однозначности между периодом T и скоростью c волн или, эквивалентно, между частотой ω и волновым числом k .

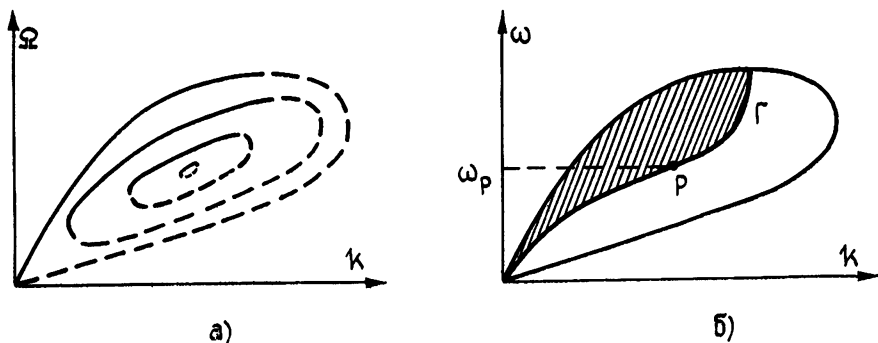


Рис. 5. а) Семейство функций $\omega=\Omega_Q(k, \epsilon)$ при различных значениях Q . Пунктиром показаны участки, отвечающие неустойчивым решениям. б) В заштрихованной области, отделяющейся линией Γ , решения для модифицированного распространения импульса по окружности являются устойчивыми

Если применить те же аргументы к дисперсионным кривым $\omega=\Omega_Q(k, \epsilon)$, показанным на рис. 5а, они ведут к заключению, что устойчивыми могут быть участки, изображенные сплошной линией на этом рисунке. Границы k^* и k^{**} таких участков определяются уравнениями

$$(\partial \Omega_Q(k, \epsilon)/\partial k)_Q = 0, \quad k = k^*; \quad (14a)$$

$$(\partial \Omega_Q(k, \epsilon)/\partial k)_Q = \infty, \quad k = k^{**}. \quad (14b)$$

Отметим, что при каждом Q уравнение (14а) имеет два решения. Мы выбираем в качестве k^* максимальное из них, поскольку другое решение соответствует точке на нижней неустойчивой ветви. Аналогично, для k^{**} мы выбираем наименьший из двух корней уравнения (14б), так как больший лежит на правом неустойчивом участке.

Можно показать, что определяемые равенствами (14) граничные значения k^* и k^{**} задают максимальный допустимый интервал устойчивости. Истинный интервал устойчивости, как свидетельствуют предварительные численные расчеты, близок к этим границам.

При изменении Q уравнения (14) дадут нам определенные линии на поверхности $\omega = \Omega_Q(k, \epsilon)$ в трехмерном пространстве (ω, k, Q) . Эти линии соединяются в точке P — «вершине» поверхности, соответствующей значению Q , при котором дисперсионная кривая $\omega = \Omega_Q(k, \epsilon)$ стягивается в точку (см. рис. 5а) Проектируя эти линии на плоскость (ω, k) , мы приходим к рис. 5б.

Дифференцируя по k при фиксированном Q равенство (10), дающее закон дисперсии $\omega = \Omega_Q(k, \epsilon)$, мы получаем

$$\left(\frac{\partial \omega}{\partial k}\right)_Q = \frac{(\partial \Omega / \partial k)_v}{1 + (\epsilon / \omega^2) (\partial \Omega / \partial v)_k}, \quad (15)$$

где $\Omega(k, v)$ — закон дисперсии плоских волн. Поскольку производные $(\partial \Omega / \partial k)_v$ и $(\partial \Omega / \partial v)_k$ не обращаются в бесконечность, из выражения (15) следует, что равенства (14) имеют явный вид:

$$(\partial \Omega / \partial k)_v = 0, \quad k = k^*; \quad (16а)$$

$$1 + (\epsilon / \omega^2) (\partial \Omega / \partial v)_k = 0, \quad k = k^{**}. \quad (16б)$$

Для квадратичного закона дисперсии (5) это дает

$$k^* = a/2b; \quad (17а)$$

$$k^{**} = (a'/2b') + [(a'/2b')^2 + (\omega^2/\epsilon b')]^{1/2}, \quad (17б)$$

где $a' = da/dv$, $b' = db/dv$.

Выражения (17) определяют k^* и k^{**} как функции от ω . Соответствующие значения Q могут быть найдены путем подстановки k^* и k^{**} при заданном ω в равенство (10). Точка P задается условием $k^* = k^{**}$, ей отвечает некоторая частота ω_P . Выражение (17а) справедливо при $\omega > \omega_P$, а выражение (17б) — для $\omega < \omega_P$.

Спиральная волна, вращающаяся вокруг отверстия с радиусом R , соответствует решению уравнения (11) с граничными условиями $\chi_r(R) = 0$, $\lim_{r \rightarrow \infty} \chi_r = \text{const}$. Она является устойчивой, если при каждом $r \geq R$ точка (ω, k, Q) принадлежит устойчивому участку дисперсионной кривой $\omega = \Omega_Q(k, \epsilon)$, т. е. расположена внутри заштрихованной области на рис. 5б. С уменьшением радиуса r величина $k = (\chi_r^2 + m^2/r^2)^{1/2}$ возрастает, причем максимальное значение $k = |m|/R$ достигается на границе отверстия, где $\chi_r = 0$. Устойчивость спиральной волны будет обеспечена, если точка $(\omega, k = |m|/R)$ будет лежать левее линии устойчивости Γ на рис. 5б, т. е. если $R > |m| R_0(\omega)$, где $R_0(\omega) = (k^*)^{-1}$ и $R_0(\omega) = (k^{**})^{-1}$ при $\omega < \omega_P$.

При уменьшении радиуса отверстия R условие $R > |m| R_0(\omega)$ в конечном счете нарушится. Когда отверстие столь мало, либо вообще отсутствует, мы строим решение для спиральной волны, как если бы она вращалась вокруг эффективного («сделанного» ею самою) отверстия с радиусом $|m| R_0(\omega)$. Тем самым мы полагаем, что $|m| R_0(\omega)$ задает

собственный радиус ядра m -рукой спиральной волны при частоте вращения ω . Внутри ядра (при $r < |m|R_0$) осуществляются затухающие по направлению к центру вращения вынужденные осцилляции, обусловленные слабым диффузионным потоком из внешней области. Этот поток, описываемый членами J в уравнении (7), слаб при выполнении условия $k_{\max} \ll 1$, когда радиус ядра велик.

4. СПИРАЛЬНЫЕ ВОЛНЫ В МОДЕЛИ АКТИВНОЙ СРЕДЫ РИНЦЕЛЯ — КЕЛЛЕРА

В настоящем разделе мы применяем сформулированный выше метод для расчета основных параметров спиральных волн в простейшей модели активной среды, предложенной Ринцелем и Келлером [28]. Эта модель описывается двумя уравнениями

$$\dot{u} = -u + \bar{u}\theta(u - u_0) - v + \Delta u, \quad \epsilon^{-1}\dot{v} = g(u, v), \quad (18)$$

в которых функция Хевисайда $\theta(z)$ определена как $\theta(z) = 0$ при $z < 0$ и $\theta(z) = 1$ при $z \geq 0$.

Закон дисперсии плоских волн в модели Ринцеля—Келлера изучался в [29]. Максимальная частота одномерной последовательности волн дается в этой модели выражением

$$\omega_{\max} = \frac{\pi\epsilon}{\operatorname{arcth}(\sqrt{3\epsilon}/2q)}, \quad (19)$$

где $q = 1/2 - (u_0/\bar{u})$. Самоподдерживающееся распространение волн невозможно при $q < \sqrt{3\epsilon}/2$. Максимальное волновое число устойчивого распространения составляет

$$k_{\max} = \frac{\pi\sqrt{\epsilon/3}}{\operatorname{arcth}(\sqrt{3\epsilon}/2q)}. \quad (20)$$

Поскольку, как следует из (20), $k_{\max} < (2\pi q/3)$, мы имеем $k_{\max} \ll 1$ при $q \ll 1$.

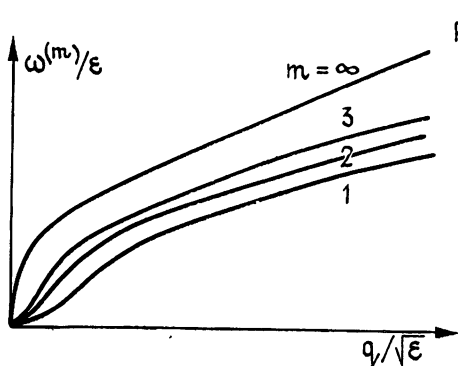


Рис. 6.

Рис. 6. Частоты спиральных волн $\omega^{(m)}$ как функции от комбинации параметров $q/\sqrt{\epsilon}$ для m -руких спиральных волн в модели Ринцеля—Келлера. Показана также зависимость от этой комбинации параметров максимальной частоты ω_{\max} следования импульсов ($m = \infty$)

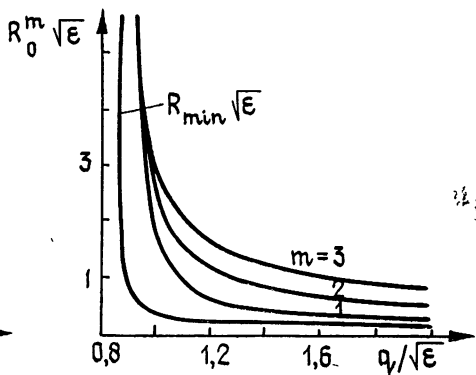


Рис. 7.

Рис. 7. Радиус ядра m -рукой спиральной волны ($m=1, 2, 3$) как функция от $q/\sqrt{\epsilon}$

При выполнении условия $q \ll 1$ закон дисперсии плоских волн $\omega = \Omega(k, v)$ вплоть до значения $k = k_{\max}$ хорошо аппроксимируется выражением

$$\omega = 4kq \operatorname{th} \pi v - 3vk^2. \quad (21)$$

На рис. 6—8 для модели Ринцеля—Келлера показаны зависимости основных характеристик спиральных волн от параметров среды, полученные путем численного решения задачи на собственные значения, сформулированной в предыдущем разделе*.

Как видно из рис. 6, при заданном значении параметра $q/\sqrt{\epsilon}$ и величине топологического заряда m имеется всего одно значение частоты уединенной спиральной волны. Частота $\omega^{(m)}$ растет с увеличением топологического заряда m и в пределе $m \rightarrow \infty$ стремится к значению ω_{\max} , дающему максимальную частоту устойчивого одномерного распространения импульсов**. Одномерное устойчивое распространение невозможно при $q/\sqrt{\epsilon} < \sqrt{3}/2$. В окрестности этой точки справедливо простое соотношение $\omega^{(m)} = m \omega^{(1)}$, где $\omega^{(1)}$ — частота однорукой спиральной волны.

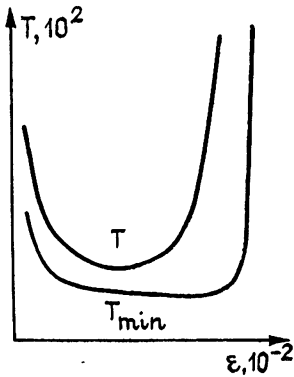


Рис. 8.

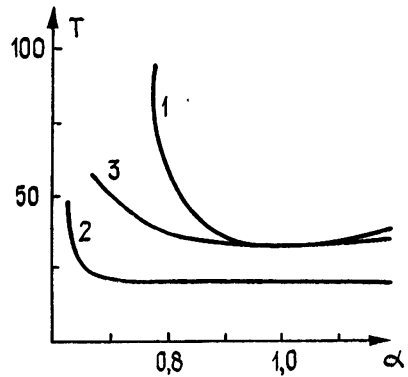


Рис. 9.

Рис. 8 Период однорукой спиральной волны T и максимальный период следования импульсов T_{\min} как функции от параметров релаксационности ϵ

На рис. 7 изображена рассчитанная зависимость радиуса $R^{(m)}$ ядра спиральной волны от параметра $q/\sqrt{\epsilon}$. Для сравнения там же показана величина $R_{\min} = 1/k_{\max}$, которая дает минимальный возможный радиус окружности с устойчивым одномерным поведением волн. При $q/\sqrt{\epsilon} \gg \sqrt{3}/2$ радиус ядра однорукой спиральной волны $R^{(1)}$ близок к R_{\min} , а с увеличением топологического заряда радиус ядра возрастает примерно как $R^{(m)} = mR^{(1)}$. В то же время, вблизи значения $q/\sqrt{\epsilon} = \sqrt{3}/2$, где теряется устойчивое одномерное проведение импульсов, радиус ядра практически не зависит от числа рукавов спиральной волны и значительно превышает R_{\min} .

Резкое возрастание размера ядра в этой области связано с тем, что здесь определяющим фактором, задающим режим циркуляции уединенной спиральной волны, служит кривизна ее фронта. Как отмечалось в [18], устойчивое самоподдерживающееся распространение одиночной волны возбуждения невозможно, когда кривизна ее фронта превышает некоторое критическое значение. При параметре $q/\sqrt{\epsilon}$, близ-

* Анализируя вид уравнения (11) для закона дисперсии (21), нетрудно заметить, что имеют место универсальные зависимости $\omega^{(m)}/\epsilon = F(q/\sqrt{\epsilon})$ и $R_0^{(m)}/\sqrt{\epsilon} = P(q/\sqrt{\epsilon})$ для частоты m -рукой спиральной волны и радиуса ее ядра.

** Подчеркнем, что согласно используемому нами определению в качестве временного периода m -рукой спиральной волны выбрано время $T^{(m)}$, через которое повторяется волновая картина. Отдельно взятый рукав спирали поворачивается за это время на угол $2\pi/m$.

ком к $\sqrt{3}/2$, ядро оказывается аномально большим, из-за того что волна возбуждения не может войти в область ядра, поскольку это потребовало бы превышения критической кривизны для ее фронта. В этом случае спираль является очень «рыхлой» (шаг спирали гораздо выше минимального возможного периода следования волн $L_{\min} = 2\pi/k_{\max}$). Поэтому внутрь ее всегда можно вставить еще один спиральный рукав, не повлияв на характер вращения прежних рукавов и на радиус ядра. Этим объясняется выполнение в данной области соотношения $R^{(m)} \approx R^{(1)}$.

Зависимость временного периода T однорукой спиральной волны от параметра релаксационности ϵ при $q=0,01$ приведена на рис. 8. Отметим характерный U -образный вид этой зависимости. Здесь же показана зависимость от параметра ϵ минимального периода T_{\min} устойчивого одномерного распространения последовательности импульсов, которая вплоть до недавнего времени являлась единственной аналитической оценкой для периода спиральной волны. Отметим, что в нормальном режиме (т. е. вдали от критического значения релаксационности $\epsilon_{\text{кр}} = 4q^2/3$) эта оценка дает правильный порядок величины периода, тогда как вблизи $\epsilon_{\text{кр}}$, где главную роль играет кривизна фронтов волн, мы имеем $T \gg T_{\min}$.

В работе исследована ситуация, когда параметры активной среды таковы, что минимальный пространственный период следования импульсов $L_{\min} = 2\pi/k_{\max}$ гораздо больше характерной диффузионной длины, принятой за единицу измерения расстояний. В этом случае частота вращения уединенных спиральных волн в однородной неограниченной среде может быть рассчитана в предположении, что спиральная волна вращается вокруг эффективного отверстия (ядра), радиус которого определяется соотношениями устойчивости. Внутри ядра спиральной волны имеют место лишь вынужденные колебания переменных u и v , обусловленные диффузионным потоком из наружной области. При движении от границы ядра к его центру эти колебания экспоненциально затухают на расстоянии порядка диффузионной длины (см. данные численного расчета в [20]). Поскольку, как мы показали, размер ядра всегда больше или порядка L_{\min} , это означает, что при $L_{\min} \gg 1$ в центре спиральной волны лежит большая невозбужденная область. Естественно поэтому, что характеристики вращения спиральной волны определяются при этом процессами на границе ядра и во внешней области. Вид решения внутри ядра может быть найден, «подшивая» решение во внутренней области к уже известному решению вне ядра.

Математические оценки, проведенные в работе [29], показали, что то же условие $L_{\min} \gg 1$ обеспечивает справедливость используемого нами приближения, заключающегося в отбрасывании членов J в уравнении (7) и переходе к уравнению (11). В рамках этого приближения для расчета параметров спиральных волн необходимо знать закон дисперсии одномерных периодических волновых решений и уметь определять границы их устойчивости.

Заметим, что ситуация является противоположной в квазигармонических моделях активной среды. Недавно в работе [30] были найдены частоты спиральных волн в среде, образованной связанными между собой осцилляторами Ван-дер-Поля. В этом случае сшивка решений во внутренней и внешней области имеет существенное значение, поскольку $L_{\min} \sim 1$. Подчеркнем, что в [30] получено целое семейство спирально-волновых решений, задаваемых непрерывным параметром α . Утверждалось, однако, что лишь одно из таких решений, для которого $\alpha = 0$, соответствует «реалистической» спиральной волне. Отбор этого

решения был произведен в [30], исходя из эвристических соображений (другие решения «плохо» ведут себя вблизи центра вращения и содержат перегибы). Мы полагаем, что фактически подобные эвристические соображения сводятся к требованию устойчивости, как это имеет место для релаксационных моделей. Следует ожидать, что все спирали с $\alpha \neq 0$ в [30] являются в действительности неустойчивыми. Именно это условие фиксирует частоту вращения реальных спиральных волн.

В Приложении мы сравниваем результаты приближенного расчета с данными полного численного моделирования для одной из релаксационных моделей активной среды.

Авторы глубоко благодарны И. М. Лифшицу за внимание к работе и стимулирующие обсуждения. Мы признательны В. С. Зыкову и А. М. Перцову за полезные дискуссии.

ПРИЛОЖЕНИЕ

В разд. 2 при выводе уравнения (11) мы использовали вспомогательный закон дисперсии $\omega = \Omega(k, v)$. К тому же уравнению, но записанному в иной форме, можно прийти от закона дисперсии $\omega = \Omega(k, \varepsilon)$. Для этого заметим, что (9) сводится к (4), если ввести переформированные величины

$$\tilde{\omega} = \omega + Q, \quad \tilde{\varepsilon} = \varepsilon (\tilde{\omega} / \omega). \quad (\text{П. 1})$$

Эквивалентом (10) в этом случае является уравнение

$$\omega + Q = \Omega(k, \tilde{\varepsilon}). \quad (\text{П. 2})$$

Для интегрирования полученного уравнения необходимо знать, таким образом, функциональную зависимость закона дисперсии плоских волн от параметра релаксационности ε . В определенных ситуациях, однако, отличим $\tilde{\varepsilon}$ от ε в (П. 2) можно пренебречь (см. ниже). Тогда (П. 2) приобретает форму

$$\omega + (1/r) \chi_r + \chi_{rr} = \Omega((\chi_r^2 + 1/r^2)^2, \varepsilon), \quad (\text{П. 3})$$

а радиус ядра совпадает с $R_{\min} = L_{\min} / 2\pi$. Частота однорукой спиральной волны находится при этом из решения задачи на собственные значения для уравнения (П. 3) с граничными условиями

$$\chi_r(R_{\min}) = 0, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \chi_r = \text{const} < R_{\min}^{-1}. \quad (\text{П. 4})$$

Для проверки применимости предлагаемого в работе приближенного метода расчета уединенных спиральных волн мы воспользовались моделью активной среды (2), в которой функции $f(u, v)$ и $g(u, v)$ выбраны в виде

$$f(u, v) = f(u) - v, \quad g(u, v) = u - v, \quad (\text{П. 5})$$

$$f(u) = \begin{cases} -3u, & u \leq u_1 \\ \alpha u - 0.12, & u_1 \leq u \leq u_2 \\ -30(u - 1), & u \geq u_2 \end{cases}$$

где значения параметров u_1 и u_2 определяются из условия непрерывности функции $f(u)$. Как и (18), модель (П. 5) использует кусочно-линейную аппроксимацию S-образной изоклины. Для ускорения численного расчета была введена зависимость коэффициента ε в уравнениях (2) от величины u : $\varepsilon = 0,5$ при $u \leq 0,001$ и $\varepsilon = 0,06$ при $u \geq 0,001$.

Введение такой зависимости позволяет, не меняя крутизны фронта и спада импульсов, значительно сократить время восстановления (т. е. время движения по левому устойчивому участку S -образной изоклины). Оно сохраняет свойство релаксационности рассматриваемой модели.

Численное решение уравнений (2) с функциями (П.5), описывающее процесс установления режима стационарной циркуляции однорукой спиральной волны, было произведено в [21], где найдена зависимость периода вращения устойчивой спиральной волны от параметра α в (П.5).

Мы рассчитали зависимость скорости с последовательности импульсов от пространственного периода их следования L для модели (П.5) путем численного интегрирования уравнений (2) с функциями (П.5). Интегрирование велось по неявной разностной схеме с переменным шагом по времени. Поскольку моделировался переходной процесс установления, одновременно была определена граница устойчивости, т. е. минимальный пространственный период L_{\min} устойчивого распространения импульсов. Зная зависимость $c=c(L, \varepsilon)$, нетрудно получить закон дисперсии $\omega=\Omega(k, \varepsilon)$, поскольку $L=2\pi/k$ и $\omega=c(2\pi/k, \varepsilon)k$. По известному закону дисперсии и величине L_{\min} мы вычислили, согласно (П.3) и (П.4), период вращения и частоту уединенной спиральной волны.

На рис. 9 показан период T однорукой спиральной волны в однородной среде как функция от параметра α в (П.5). Кривая 1 получена путем численного моделирования вращающейся спиральной волны в рамках полных зависящих от времени уравнений активной среды, она взята нами из работы [21]. Кривая 2 дает значения минимального периода T_{\min} устойчивого одномерного распространения волн. Заметим, что до последнего времени T_{\min} служил единственной имевшейся оценкой периода спиральной волны как функции от параметров активной среды. Наконец, кривая 3 получена путем применения метода расчета, предлагаемого в настоящей статье.

Видно, что при $\alpha > 0,9$ результаты предлагаемого приближенного метода расчета периода T хорошо согласуются с данными полного численного моделирования. Они значительно лучше согласуются с истинной величиной периода спиральной волны (кривая 1), чем грубая оценка этого периода как T_{\min} . Согласие нарушается лишь при меньших значениях α . В этой области перестает выполняться, однако, дополнительное приближение, сводящее уравнение (П.2) к (П.3). Период T резко возрастает, а поэтому частота ω становится очень малой

и величина ε сильно отличается от ε . Следует ожидать, что при учете перенормировки в уравнении (П.3) согласие с истинными значениями периода спиральной волны окажется хорошим и в этой области, где критическим фактором является кривизна фронта спиральной волны на границе ядра.

ЛИТЕРАТУРА

1. Скотт Э. Волны в активных и нелинейных средах в приложении к электронике. — М.: Наука, 1975.
2. Васильев В. А., Романовский Ю. М., Яхно В. Г. — УФН, 1979, 12, с. 625.
3. Николс Г., Пригожин И. Самоорганизация в неравновесных системах — М.: Мир, 1979.
4. Волькенштейн М. В. Биофизика. — М.: Наука, 1981.
5. Балкарей Ю. И., Никулин М. Г., Елинсон М. И. — В сб.: Автоволновые процессы в системах с диффузией. — Горький: ИПФ АН СССР, 1981, с. 117.
6. Кернер Б. С., Осипов В. В. — Микроэлектроника, 1981, 10, с. 407.
7. Балкарей Ю. И., Никулин М. Г., Елинсон М. И. — В сб.: Проблемы современной радиотехники и электроники. — М.: Наука, 1980, с. 431.

8. Балкарей Ю. И., Никулин М. Г. — ФТП, 1976, 10, с. 1455, 1978, 12, с. 347
9. Балкарей Ю. И., Захарова А. А., Елинсон М. И. — Микроэлектроника, 1981, 10, с. 260
10. Балкарей Ю. И., Сандомирский В. Б. — ФТП, 1979, 13, с. 1006; 1980, 14, с. 796.
11. Гуляев Ю. В., Балкарей Ю. И., Ржанов Ю. А., Голик Л. Л., Елинсон М. И. — ДАН СССР, 1981, 260, с. 82.
12. Ivanitsky G. R., Krinsky V. I., Zhabotinsky A. M. — Sov. Sci. Rev., 1981, 2, D, p. 280.
13. Agladze K. I., Krinsky V. I. — Nature, 1982, 296, p. 424 ДАН СССР, 1982, 263, p. 335.
14. Wiener N., Rosenblueth A. — Arch. Inst. Cardiol. Mech., 1946, 16, p. 205, Кибернетический сборник. — М.: ИЛ, 1961, вып. 3
15. Михайлов А. С., Упоров И. В. — ДАН СССР, 1979, 249, с. 733.
16. Зельдович Я. Б., Маломед Б. А. — ДАН СССР, 1980, 254, с. 92.
17. Кринский В. И., Жаботинский А. М. — В сб.: Автоволновые процессы в системах с диффузией — Горький. ИПФ АН СССР, 1981, с. 6
18. Зыков В. С. — Биофизика, 1980, 25, с. 888.
19. Михайлов А. С., Кринский В. И. — Биофизика, 1982, 27, с. 875
20. Kogan B. Ya., Zykov V. S., Petrov A. A. Computer simulations of stimulative media. In «Simulations of Systems» IMACS Congress preprints, Sorrento, 1979, p. 693.
21. Перцов А. М., Панфилов А. В. — В сб.: Автоволновые процессы в системах с диффузией. — Горький. ИПФ АН СССР, 1981, с. 77.
22. Недоспасов А. В., Хаит В. Д. Колебания и неустойчивости низкотемпературной плазмы. — М.: Наука, 1979.
23. Кернер Б. С., Осипов В. В. — ЖЭТФ, 1978, 74, с. 1675; 1980, 79, с. 2218.
24. Пастушенко В. Ф., Маркин В. С., Чизмаджев Ю. А. Основы теории возбужденных сред. В кн. Итоги науки и техники. — М.: ВИНТИ, 1977, вып. 2, 106 с.
25. Maginu K. — J. Math. Biol., 1978, 6, p. 49; 1980, 10, p. 133.
26. Кузнецов Ю. А. Препринт НИВЦ АН СССР, Пущино, 1982.
27. Greenberg S. M. — SIAM J. Appl. Math., 1976, 30, p. 199.
28. Rinzel J., Keller J. B. — Biophys. J., 1973, 13, p. 1313.
29. Mikhailov A. S., Krinsky V. I. — Physika, 1983, 9D, p. 346.
30. Hagan P. S. — SIAM J. Appl. Math., 1982, 42, p. 762.

Институт биологической физики
АН СССР

Поступила в редакцию
28 июля 1983 г.

SPIRAL WAVES IN ACTIVE MEDIA

V. I. Krinskij, A. S. Mikhajlov, A. V. Panfilov, E. A. Ermakova, A. M. Tsyganov

We calculate the rotation frequencies and radius of spiral waves core as a function of the excitable medium parameters. The calculation procedure is applicable when the core of spiral wave is large as compared with the characteristic diffusion length. Construction of spiral wave solutions for the waves inside ring channels, circular bounded regions, or around holes is discussed. The dependence of spiral wave characteristics on its topological charge is analysed.