ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XXVII, № 8 РАДИОФИЗИКА 1984

УДК 533.566 2.539.2

К ТЕОРИИ ПЕРЕХОДНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ СОЛИТОНА В НЕСТАЦИОНАРНОЙ СРЕДЕ

Ф. Х. Абдуллаев, Р. Г. Джангирян

Получены формулы для интенсивности переходного излучения солитона уравнения sine-Gordon в нестационарной среде. Рассмотрены случаи резкого и плавного нестационарного слоя, периодически нестационарной среды.

1. В последнее время привлекает внимание проблема эволюции солитонов в неоднородных средах [1–3]. В работе [3] показано, что движение ленгмюровского солитона в неоднородной среде имеет тесную аналогию с движением заряженной частицы. В частности, солитон в неоднородной среде излучает, имеется аналог переходного излучения. Аналог переходного рассеяния обнаружен недавно в задаче движения солитона sine-Gordon в периодически неоднородной системе [4]. В то же время известно, что в нестационарной системе возможно переходное излучение заряда [5]. В связи с этим представляет интерес вычисление поля излучения в нестационарной среде. Рассмотрению этого вопроса для конкретных моделей нестационарностей сред в случае динамики уравнения sine-Gordon и посвящена данная работа.

Волновое уравнение, описывающее динамику солитона уравнения sine-Gordon в нестационарной среде, имеет вид

$$\varphi_{tt} - c_0^2 \varphi_{xx} + \omega_0^2 (1 + \varepsilon(t)) \sin \varphi = 0. \tag{1}$$

Если изучается, например, динамика магнитных солитонов в квазиодномерных магнетиках, находящихся под действием постоянного поля H_0^x, приложенного вдоль оси x, и переменного поля $h \sin \Omega t$, то уравнение (1) принимает вид

$$\varphi_{tt} - c_0^2 \varphi_{xx} + \omega_0^2 (1 + \varepsilon_0 \sin \Omega t) \sin \varphi = 0,$$

где

$$c_0^2 = 2AIS^2a^2, \quad \omega_0^2 = 2ASg\mu_B H_0^x, \quad \varepsilon_0 = h/H_0^x.$$

Здесь A — константа анизотропии, I — обменное взаимодействие между спинами, S — значение спина, a — межатомное расстояние. Недавно в работе [6] было изучено движение магнитного солитона в переменных полях. Рассмотрение ограничивалось адиабатическим приближением, и излучение волн солитоном поэтому не вычислялось.

2. Рассмотрим задачу о нахождении поля и энергии излучения для различных сред. Перейдем к стандартным переменным. Имеем

$$\varphi_{\tau\tau} - \varphi_{zz} + (1 + \varepsilon(\tau)) \sin \varphi = 0,$$
$$\tau = t\omega_0, \quad z = x/d, \quad d = c_0/\omega_0. \tag{2}$$

Рассмотрим случай слабых возмущений, т. е. $\varepsilon \ll 1$. Будем искать решение в виде

$$\varphi = \varphi_s + \varphi^{(1)}, \tag{3}$$

где φ_s — односолитонное решение,

$$\varphi_s = 4 \operatorname{arctg} \exp \left[\pm \frac{(z - \beta\tau)}{\sqrt{1-\beta^2}} \right], \quad \beta = v_s/c_0.$$

Перейдем к системе координат, движущейся вместе с солитоном,

$$z' = \frac{z - \beta\tau}{\gamma}, \qquad \tau' = \frac{\tau - \beta z}{\gamma}, \qquad \gamma = \sqrt{1-\beta^2}.$$

Имеем

$$\varphi_{\tau'\tau'} - \varphi_{z'z'} + \sin\varphi = -\varepsilon\left[(\beta z' + \tau')/\gamma\right] \sin\varphi. \tag{4}$$

Подставляя (3) в (4) и пренебрегая членами $\sim \varepsilon^2$, получаем для поправки уравнение

$$\varphi^{(1)}_{\tau'\tau'} - \varphi^{(1)}_{z'z'} + \cos\varphi_s(z')\,\varphi^{(1)} = -\varepsilon\left[(\tau' + \beta z')/\gamma\right] \sin\varphi_s. \tag{5}$$

Перейдем в (5) к фурье-компонентам $\tilde{\varphi}^{(1)}$:

$$\tilde{\varphi}^{(1)}_{z'z'}(\omega) - \omega^2 \tilde{\varphi}^{(1)}(\omega) + \cos\varphi_s(z')\,\tilde{\varphi}^{(1)}(\omega) = \varepsilon(\omega_1) e^{-i\omega\beta z'} \sin\varphi_s(z'), \qquad \omega_1 = \gamma\omega. \tag{6}$$

Тогда имеем для $\tilde{\varphi}^{(1)}$

$$\tilde{\varphi}^{(1)}(\omega, z) = 2\varepsilon(\omega_1) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\beta z'} \left(\operatorname{sh}(z')/\operatorname{ch}^2(z')\right) G_\omega(z, z')\, dz', \tag{7}$$

где $G_\omega(z, z')$ есть функция Грина оператора

$$\partial^2/\partial z^2 - \omega^2 + \cos\varphi_s(z)$$

и равная [4, 8]

$$G_\omega(z, z') = \frac{1}{2i\omega^2 p_0 \operatorname{sgn}\omega} \begin{cases} e^{iq_0(z-z')}\left[\operatorname{th} z - iq_0\right]\left[\operatorname{th} z' + iq_0\right], & z > z', \\ e^{-iq_0(z-z')}\left[\operatorname{th} z' - iq_0\right]\left[\operatorname{th} z + iq_0\right], & z < z' \end{cases}$$

$$q_0 = \begin{cases} -p_0 i \operatorname{sgn}\omega, & |\omega| > 1 \\ \sqrt{-p_0^2}, & |\omega| \leqslant 1 \end{cases}, \qquad p_0 = \sqrt{\omega^2 - 1}. \tag{8}$$

В дальнейшем будем интересоваться полем излучения вдали от центра солитона, поэтому в (7) интегрирование будем проводить в пределах $|z'| \lesssim 1$ при условии $|z| \gg 1$. Выполняя интегрирование, находим

$$\tilde{\varphi}^{(1)}(z, \omega) = \frac{\varepsilon(\omega_1)\beta \exp(-i\omega\beta z)}{i\omega \operatorname{ch} z} + \frac{\pi\gamma^2\varepsilon(\omega_1)}{2ip_0}\left[\frac{\theta(z)\exp(ip_0 z)}{\operatorname{ch}\left[\pi(\omega\beta + p_0)/2\right]} \times \right.$$
$$\left. \times (\operatorname{th} z - ip_0) + \frac{\theta(-z)\exp(-ip_0 z)}{\operatorname{ch}\left[\pi(\omega\beta - p_0)/2\right]}(\operatorname{th} z + ip_0)\right]. \tag{9}$$

Первый член этого выражения есть поле, локализованное на солитоне, а два последних соответствуют излучению вперед и назад.

Рассмотрим конкретные модели нестационарной среды.

а) Модель резкого изменения характеристической частоты во времени:

$$\varepsilon(t)=\varepsilon_0\,\theta(t-t_0),\qquad \theta(t)=\begin{cases}1, & t>t_0\\ 0, & t<t_0\end{cases}.$$

Выполняя фурье-преобразование, получаем из уравнения (9), что поле излучения равно

$$\varphi^{(\pm)}(z,t)=\frac{\varepsilon\gamma^2}{2}\theta(\pm z)\left\{-\operatorname{th} z\int\limits_{-\infty}^{z\mp t\pm\gamma t_0}ds\operatorname{arctg}\operatorname{sh}\left(\frac{s}{s+\beta}\right)+\right.$$
$$\left.+\operatorname{arctg}\operatorname{sh}\left(\frac{z\mp t\pm\gamma t_0}{1\pm\beta^2}\right)\right\}. \tag{10}$$

Видно, что при резком изменении $\omega(t)$ во времени солитон излучает волны вперед и назад. Это вполне соответствует его аналогии с заряженной частицей. Кроме того, как следует из первого члена в (9), имеется волна, движущаяся вместе с солитоном и приводящая к перестройке его профиля:

$$\varphi_1^{(1)}(z,t)=\varepsilon_0\beta(t-t_0)\operatorname{ch}^{-1}((z-\beta t)/\gamma)\,\theta(t-t_0).$$

б) Импульсное изменение свойств среды:

$$\varepsilon(t)=\varepsilon_0\,[\theta(t+t_0)-\theta(t-t_0)].$$

Мы не будем выписывать здесь всего выражения для поля излучения, а запишем лишь часть, описывающую перестройку профиля солитона. Имеем

$$\varphi_1^{(1)}(z,t)=\varepsilon_0\beta\operatorname{ch}^{-1}(z-\beta t)/\gamma)\{\theta(t+t_0)(t+t_0)-\theta(t-t_0)(t-t_0)\}. \tag{11}$$

в) Модель плавного изменения свойств среды:

$$\varepsilon(t)=\varepsilon_0\operatorname{th}(t/T),\quad \varepsilon(\omega)=(i\varepsilon_0/2)\,T\operatorname{sh}^{-1}(\pi\omega T/2).$$

Вычисляя интегралы в (7), находим для поля излучения

$$\varphi^{(\pm)}(z,t)=\pi\gamma^3\varepsilon_0T\theta(\pm z)\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\times$$
$$\times\frac{\exp\{-2m\,|z\mp t|/T\gamma\}}{\cos[\pi(1\pm\beta)m/T\gamma]}\left[\frac{\operatorname{th} z}{2m}-\frac{1}{T\gamma}\right]- \tag{12}$$
$$-\frac{\exp\{-2m\,|z\mp t|/(1\pm\beta)\}}{\sin[\pi T\gamma(2m-1)/2(1\pm\beta)]}\left[\frac{\operatorname{th} z}{2m-1}-\frac{1}{1+\beta}\right].$$

Знак плюс отвечает волнам, излучаемым солитоном вперед, знак минус — волнам, излучаемым назад.

г) Аналогично может быть получен результат для модели, где ε задается в виде

$$\varepsilon=\frac{\varepsilon_0}{\operatorname{ch}(t/T)},\qquad \varepsilon(\omega)=\frac{\varepsilon_0T}{\operatorname{ch}(\pi T\omega/2)}.$$

Поле излучения равно

$$\varphi^{(\pm)}(z,t)=\pi\gamma^3\varepsilon_0T(\pm 1)\,\theta(\pm z)\times$$

$$\times \left\{ \frac{\exp\{-(2m+1)|z \mp t|/(1+\beta)\}}{\cos[\pi T(2m+1)/2(1\pm\beta)]} \left[\frac{\operatorname{th} z \operatorname{sgn}(z \pm t)}{2m+1} + \frac{1}{1\pm\beta} \right] + \frac{\exp[-(2m+1)|z \pm t|/T\gamma]}{\cos[\pi(1\pm\beta)(2m+1)/2T\gamma]} \times \left[\frac{\operatorname{th} z \operatorname{sgn}(z \mp t)}{2m+1} + \frac{1}{T\gamma} \right] \right\}. \tag{13}$$

Снова имеются две группы волн — излученных вперед и назад от солитона.

д) В заключение приведем результат для случая периодической модуляции частоты $\omega(t)$:

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \sin \Omega_0 t, \qquad \varepsilon(\omega) = (\varepsilon_0/2i)[\delta(\Omega_0 - \omega) - \delta(\Omega_0 + \omega)].$$

Поле излучения есть

$$\varphi^{(\pm)}_{\text{изл}}(z, t) = -\frac{\pi\gamma^2}{4}\theta(\pm z)\left\{ \frac{\operatorname{th} z}{k_0}\left[\frac{\cos(k_0 z \mp \Omega_0 t/\gamma)}{\operatorname{ch}[(\pi/2)(\Omega_0/\gamma \pm k_0)]} - \frac{\cos(k_0 z \pm \Omega_0 t/\gamma)}{\operatorname{ch}[(\pi/2)(\Omega_0/\gamma \mp k_0)]} \right] + \frac{\sin(k_0 z \mp \Omega_0 t/\gamma)}{\operatorname{ch}[(\pi/2)(\Omega_0/\gamma \pm k_0)]} - \frac{\sin(k_0 z \pm \Omega_0 t/\gamma)}{\operatorname{ch}[(\pi/2)(\Omega_0/\gamma \mp k_0)]} \right\}, \qquad k_0 = \sqrt{\Omega_0^2/\gamma^2 - 1}. \tag{14}$$

Условие излучения волн солитоном в размерных переменных запишется:

$$\Omega_0 > \gamma\omega_0. \tag{15}$$

В случае квазиодномерного ферромагнетика типа $CsNiF_3$ в переменном поле имеем условие излучения спиновых волн магнитным солитоном

$$\Omega_0 > 2\sqrt{1 - v_s^2/2JS^2aA}\, g\mu_B H_0^x ASa.$$

При температурах ~ 15 K и полях $H_0^x \simeq 5$ *кГс*, $J \simeq 11$ K, $A \simeq 2{,}3$K находим условие для частоты $\Omega_0 \gtrsim 100$ *МГц*, $\beta \simeq 0{,}6$.

Итак, видно, что при периодической модуляции $\omega(t)$ образуются две волны излучения, бегущие в противоположных направлениях. Пороговое значение скорости, при которой возникает излучение,

$$\beta_{\text{пор}} = \sqrt{1 - \Omega_0^2/\omega_0^2}.$$

Поле $\varphi^{(1)}$ расходится при $\beta \to \beta_{\text{пор}}$. В этой области наш расчет становится неприменимым, так как $\varphi^{(1)}$ становится много больше единицы.

3. Перейдем к расчету энергии излучения солитона в нестационарной среде. Пусть φ^R есть излучаемое поле, тогда плотность энергии

$$W = (1/2)\{\varphi_t^2 + \varphi_z^2 + \cos\varphi_s \varphi^2\},$$

а поток энергии $J = \varphi_z \varphi_t$. Они удовлетворяют соотношению

$$\partial W/\partial t - \partial J/\partial x = 0.$$

Обозначим через $\overline{W}^{(+)}$ энергию, излучаемую вперед, $\overline{W}^{(-)}$ — энергию, излучаемую назад:

$$\overline{W}^{(+)} = \int_0^\infty W(z, t)\,dz, \qquad \overline{W}^{(-)} = \int_{-\infty}^0 W(z, t)\,dz.$$

После длинных преобразований для спектральных плотностей получаем следующие уравнения:

$$\frac{d\overline{W}^{(+)}}{d\omega} = \frac{\pi^3\gamma^4}{2}\,\frac{\varepsilon^*(\omega)\,\varepsilon(\omega)\,\omega^2\,\mathrm{sgn}\,\omega}{p_0(\omega - \beta p_0)\,\mathrm{ch}^2\,[\pi(\omega\beta + p_0)/2]}; \tag{16}$$

$$\frac{d\overline{W}^{(-)}}{d\omega} = \frac{\pi^3\gamma^4}{2}\,\frac{\varepsilon^*(\omega)\,\varepsilon(\omega)\,\omega^2\,\mathrm{sgn}\,\omega}{p_0(\omega + \beta p_0)\,\mathrm{ch}^2\,[\pi(\omega\beta - p_0)/2]}. \tag{17}$$

Для различных моделей нестационарности среды в результате находим ($|\omega| > 1$)*

а) $$\overline{W}_\omega^{(\pm)} = \frac{\pi\gamma^4\varepsilon_0^2}{8}\,(p_0(\omega \mp \beta p_0))^{-1}\,\mathrm{ch}^{-2}\,[\pi(\omega\beta \pm p_0)/2]; \tag{18}$$

б) $$\overline{W}_\omega^{(\pm)} = \frac{\pi^3\gamma^6\varepsilon_0^2 T^2}{8}\,\frac{\omega^2}{p_0(\omega \mp \beta p_0)}\,\mathrm{sh}^{-2}\left[\frac{\pi T\gamma\omega}{2}\right]\mathrm{ch}^{-2}\left[\frac{\pi(\omega\beta \pm p_0)}{2}\right]; \tag{19}$$

в) $$W_\omega^{(\pm)} = \frac{\pi\gamma^4\varepsilon_0^2}{2}\,\frac{\sin^2\gamma t_0\omega}{p_0(\omega \mp \beta p_0)\,\mathrm{ch}^2\,[\pi(\omega\beta \pm p_0)/2]}; \tag{20}$$

г) $$W_\omega^{(\pm)} = \frac{\pi^3\gamma^6\varepsilon_0^2}{8}\,T^2\,\frac{\omega^2}{p_0(\omega \mp \beta p_0)\,\mathrm{ch}^2\,[\pi T\gamma\omega/2]}; \tag{21}$$

д) $$W_\omega^{(\pm)} = \frac{\pi^3\gamma^4\varepsilon_0^2\omega^2}{8p_0(\omega \mp \beta p_0)\,\mathrm{ch}^2\,[\pi(\omega\beta \pm p_0)/2]}\,\delta(\omega - \Omega_0/\gamma). \tag{22}$$

Проанализируем формулу (19). Рассмотрим вначале случай малых T. Тогда имеет место следующее разложение для спектральной плотности энергии излучения:

$$W_\omega^{(\pm)} \simeq W_\omega^{(\pm)0}(1 + (1/24)\,\pi^2 T^2\gamma^2\omega^2),$$

где $W_\omega^{(\pm)0}$ — интенсивность переходного излучения при мгновенном изменении свойств среды (18).

Рассмотрим далее случай высоких частот. Имеем

$$W_\omega^{(\pm)} \simeq 2\pi^3\gamma^6\varepsilon_0^2 T^2\omega\,\exp\,[-\pi\omega(T\gamma + \beta)],$$

т. е. интенсивность переходного излучения на размытом нестационарном слое экспоненциально мала. Экспоненциальное убывание спектра излучения на высоких частотах связано с тем, что зависимость $\omega(t)$ от времени — гладкая функция, непрерывная со всеми своими производными. Этот факт согласуется с результатом анализа переходного излучения заряда в нестационарной среде и представляет собой еще одну сторону аналогии между солитонами и частицами, отмечаемую рядом авторов.

Заметим также, что в недавней работе [9] сообщается о наблюдении поглощения энергии из переменного во времени поля движущимся магнитным солитоном в квазиодномерном магнетике.

---

* При $\omega < 1$, как это следует из (9), нет распространяющихся волн.

4. В предыдущем разделе мы вычислили поле излучения солитона в нестационарной среде. В то же время ясно, что реакция излучения должна влиять на характер движения солитона. Согласно работе [10] скорость солитона описывается выражением

$$\beta = \frac{dz}{dt} + \frac{\varepsilon}{2\pi} \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} z\varphi_z^{(1)}(z, t)\, dz, \tag{23}$$

что дает для случая периодической модуляции $\omega(t)$ при подстановке (14) в (23) и $t \ll 1$

$$\beta = \beta_0 - \varepsilon\beta_0 t^5 \Omega_0/24.$$

Это выражение описывает неньютоновскую динамику солитона sine-Gordon в периодически нестационарной среде в начальный период движения.

Авторы признательны Б. М. Болотовскому, В. Г. Маханькову, Л. А. Островскому за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Пелиновский Е. Н.— ПМТФ, 1971, № 6, с. 80.
2. Абдуллаев Ф. Х, Ниязов Б. А — ЖТФ, 1982, 52, № 12, с. 2623.
3. Коу М. и др.— ЖЭТФ, 1982, 82, с 1449
4. Mkrtchyan G. S, Schmidt V. V.— Sol. Stat Commun., 1979, 30, p. 791.
5. Гинзбург В. Л., Цытович В Н.— УФН, 1978, 126, № 4, с. 553
6. Барьяхтар В. Г., Иванов Б А. и др. — Письма в ЖЭТФ, 1983, 37, № 1, с. 37.
7. Болотовский Б. М, Давыдов В. А., Рок В Е.— УФН, 1982, 136, № 3, с 377.
8. Fogel M. B, Bishop A R. et al.—Physica, 1981, 1D, p. 1.
9. De Jough L. J. et al.— Phys. Rev Lett., 1981, 47, p. 1672.
10. Reinisch J. C., Fernandez G. — Phys. Rev., 1982, B 25, p. 7352.

Отдел теплофизики
АН УзССР

Поступила в редакцию
25 июля 1983 г.,
после доработки
26 января 1984 г.

A THEORY OF A TRANSITION RADIATION OF THE SOLITON IN A NONSTATIONARY MEDIUM

F. Kh. Abdullaev, R. G. Djangiryan

The relations for the intensity of the transition radiation of the sine-Gordon soliton in a nonstationary medium are obtained. The cases of the stepping and the slowly nonstationary layer and the periodic nonstationary medium are considered.