

УДК 550.388

О ВОЛНОВОДНОМ РАСПРОСТРАНЕНИИ ВИСТЛЕРОВ В ДАКТАХ С ПОПЕРЕЧНО-МЕНЯЮЩИМСЯ МАГНИТНЫМ ПОЛЕМ

P. H. Кауфман

Рассматривается волноводное распространение вистлеров в аксиально-симметричных слабых дактах, ориентированных вдоль внешнего магнитного поля. Предполагается, что магнитное поле, а также плотность зависят от поперечной координаты, как это имеет место при самофокусировке. При этом учитывается возможность утечки волны из дакта, обусловленной трансформацией захватываемой ветви в незахватываемую. Показано, что если относительное изменение магнитного поля в дакте сравнимо с изменением плотности, то условия волноводного распространения и утечки коренным образом изменяются по сравнению с рассматривавшимся ранее случаем, когда магнитное поле постоянно.

1. В работах [1–3] изучалось волноводное распространение вистлеров в аксиально-симметричных дактах (каналах) с повышенной и с пониженной плотностью плазмы, ориентированных вдоль внешнего магнитного поля B . Такие дакты могут возникать в естественных условиях, например в магнитосфере [4], либо могут формироваться в результате самофокусировки. Свойства дактов в последнем случае и условия волноводного распространения вистлеров в них рассматривались в [5].

Было показано, что волноводное распространение в дактах с повышенной плотностью имеет место только при $\omega < \omega_c/2$ (ω_c — гирочастота электронов), при этом в связи с трансформацией захваченной волны в незахваченную ветвь [6] оно всегда сопровождается утечкой волны, а следовательно, и затуханием. Последнее обстоятельство, в частности, приводит к быстрому прекращению самофокусировки в режиме, когда образуются каналы с повышенной плотностью. Для дактов же с пониженной плотностью имеет место волноводное распространение без утечки во всем свистовом диапазоне: $\omega \geq \omega_c/2$.

Эти результаты были получены при условии, что изменением магнитного поля в дакте можно пренебречь, т. е. $B = \text{const}$. Однако при самофокусировке вистлеров возможен режим, когда относительное изменение магнитного поля в дакте сравнимо с относительным изменением плотности [5]. Исследование этого случая проводилось в [5] на основе параболического уравнения, которое не учитывает эффекта утечки, существенным образом влияющего на условия самофокусировки*.

Настоящая работа посвящена изучению волноводного распространения вистлеров в дактах, где магнитное поле, как и плотность, зависит от поперечной координаты. Как и в [1–3], рассмотрение проводится на основе уравнений Максвелла, что позволяет учесть явление

* Влияние поперечного градиента магнитного поля рассматривалось также в [7], где исследование проводилось численно для плоской геометрии и специальной модели дакта. Утечка, обсуждавшаяся в [7], имеет другой механизм, нежели изучаемый в настоящей работе, и представляет собой гораздо более слабый эффект.

утечки. В результате оказалось, что если относительное изменение магнитного поля в дакте сравнимо с изменением плотности, то условия волноводного распространения и утечки коренным образом изменяются по сравнению с дактами, где магнитное поле постоянно.

2. Введем цилиндрические координаты r , φ и z с осью z , параллельной внешнему магнитному полю на бесконечности. Предположим, что магнитное поле B и электронная плотность N зависят только от r . При этом $N(\infty) = N_0$, $B(\infty) = B_0$.

Обозначим плазменную частоту, соответствующую N_0 , через ω_p , а гирочастоту электронов, соответствующую B_0 , через ω_c , т. е. $\omega_p = \omega_p(\infty)$, $\omega_c = \omega_c(\infty)$. Введем также обозначения

$$\nu(r) = (N(r) - N_0)/N_0, \quad b(r) = (B(r) - B_0)/B_0; \quad (1)$$

$$u = \omega/\omega_c < 1, \quad \gamma = \omega_p/\omega_c \gg 1. \quad (2)$$

Предполагая, что выполняются условия применимости ВКБ приближения, запишем компоненты локального волнового вектора $\mathbf{k}(r)$ в виде

$$k_z = (\omega/c)p, \quad k_r = (\omega/c)q(r), \quad k_\varphi = 0. \quad (3)$$

Тогда при $b = 0$ из уравнений Максвелла следует [1-3]

$$q^2(r) = q_m^2(r) = (2u^2)^{-1} \{ (1 - 2u^2)p^2 - 2\gamma^2[1 + \nu(r)] + (-1)^m p [p^2 - 4\gamma^2(1 + \nu(r))]^{1/2} \}, \quad m = 1, 2. \quad (4)$$

Эта формула, определяющая две действительные ветви безразмерного поперечного волнового числа $q_1(r)$ и $q_2(r)$ для $u < 1/2$ и одну действительную ветвь $q_2(r)$ для $u > 1/2$, являлась исходной в работах [1-3].

Предположим теперь, что $b \neq 0$. Тогда из уравнения $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$ следует, что $b_r = b_\varphi = 0$, $b_z = b(r)$. Пусть $\nu(r)$ и $b(r)$ — монотонные функции от r , причем, согласно (1), $\nu(\infty) = b(\infty) = 0$.

Положим в выражении (4) $u = u(r) \equiv \omega/\omega_c(r)$, $\gamma = \gamma(r) \equiv \omega_p/\omega_c(r)$ (ср. с (2)) и будем считать, что

$$|\nu(r)| \ll 1, \quad |b(r)| \ll 1. \quad (5)$$

Тогда, используя соотношение $\omega_c(r) = eB(r)/cm_e$ и учитывая (1) и (5) с точностью до членов порядка b , получим из (4), что

$$q^2(r) = q_m^2(r) = (1 + 2b)(2u^2)^{-1} \{ (1 - 2u^2)p^2 + 4u^2p^2b - 2\gamma^2(1 + \nu - 2b) + (-1)^m p [p^2 - 4\gamma^2(1 + \nu - 2b)]^{1/2} \}, \quad m = 1, 2, \quad (6)$$

где параметры u и γ определены в (2).

Подобно (4), формула (6) является основной для задачи о волноводном распространении вистлеров в слабых дактах при слабо изменяющемся внешнем магнитном поле, параллельном оси дакта. Из нее, в частности, следует, что при $|b| \ll |\nu|$ условия волноводного распространения практически не отличаются от условий, полученных в [1-3] для $b = 0$. Изменение магнитного поля в дакте приводит к качественно новым результатам только при $b \sim \nu$.

Исследование формулы (6) показывает, что величина

$$\delta(r) = \nu(r) - 2b(r) \quad (7)$$

при условии ее монотонности играет в (6) ту же роль, что $\nu(r)$ в (4).

Далее, поскольку формула (6) получается из (4) заменой u на $u(r)$ (добавочное слагаемое $4u^2p^2b$ в (6) получается именно вследствие этой замены), то она определяет две действительные ветви $q_1(r)$ и $q_2(r)$ (или одну действительную ветвь $q_2(r)$), если одновременно для всех r $u(r) < 1/2$ (или $u(r) > 1/2$). Это приводит к появлению «сдвинутой» критической частоты

$$u' = 1/2 + b(0)/2, \quad (8)$$

так что (6) определяет две действительные ветви $q_1(r)$ и $q_2(r)$ для $u < 1/2$ при $b(r) > 0$ и для $u < u'$ при $b(r) < 0$ и одну действительную ветвь $q_2(r)$ для $u > 1/2$ при $b(r) < 0$ и для $u > u'$ при $b(r) > 0$.

Аналогично результатам [1-3] получаем также, что если $\delta(r) > 0$ и $u < 1/2$ при $b > 0$ или $u < u'$ при $b < 0$, то возможно волноводное распространение в дакте ветви q_1 , с утечкой волны, вызванной трансформацией $q_1 \rightarrow q_2$. При $\delta(r) < 0$ возможно волноводное распространение в дакте без утечки во всем свистовом диапазоне $0 < u < 1$.

Таким образом, мы видим, что наличие зависящего от r переменного магнитного поля приводит к новым эффектам: 1) возможности волноводного распространения вистлеров в дактах с повышенной плотностью ($v > 0, \delta < 0$) не только для $u < 1/2$, но и для $u > 1/2$, при этом утечка отсутствует во всем диапазоне частот; 2) возможности волноводного распространения вистлеров в дактах с пониженной плотностью ($v < 0, \delta > 0$, т. е. $b < 0$), сопровождающегося утечкой, для $u < u'$; 3) возможности волноводного распространения вистлеров в отсутствие дактов плотности ($v = 0$), когда волновод создается указанным выше изменением внешнего магнитного поля с эффективной вариацией «плотности»: $\delta = -2b$, при этом для $b(r) > 0$ распространение без утечки возможно при всех $0 < u < 1$, а при $b(r) < 0$ имеет место распространение с утечкой при $u < u'$.

3. Рассмотрим более подробно случай, важный в теории самофокусировки [5], когда выполняются условия вмороженности: $B/\bar{N} = B_0/N_0$, т. е.

$$b(r) = v(r) \quad (9a)$$

и (см. формулу (4.16) из [5])

$$v(r) < 0. \quad (9b)$$

Тогда, согласно (7), $\delta(r) = |b(r)| > 0$. Таким образом, как следует из вышеизложенного, при выполнении (9) волновод с пониженной плотностью ведет себя как волновод с повышенной плотностью при $b=0$.

Используем теперь подход, аналогичный применявшемуся в [1-3]. Введем обозначение

$$\alpha(r) = \gamma^2 [1 + \delta(r)], \quad (10)$$

где $\delta(r)$ определяется выражением (7). Из (6) следует, что при $b(r) \equiv 0$ точка поворота r_0 , в которой $q_1(r_0) = 0$, определяется уравнением $\alpha(r) = \alpha_0 \equiv p^2 u(1-u)$. Заменяя в нем u на $u(r)$, получим, что при $b(r) \neq 0$ точка поворота r_0 должна определяться уравнением

$$\alpha(r) = \alpha_0(r) \equiv p^2 u(r) [1 - u(r)]. \quad (11)$$

В рассматриваемом случае, когда $b(r) < 0$, $\alpha_0(r)$ есть монотонно убывающая функция, такая, что $\alpha_0(\infty) = p^2 u(1-u)$. Для того, чтобы, согласно (11), графики функций $\alpha(r)$ и $\alpha_0(r)$ пересекались, потребуем выполнения неравенств

$$\alpha(0) > \alpha_0(0), \quad \alpha_0(\infty) > \alpha(\infty). \quad (12)$$

Потребуем также, чтобы ветви $q_1(r)$ и $q_2(r)$ не сливались на действительной оси, т. е. согласно (6) и (10), должно быть: $p^2 > 4\alpha(0)$. Из указанных неравенств с учетом (11) с точностью до членов порядка b следует условие

$$\max \left[4\alpha(0), \frac{\alpha(\infty)}{u(1-u)} \right] < p^2 < \frac{\alpha(0)}{u(1-u)} \left[1 - \frac{1-2u}{1-u} |b(0)| \right]. \quad (13)$$

Графики $q_1(r)$ и $q_2(r)$ при этом имеют вид, изображенный на рис. 1, откуда следует, что условие (13) представляет собой условие волноводного распространения ветви $q_1(r)$.

Легко проверить, что неравенство (13) непротиворечиво, т. е. правая часть его больше левой, для $u < u'$ *. (Это означает также, что поменять ролями кривые $\alpha(r)$ и $\alpha_0(r)$, т. е. изменить неравенства (12) на противоположные, нельзя, ибо в этом случае для p^2 получились бы неравенства, не имеющие смысла.)

Дальнейшее рассмотрение особенностей волноводного распространения можно провести аналогично тому, как это сделано в [2].

Пусть

$$(1 - 2u^2)^2 \gg |b(0)|, \quad (14)$$

т. е., согласно (10), $4\alpha(0) < \alpha(\infty)/u(1-u)$. Положим

$$p = P + \Delta p, \quad P^2 = \alpha(\infty)/u(1-u), \quad (15)$$

где $p=P$ соответствует чисто продольному распространению на бесконечности, ибо при $p=P$ и $b(r)=v(r)=0$ из (6) следует, что при $u < u'$ $q_1=0$; Δp —малая добавка, вызванная малым изменением плотности и магнитного поля.

Ограничиваюсь членами первого порядка относительно b , получим из (13)

$$0 < 2\Delta p/P < u/(1-u) |b(0)|. \quad (16)$$

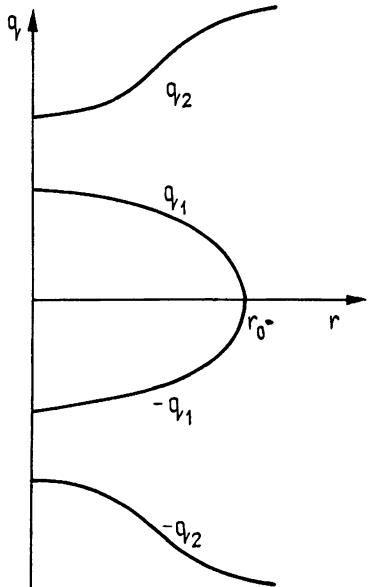


Рис. 1.

Используя (14) и разлагая выражение для q_1^2 из (6) по степеням $|b(0)|/(1-2u)^2$, находим, ограничиваясь членами первого порядка, что

$$q_1^2 = 2\gamma^2 \left[\frac{u}{1-u} |b(r)| - 2\Delta p/P \right] / u(1-2u), \quad (17)$$

причем $q_1^2 > 0$ в силу (16). Уравнение для собственных мод, определяющее дискретный спектр величины p , имеет вид [1]

$$\omega/c \int_0^{r_0} q_1(r, p, u) dr = \pi n, \quad (18)$$

где n — номер моды, r_0 — точка поворота.

* Более точно, оно имеет смысл для $u < 1/2 - |b(0)| < u'$. Неравенство $u < u'$ получается, если справа в (13) добавить слагаемое порядка b^2 : $(u/1-u)b^2(0)$.

Рассмотрим типичный профиль электронной концентрации, когда (см. (9))

$$v(r) = b(r) = -b_0 \operatorname{sech}^2(r/a), \quad b_0 > 0. \quad (19)$$

Подставим в (18) выражение для q_1 из (17), согласно которому $u|b(r_0)|/(1-u) = 2\Delta p/P$. Вычисляя получившийся интеграл для профиля (19), находим

$$\left(\frac{2\Delta p}{P} \right)_n^{1/2} = \left(\frac{u}{1-u} b_0 \right)^{1/2} - 2n \left(\frac{c}{\omega_p a} \right) \left(\frac{1-2u}{2u} \right)^{1/2}. \quad (20)$$

Хотя эта формула получена в рамках ВКБ приближения, т. е. при $n \gg 1$, она справедлива по порядку величины и при $n \sim 1$. Более того, уточнять ее для малых n не имеет смысла, так как множитель $c/\omega_p a$ известен только по порядку величины.

Полное число мод в дакте при условии (14) совпадает с n_{\max} , которое определяется условием положительности правой части в (20), т. е.

$$n_{\max} \sim \left(\frac{b_0}{2} \right)^{1/2} \frac{\omega_p a}{c} \frac{u}{(1-u)^{1/2}(1-2u)^{1/2}}. \quad (21)$$

Отсюда видно, что число мод уменьшается с уменьшением u , причем быстрее, чем для аналогичного волновода при отсутствии магнитного поля [2].

Рассмотрим случай, когда $4\alpha(0) > \alpha(\infty)u(1-u)$, т. е.

$$(1-2u)^2 < |b(0)|. \quad (22)$$

Теперь удобно положить

$$p = P + \Delta p, \quad P^2 = 4\alpha(0). \quad (23)$$

С учетом неравенств (13) получим, что

$$0 < (2\Delta p/P) < [(1-2u)^2 - |b(0)|]^2. \quad (24)$$

Рассматривая профиль (19), введем безразмерные параметры

$$\beta^2 = \frac{2\Delta p}{P(1-2u)^2}, \quad \sigma = \frac{b_0}{(1-2u)^2}, \quad \Delta = \frac{b_0}{1-2u}, \quad (25)$$

при этом, согласно (8), (22) и (24),

$$b_0^{1/2} < \Delta \leq 1, \quad 1 < \sigma \leq (1/b_0) \gg 1, \quad 0 < \beta < 1 - \Delta, \quad (26)$$

где знаки равенства имеют место при $u=u'$. Тогда для q_1 находим приближенное выражение

$$q_1 = \sqrt{2} P (1-2u)^{1/2} (1 - \Delta \operatorname{sech}^2(r/a) - \sqrt{\beta^2 + \sigma \operatorname{th}^2(r/a)})^{1/2}. \quad (27)$$

Подставим q_1 в уравнение для спектра (18) и используем в интеграле подстановку $x = [\beta^2 + \sigma \operatorname{th}^2 r/a]^{1/2}$. Рассмотрим частоты вблизи $u=u'$, когда $\sigma \gg 1$ (см. (26)), что представляет наибольший интерес. В этом случае уравнение для спектра имеет вид

$$WB(\beta, \Delta) = \pi n, \quad W = \sqrt{2} (\omega_p a / c) ((1-2u)^{3/2} / b_0^{1/2}), \quad (28)$$

где

$$B(\beta, \Delta) = (1/2) \int_{\beta}^{1-\Delta} [(x^2 - \beta^2) / ((1 - \Delta) - x)]^{1/2} dx, \quad 0 < \beta < 1 - \Delta, \quad (29)$$

Из (29) следует, что $B(\beta, \Delta)$ есть монотонно убывающая функция β , при этом $B(0) = (2/3)(1-\Delta)^{3/2}$, $B(1-\Delta) = 0^*$.

Подставив в уравнение для спектра (28) значение $B(0)$, мы получим полное число мод при фиксированном Δ , т. е. (см. (25)) при фиксированном u , равное

$$n_{\max} = \frac{2\sqrt{2}}{3\pi} b_0 \left(\frac{\omega_p a}{c} \right) \left(\frac{1-\Delta}{\Delta} \right)^{3/2}. \quad (30)$$

Отсюда видно, что при $u \rightarrow u'$, т. е. $\Delta \rightarrow 1$, $n_{\max} \rightarrow 0$. Разрешая уравнение (30) относительно u , находим значение частоты u_n^* , являющейся верхней гранью существования моды с номером $n = n_{\max}$:

$$u_n^* = u' - (b_0^{1/3}/4)[3\pi(c/\omega_p a)n]^{2/3}, \quad (31)$$

где u' определено в (8).

При $n=1$ выражение (31) дает наибольшую частоту $u^* = u_1$, при которой возможно волноводное распространение.

4. Утечка из дакта захваченной волны с $q=q_1$ приводит к ее затуханию вдоль оси z , как $\exp(-\mu z)$. Логарифмический декремент затухания μ равен [1]

$$\mu = \left[-4 \int_0^{r_0} (\partial q_1 / \partial p) dr \right]^{-1} T, \quad (32)$$

где T — коэффициент трансформации $q_1 \rightarrow q_2$, названной в [6] туннельной. Его общее выражение в аксиально-симметричном случае имеет вид [1]

$$T = \exp \left[-2(\omega/c) \operatorname{Im} \int_0^{r_1} (q_2 - q_1) dr \right], \quad (33)$$

где $r_1 = i\xi$ ($\xi > 0$) есть ближайшая к действительной оси точка в комплексной плоскости r , в которой сливаются ветви $q_1(r)$ и $q_2(r)$, т. е. $q_1(r_1) = q_2(r_1)$.

Для профиля (19), используя (6), находим

$$(\xi/a) = \operatorname{arctg} A, \quad A = \sqrt{p^2 - 4\alpha(0)/2\gamma b_0^{1/2}}, \quad (34)$$

где $\alpha(r)$ определено в (10) и (9).

Делая в интеграле из (33) подстановку $r/a = iy$ (используя при этом соотношение $\operatorname{th}(iy) = i \operatorname{tg} y$) и применяя к полученному интегралу теорему о среднем, получим для профиля (19) следующую оценку для T :

$$\exp [-(\omega_c a/c)(t_2 - t_1)A] < T < 1, \quad (35)$$

$$t_{1,2} = \{(1 - 4u^2)p^2 - 8u^2p^2b_0 + [p^2 - 4\alpha(0)] \mp 2p\sqrt{p^2 - 4\alpha(0)}\}^{1/2}.$$

Экспонента в (35) есть монотонно убывающая функция p . Подавая в ней $p = p_{\max}$ (см. (13)), для частот в окрестности u' можно написать оценку

$$T > \exp \left[- \left(\frac{\omega_p a}{c} \right) \frac{2^{3/2}(1+b_0)}{b_0^{1/2}} \frac{(u' - u)^{3/2}}{u(1-u)} \right], \quad (36)$$

откуда следует, что $T \rightarrow 1$ при $u \rightarrow u'$.

* Заметим, что $B(\beta, \Delta)$ можно выразить через неполные эллиптические интегралы.

Вычислим теперь предэкспоненциальный множитель в (32) для двух рассмотренных выше интервалов изменения u и профиля (19).

При условии (14), используя (17), находим

$$-\int_0^r \frac{\partial q_1}{\partial p} dr \approx \left(2 \frac{1-u}{1-2u}\right)^{1/2} \int_0^r \left[\frac{u}{1-u} |b(r)| - \frac{2\Delta p}{P} \right]^{-1/2} dr. \quad (37)$$

Вычисляя интеграл, получим

$$\mu \approx \frac{1}{2\pi a} \left(\frac{\Delta p}{P}\right)^{1/2} \left(\frac{1-2u}{1-u}\right)^{1/2} T. \quad (38)$$

Поскольку затухание волны вдоль оси z происходит, как $\exp(-\mu z)$, то мерой затухания естественно считать величину

$$M = (2\pi\mu/\Delta k_z) = (2\pi c\mu/\omega\Delta p), \quad (39)$$

так что при $M \geq 1$ не имеет смысла говорить о моде с соответствующим Δp .

Подставляя (38) в (39) и учитывая (15), находим, что при условии (14)

$$M = \left(\frac{c}{a\omega_p}\right) \frac{(1-2u)^{1/2}}{\Delta p^{1/2}} T. \quad (40)$$

Отсюда видно, что затухание становится большим для мод с достаточно малыми Δp .

При условии (22), используя (27), получим при $\sigma \gg 1$

$$-\int_0^r (\partial q_1 / \partial p) dr = a [2b_0(1-2u)]^{-1/2} A(\beta, \Delta); \quad (41)$$

$$A(\beta, \Delta) = \int_{\beta}^{1-\Delta} \frac{dx}{[(1-\Delta)-x]^{1/2} (x^2 - \beta^2)^{1/2}}, \quad (42)$$

где функция $A(\beta, \Delta)$ выражается через неполные эллиптические интегралы, а параметры β и Δ определены в (25). Заметим, что непосредственно из (42) и (26) следует

$$A(\beta, \Delta) \rightarrow 0 \quad (\Delta \rightarrow 1), \quad (43)$$

т. е. при $u \rightarrow u'$.

Таким образом, согласно (32), получим

$$\mu = \frac{(2b_0)^{1/2}(1-2u)^{1/2}}{4aA(\beta, \Delta)} T, \quad (44)$$

где для частот вблизи u' можно использовать для T оценку (36).

Подставляя (44) в (39) и используя выражение (25) для β^2 , имеем при $\sigma \gg 1$

$$M = \pi \left(\frac{c}{a\omega_p}\right) \frac{(2b_0)^{1/2} A^{-1}(\beta, \Delta)}{(1-2u)^{3/2} \beta^2} T. \quad (45)$$

Отсюда видно, что затухание становится большим для малых β и u , близких к u' (см. (43)).

Из (40) и (45) следует также, что затухание обратно пропорционально величине $\omega_p a/c$, т. е. относительной ширине волновода. При

$\omega_p a/c \sim 1$ затухание из-за утечки становится очень сильным. Поэтому самофокусировка в режиме, где выполняются условия вмороженности (9), быстро прекращается при сужении волнового пучка.

Можно также показать, что этот вывод распространяется не только на случай, когда имеет место (9а), но и когда $b(r) \sim v(r)$.

В заключение автор выражает благодарность В. И. Карпману за обсуждение результатов работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Карпман В. И., Кауфман Р. Н.—J. Plasma Phys., 1982, **27**, p. 225.
2. Карпман В. И., Кауфман Р. Н.—Геомагнетизм и аэрономия, 1983, **23**, № 3, с. 451.
3. Карпман В. И., Кауфман Р. Н.—Геомагнетизм и аэрономия, 1983, **23**, № 5, с. 791.
4. Helliwell R. A. Whistlers and Related Ionospheric Phenomena. Standford, Standford Univ. Perss, 1965, § 3. 6.
5. Карпман В. И., Кауфман Р. Н.—ЖЭТФ, 1982, **83**, с. 149.
6. Карпман В. И., Кауфман Р. Н.—Письма в ЖЭТФ, 1981, **33**, с. 266.
7. Walker A D. M.—Proc. R. Soc. Lond., 1972, A **321**, p. 219.

Институт земного магнетизма,
ионосферы и распространения
радиоволны АН СССР

Поступила в редакцию
20 июля 1983 г.,
в окончательном варианте
27 марта 1984 г.

ON THE WHISTLER WAVE PROPAGATION IN A DUCT WITH MAGNETIC FIELD CHANGING ACROSS IT

R. N. Kaufman

Whistler wave propagation in axially symmetric weak ducts oriented along the ambient magnetic field is considered. It is assumed that the latter as well as the density depends on the transverse coordinate as it takes place in the self-focusing. The possibility of the wave leakage caused by the transformation of trapped wave into untrapped one is taken into account. It is shown that if the transversal variation of the magnetic field is large enough, the conditions of the waveguide propagation and the leakage change significantly in comparison with the case of a constant magnetic field.