

УДК 621.371.25

СТАТИСТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА НОРМАЛЬНЫХ ВОЛН В СФЕРИЧЕСКОМ ВОЛНОВОДЕ ЗЕМЛЯ — ИОНОСФЕРА

B. Г. Безродный

Рассчитаны вторые статистические моменты флуктуаций уровней и фаз нормальных волн в сферическом волноводном канале Земля — ионосфера в диапазоне СДВ. Неоднородность ионосферной границы характеризовалась малыми и достаточно плавными случайными изменениями действительного поверхностного импеданса и высоты. Проведен сравнительный анализ статистических свойств радиосигналов в плоском и сферическом волноводах, в частности, показано, что в сферическом волноводе по сравнению с плоским все корреляционные масштабы укорачиваются

При распространении электромагнитных и звуковых волн в природных волноводных каналах на большие расстояния кривизна границ может приводить к существенным изменениям дальнего поля по сравнению с полем в плоском волноводе. Одним из характерных примеров таких искривленных волноводов может служить волноводный канал Земля — ионосфера в диапазоне СДВ. Вопрос о влиянии сферичности этого волновода на регулярные свойства распространяющихся нормальных волн достаточно хорошо изучен (см., например, [1, 2]). В работе [3] исследованы статистические свойства СДВ радиосигналов, обусловленные случайными изменениями δh высоты криволинейной ионосферной границы. На основе сравнения полученных результатов с аналогичными данными [4] для плоского волновода сделан вывод о качественном их соответствии. Следует заметить, что модель волновода с флуктуирующей высотой не дает полного описания статистических свойств радиосигналов в реальном волноводном канале Земля — ионосфера. Как показано в [5], флуктуации δh приводят в каждом акте отраже-

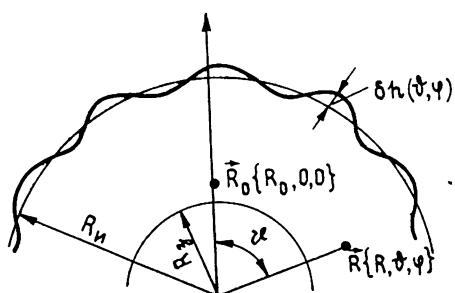


Рис. 1.

ние к стохастической фазовой модуляции радиоволн. В то же время случайные изменения электронной плотности ионосферной плазмы могут вызывать в общем случае также и амплитудную модуляцию (см. [5]), которую удобно описывать в терминах флуктуаций действительного импеданса.

Целью настоящей работы является обобщение результатов [3] на более полную модель волноводного канала Земля — ионосфера и изучение тех количественных отличий в статистических свойствах нормальных волн в плоском и сферическом волноводах, которые не были отмечены в [3]. Полученные ниже выражения могут быть использованы также в качестве исходных данных при расчетах результирующих статистических характеристик многомодового поля на основе формул работ [6, 7].

Следуя [3], рассмотрим волновод, образованный двумя в среднем концентрическими сферическими поверхностями (рис. 1). Границу Земли $R=R_3$ будем полагать гладкой с регулярным импедансом η_0 . Эффективной границе ионосферы $R=R_i+\delta h(\vartheta, \phi)$ сопоставим действительный поверхственный импеданс $\eta_i=\eta_0+\delta\eta(\vartheta, \phi)$. В соответствии с литературными данными будем считать $|\eta_0| \ll 1$, $\eta_0 \sim 1$. Возмущения δh , $\delta\eta$ верхней стенки предполагаются малыми,

$$\sigma_\eta^2 \ll 1, \quad (k\sigma_h \sin \psi) \ll 1, \quad (1)$$

а их горизонтальные масштабы $l=\Lambda R_i$ — большими по сравнению с длиной волны,

$$kl \cos \psi \gg 1. \quad (2)$$

Здесь $k=\omega/c$, ψ — характерный угол скольжения волны относительно невозмущенной границы $R=R_i$, $\sigma_\eta^2 = \langle (\delta\eta)^2 \rangle$, $\sigma_h^2 = \langle (\delta h)^2 \rangle$, угловые скобки означают статистическое усреднение.

Волновод возбуждается точечным радиально ориентированным электрическим диполем частоты ω , расположенным в точке $R_0 \{R_0 \vartheta=0, \phi=0\}$. В силу выполнения условий (1), (2) случайные наклоны ионосферной границы $\gamma=|\gamma \delta h| \sim \sigma_h/l$ по параметрам $k\sigma_h$, $(kl)^{-1}$ являются величинами второго порядка малости, которыми в дальнейших расчетах мы будем пренебречь. Покажем, что связанные с γ поправки к волновым полям имеют тот же порядок. С этой целью обратимся к граничному условию на шероховатой поверхности $R=R_i+\delta h(\vartheta, \phi)$. Оно имеет вид

$$[NE] = -\eta_i [N[NH]], \quad (3)$$

где $N=(e_R^0 - \gamma)/\sqrt{1 + \gamma^2}$ — внешняя нормаль к границе, e_R^0 — орт оси R , E и H — электрическое и магнитное поля. Спроектируем (3) на координатные оси, отбрасывая члены, содержащие множителями величину γ^2 . В результате приходим к выражениям

$$E_\vartheta - \eta_i H_\varphi \approx -\gamma_\vartheta E_R; \quad (4a)$$

$$E_\varphi + \eta_i H_\vartheta \approx -\gamma_\varphi E_R. \quad (4b)$$

в которых (4a) описывает рассеяние падающей вертикально поляризованной волны в саму себя, (4b) — возникновение волн горизонтальной поляризации. В соответствии с (4b) деполяризованная составляющая сигнала имеет величину $\sim \gamma_\varphi E_R$. На этом основании при выводе (4a), (4b) наряду с указанными выше упрощениями были отброшены слагаемые $\eta_i \gamma_{\vartheta, \varphi} H_R \sim \gamma^2 E_R$.

Правые части формул (4a), (4b) представляют собой добавки к тангенциальной составляющей E_t электрического поля, связанные со случайными наклонами шероховатостей. Сравним эти члены по порядку величины с основной касательной компонентой сигнала E_ϑ . Для оценок будем полагать $\partial/\partial\vartheta \sim ikR \cos \psi$. Выражая из уравнений Максвелла E_R через H_φ и используя граничное условие (4a), соотношению $|\gamma_{\vartheta, \varphi} E_R/E_\vartheta|$ сопоставим величину $\sim \gamma |\cos \psi|/\eta_i$. Из приведенной оценки следует, что отличия E_t от E_ϑ действительно оказываются величинами $\sim \gamma$ (напомним, что принято $\eta_i \sim 1$) и на этом основании в дальнейших расчетах могут не учитываться.

Заменяя правые части в (4a), (4b) нулями, приходим к граничным условиям, имеющим такой же вид, как и на гладкой импедансной поверхности, смешенной, однако, от своего невозмущенного положения $R=R_i$ на величину δh :

$$E_\vartheta = \eta_i H_\varphi, \quad E_\varphi = -\eta_i H_\vartheta \quad \text{при } R=R_i+\delta h(\vartheta, \phi). \quad (5)$$

В силу выполнения второго из условий (5) деполяризация рассеянного излучения отсутствует. Введением однокомпонентного электрического вектора Дерца $\Pi = \mathbf{e}_R^* G$,

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= k^2 \Pi + \operatorname{grad} \operatorname{div} \Pi, \\ \mathbf{H} &= -ik \operatorname{rot} \Pi, \end{aligned} \quad (6)$$

задача расчёта электрического и магнитного полей в волноводе сводится к отысканию функций Грина G уравнения

$$\Delta G(\mathbf{R}, \mathbf{R}_0) + k^2 G(\mathbf{R}, \mathbf{R}_0) = -4\pi\delta(\mathbf{R} - \mathbf{R}_0) \quad (7)$$

с граничными условиями

$$\partial G / \partial R = -ik\eta_{03} G \text{ при } R = R_3; \quad (8)$$

$$\partial G / \partial R = ik[\eta_{0n} + \delta\eta(\theta, \varphi)] G \text{ при } R = R_n + \delta h(\theta, \varphi). \quad (9)$$

Заметим, что соотношение (8) является точным следствием (5), (6), а (9) получается при отбрасывании слагаемых порядка γ , $(kl)^{-1}$.

Функцию Грина представим в виде ряда по нормальных волн, $G = \sum_n G_n$, для отыскания которых воспользуемся методом, аналогичным приближению Рытова в теории объемного рассеяния. В соответствии с этим перейдем от полей G_n к комплексным фазам Ψ_n , используя соотношение $G_n = \exp(\Psi_n)$. К комплексным фазам применим обычный метод возмущений, разлагая их в ряд по степеням $\delta\eta, \delta h$ с учётом нулевых и первых членов разложений: $\Psi_n = \Psi_{0n} + \Psi_{1n}$. Нетрудно видеть, что невозмущенное поле G_{0n} , а также флуктуации χ_n уровня и S_n фазы n -й нормальной волны связаны при этом с Ψ_{0n} , Ψ_{1n} равенствами $G_{0n} = \exp(\Psi_{0n})$, $\Psi_{1n} = \chi_n + iS_n$. Подобная же процедура была выполнена в работе [3], однако там комплексная фаза вводилась не для каждой нормальной волны G_n , а для результирующего поля G . Подставляя $G = \sum_n \exp(\Psi_{0n} + \Psi_{1n})$ в (7) — (9) и разлагая полученные выражения по степеням $\delta\eta, \delta h$ с точностью до линейных членов, для $g_n = G_{0n}\Psi_{1n}$ получим уравнение

$$\Delta g_n(\mathbf{R}, \mathbf{R}_0) + k^2 g_n(\mathbf{R}, \mathbf{R}_0) = 0 \quad (10)$$

с граничными условиями

$$\partial g_n / \partial R = -ik\eta_{03} g_n \quad \text{при} \quad R = R_3, \quad (11)$$

$$\partial g_n / \partial R = ik\eta_{0n} g_n = [ik\delta\eta - k^2(\eta_{0n}^2 - \sin^2 \psi_n)\delta h] G_{0n} \quad \text{при} \quad R = R_n.$$

Здесь ψ_n — характерный угол скольжения n -й волноводной моды относительно ионосферной границы, связанный с соответствующим собственным числом $v_n = v_n' + iv_n''$ соотношением $\cos \psi_n = v_n / (kR_n)$. Решение (10), (11) запишем с помощью формулы Грина. Выполняя преобразования, аналогичные проделанным в [3], и переходя снова от g_n к Ψ_{1n} , приходим к выражению*

$$\Psi_{1n}(\theta, \varphi) = \frac{d v_n}{d h} \sqrt{\frac{v_n \sin \theta}{2\pi i}} \int_0^\theta \frac{d\vartheta_1}{\sqrt{\sin \vartheta_1 \sin(\theta - \vartheta_1)}} \times$$

* Координаты R_0 и R в аргумент Ψ_{1n} не вошли, т. е. флуктуации уровней и фаз нормальных волн от высот расположения передатчика и приемника не зависят

$$\times \int_{-\pi}^{\pi} d\Phi_1 \exp \left\{ \frac{i v_n' \sin \vartheta (\Phi_1 - \Phi \sin \vartheta_1 / \sin \vartheta)^2}{2 \sin \vartheta_1 \sin (\vartheta - \vartheta_1)} \right\} \left\{ \frac{\delta \eta(\vartheta_1, \varphi_1)}{k(\eta_{0n}^2 - \sin^2 \psi_n)} + \right. \\ \left. + i \delta h(\vartheta_1, \varphi_1) \right\}, \quad (12)$$

где $\Phi_1 = \varphi_1 \sin \vartheta_1$ — расстояние на сфере, отсчитываемое вдоль координатной линии $\varphi = \varphi_1$. При выводе (12) были использованы дополнительные к (1), (2) ограничения (см. [3]):

$$v_n' \min \{ \vartheta, (\pi - \vartheta) \} \gg 1; \quad (13)$$

$$v_n' \Lambda^2 / \vartheta \gg (v_n' \Lambda)^{-2}; \quad (14)$$

$$\min |v_n' - v_{n+1}'| \Lambda \geqslant 1. \quad (15)$$

Неравенство (13) означает, что точка наблюдения расположена в волновой зоне по отношению к источнику и его антиподу. Условие (14) позволяет отбросить в показателе экспоненты (12) члены, величины которых $\ll \Phi_1^4$. Соотношение (15) дает основание не учитывать взаимные пересечения между модами. В расчетах пренебрегалось также «кругосветными эхом» и волнами, приходящими в точку наблюдения со стороны антипода.

Из формулы (12) следует, что флуктуации Ψ_{1n} (а вместе с ними χ_n, S_n) определяются интегральным действием неоднородностей $\delta\eta, \delta h$ вдоль трассы распространения волны. При выполнении неравенства

$$\Lambda \ll \vartheta < \pi, \quad (16)$$

справедливого для характерных дистанций и размеров неоднородностей в волноводе Земля — ионосфера, в формировании рассеянного поля участвует большое число некоррелированных рассеивателей. Следовательно, можно ожидать, что в силу центральной предельной теоремы теории вероятностей флуктуации Ψ_{1n}, χ_n, S_n распределены по нормальному закону, а их вторые статистические моменты содержат исчерпывающую информацию о свойствах случайного поля.

Условие (16) позволяет также распространить пределы интегрирования по Φ_1 в (12) на бесконечность, поскольку характерный масштаб $\Delta\Phi_1$ изменений подынтегральной функции (эффективный интервал интегрирования) имеет величину $\Delta\Phi_1 \sim \min \{ \Lambda, \sqrt{\sin \vartheta / v_n'} \}$, малую по сравнению с 2π .

Вторые моменты величин χ_n, S_n по аналогии с [3] могут быть записаны в виде линейных функционалов от пространственных спектров $W_\eta(\alpha), W_h(\alpha), W_{\eta h}(\alpha)$ флуктуаций $\delta\eta, \delta h$. В силу выполнения неравенства (16) указанные спектры можно считать непрерывными и вводить обычным образом. Например,

$$W_\eta(\alpha) = (2\pi\sigma_\eta)^2 \int_{-\infty}^{\infty} d\rho_\vartheta d\rho_\Phi \langle \delta\eta(\vartheta, \Phi) \delta\eta(\vartheta + \rho_\vartheta, \Phi + \rho_\Phi) \rangle$$

$$\Phi + \rho_\Phi) \rangle \exp [-i(\alpha_\vartheta \rho_\vartheta + \alpha_\Phi \rho_\Phi)]$$

и аналогично $W_h(\alpha), W_{\eta h}(\alpha)$. Как показал анализ [5], в интервале скользящих углов $\psi_n \ll 1$, являющимся основным при дальнем распространении СДВ, $W_\eta(\alpha), W_h(\alpha), W_{\eta h}(\alpha)$ действительны, имеют одинаковый вид и могут быть записаны в форме

$$W_\eta(\alpha) = W_h(\alpha) = W_{\eta h}(\alpha)/q = W(\alpha). \quad (17)$$

Входящий в (17) параметр $q = \langle \delta\eta \delta h \rangle / (\sigma_\eta \sigma_h)$ характеризует когерентность двух видов ионосферной модуляции в совпадающих точках пространства. Относительный уровень каждого вида модуляции удобно описывать при помощи параметра $m = \sigma_\eta / (k \eta_{\text{н}} \sigma_h)$. Не повторяя промежуточных выкладок, аналогичных проделанным в [3], запишем окончательные выражения для корреляторов случайных изменений χ_n , S_n при пространственном, частотном или модовом разнесении сигналов:

$$\left. \begin{aligned} & \langle \chi_n^{(1)} \chi_p^{(2)} \rangle \\ & \langle S_n^{(1)} S_p^{(2)} \rangle \end{aligned} \right\} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} (J_{np} \pm \hat{J}_{np}), \\ \langle \chi_n^{(1)} S_p^{(2)} \rangle = (1/2) \operatorname{Im} (\hat{J}_{np} - J_{np}); \quad (18)$$

$$\begin{aligned} J_{np} = \langle \Psi_{1n}^{(1)} \Psi_{1p}^{(2)*} \rangle & \approx 2\pi \sigma_h^2 (1 + m^2) \frac{d\psi_n}{dh} \frac{d\psi_p^*}{dh} \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha_\Phi W(0, \alpha_\Phi) \times \\ & \times \int_0^\vartheta d\theta \cos [\alpha_\Phi \sin \theta (\Phi/\sin \vartheta - \tilde{\Phi}/\sin \tilde{\vartheta})] \times \\ & \times \exp \left\{ -i \frac{\alpha_\Phi^2 \sin \theta \sin (\vartheta - \theta)}{2\psi_n' \sin \vartheta} + i \frac{\alpha_\Phi^2 \sin \theta \sin (\tilde{\vartheta} - \theta)}{2\psi_p' \sin \tilde{\vartheta}} \right\}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{J}_{np} = \langle \Psi_{1n}^{(1)} \Psi_{1p}^{(2)} \rangle & \approx -2\pi \sigma_h^2 (1 - m^2 - 2iqm) \frac{d\psi_n}{dh} \frac{d\psi_p}{dh} \times \quad (19) \\ & \times \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha_\Phi W(0, \alpha_\Phi) \int_0^\vartheta d\theta \cos [\alpha_\Phi \sin \theta (\Phi/\sin \vartheta - \tilde{\Phi}/\sin \tilde{\vartheta})] \times \\ & \times \exp \left[-i \frac{\alpha_\Phi^2 \sin \theta \sin (\vartheta - \theta)}{2\psi_n' \sin \vartheta} - i \frac{\alpha_\Phi^2 \sin \theta \sin (\tilde{\vartheta} - \theta)}{2\psi_p' \sin \tilde{\vartheta}} \right]. \end{aligned}$$

Здесь индекс «1» соответствует частоте ω и координате $\{\vartheta, \phi\}$, индекс «2» — $\tilde{\omega}$ и $\{\tilde{\vartheta}, \tilde{\phi}\}$, ψ_n сопоставляется частоте ω , ψ_p — $\tilde{\omega}$. При выводе (19) полагалось $\tilde{\vartheta} - \vartheta \geq 0$, $\psi_n''/\psi_n' \ll 1$, $|\psi_{n,p}|^2 \ll \eta_{\text{н}}^2$ (т. е. рассматривались только скользящие моды) и считалось выполненным неравенство (16).

Формулы (18), (19) описывают зависимость статистических свойств нормальных волн от величины волнового параметра $D = (\Lambda_{\Phi p}/\Lambda)^2$, равного квадрату отношения поперечного размера зоны Френеля $\Lambda_{\Phi p}$ к характерному масштабу неоднородностей Λ , при произвольном соотношении m между уровнями амплитудной и фазовой модуляции радиосигналов случайными неоднородностями ионосферы. Под зоной Френеля, как и в задаче о распространении радиоволн над плоской поверхностью раздела, понимается геометрическое место точек $\{\vartheta_1, \phi_1\}$, для которых регулярная разность фаз сигналов, приходящих по двум разным путям (в данном случае криволинейным) $\{0, 0\} \rightarrow \{\vartheta_1, \phi_1\} \rightarrow \{\vartheta, 0\}$

и $\{0, 0\} \rightarrow \{\vartheta, 0\}$, не превосходит величины π . Соответствующая оценка может быть получена на основании (12) и имеет вид $\Lambda_{\Phi} \sim \sim 2\sqrt{\pi \operatorname{tg}(\vartheta/2)/v_n'}$. Если ввести расстояние x и продольное волновое число κ_n на уровне Земли соотношениями $x = \vartheta R_3$, $\kappa_n = v_n \times R_3^{-1} \sim k$, то при малых значениях ϑ произведение $R_3 \Lambda_{\Phi}$ переходит в привычное выражение $R_3 \Lambda_{\Phi}|_{\vartheta \ll 1} \approx \sqrt{\lambda x}$. При $\vartheta \rightarrow \pi$ величина $\operatorname{tg}(\vartheta/2) \rightarrow \infty$, и формула для Λ_{Φ} теряет смысл. Причина такого явления состоит в том, что $\vartheta = \pi$ соответствует точке, антиподной источнику. Все приходящие в эту точку лучи имеют нулевую разность фаз, поэтому размер зоны Френеля в этом случае совпадает с окружностью земного экватора. Последнее обстоятельство и приводит к нарушению условий применимости формулы для Λ_{Φ} , полученной в предположении о малости ее величины по сравнению с радиусом Земли*.

В общей постановке анализ (18), (19) затруднен громоздкостью получающихся выражений, и его оказывается удобным выполнять в предельных ситуациях. Ниже мы приведем результаты, полученные в приближении $m \rightarrow 0$, когда главным источником случайных изменений параметров сигнала являются флуктуации высоты волновода. Нетрудно видеть из (18), (19), что в противоположном случае $m^{-1} \rightarrow 0$, соответствующем преобладанию флуктуаций импеданса, корреляционные функции χ_n , S_n описываются формулами предельного случая $m \rightarrow 0$ после выполнения следующих замен:

$$\begin{aligned}\langle \chi_n^{(1)} \chi_p^{(2)} \rangle|_{m^{-1} \rightarrow 0} &\rightarrow \langle S_n^{(1)} S_p^{(2)} \rangle|_{m \rightarrow 0} \cdot m^2, \\ \langle S_n^{(1)} S_p^{(2)} \rangle|_{m^{-1} \rightarrow 0} &\rightarrow \langle \chi_n^{(1)} \chi_p^{(2)} \rangle|_{m \rightarrow 0} \cdot m^2, \\ \langle \chi_n^{(1)} S_p^{(2)} \rangle|_{m^{-1} \rightarrow 0} &\rightarrow \langle S_n^{(1)} \chi_p^{(2)} \rangle|_{m \rightarrow 0} \cdot m^2.\end{aligned}\quad (20)$$

Возможность реализации условий $m \rightarrow 0$ и $m^{-1} \rightarrow 0$ на практике подтверждается расчетами [5]. Зависимость результатов от величины параметра D , как и в [3, 4], проследим, рассматривая две крайние предельные ситуации: $D \ll 1$ (ближняя зона, приближение геометрической оптики) и $D \gg 1$ (далняя зона, дифракция Фраунгофера). Для удобства сравнения статистических свойств флуктуаций в сферическом и плоском волноводах перейдем от угловых характеристик волнового поля и канала связи к их линейным значениям на уровне Земли. С этой целью воспользуемся знакомыми уже соотношениями $x = \vartheta R_3$, $y = \varPhi R_3$, $\kappa_n = v_n/R_3$ и выполним в (19) замены $\alpha_\vartheta \rightarrow \alpha_y R_3$, $W(0, \alpha_\vartheta) \rightarrow W(0, \alpha_y)/R_3^2$.

Из анализа выражений (19) следует, что слагаемые в показателях экспонент имеют порядок величины, совпадающий с волновым параметром D . Поэтому в приближении геометрической оптики ($D \ll 1$) экспоненты могут быть приближенно заменены единицами, а выражения для J_{np} , \hat{J}_{np} преобразованы к виду

$$\begin{aligned}J_{np} &\approx x^2 \frac{d\kappa_n}{dh} \frac{d\kappa_p^*}{dh} F\left(y - \tilde{y} \frac{\sin(x/R_3)}{\sin(\tilde{x}/R_3)}\right), \\ \hat{J}_{np} &\approx -x^2 \frac{d\kappa_n}{dh} \frac{\tilde{d}\kappa_p}{dh} F\left(y - \tilde{y} \frac{\sin(x/R_3)}{\sin(\tilde{x}/R_3)}\right),\end{aligned}\quad (21)$$

* Заметим, что нарушение формулы для Λ_{Φ} при $\vartheta \rightarrow \pi$ не накладывает дополнительных ограничений на решение, поскольку окрестность точки $\vartheta = \pi$ исключена уже из рассмотрения условием (13).

где.

$$F(\xi) = (2\pi/x) \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha_y W(0, \alpha_y) \int_0^x dx_1 \cos \left\{ \alpha_y \xi \frac{\sin(x_1/R_3)}{\sin(\bar{x}/R_3)} \right\} \quad (22)$$

(напомним еще раз, что все приведенные здесь и далее результаты соответствуют предельному случаю $m \rightarrow 0$). Подставляя теперь (21) в (18), для корреляционных функций фаз получим соотношение

$$\langle S_n^{(1)} S_p^{(2)} \rangle \approx x^2 \frac{dx'_n}{dh} \frac{dx'_p}{dh} F \left(y - \tilde{y} \frac{\sin(x/R_3)}{\sin(\tilde{x}/R_3)} \right). \quad (23)$$

Флуктуации уровней нормальных волн при $D \ll 1$ малы по сравнению с флуктуациями фаз. Если ввести еще один параметр, $\delta_n^2 = \left(\frac{dx'_n}{dh} \right)^2 / \left(\frac{dx'_n}{dh} \right)^2$, являющийся в волноводе Земля — ионосфера малым, и удержать в выражениях для J_{np} , \hat{J}_{np} более высокие члены разложений по D , δ_n , m , то степень малости амплитудных флуктуаций можно оценить следующим образом:

$$\begin{aligned} \langle \chi_n^2 \rangle / \langle S_n^2 \rangle &= O((D + \delta_n + m)^2), \\ \langle \chi_n S_n \rangle / \langle S_n^2 \rangle &= O(D + \delta_n + qm), \end{aligned} \quad (24)$$

где символ $O(\epsilon)$ используется для обозначения величины, имеющей порядок ϵ .

В дальней зоне, где волновой параметр велик ($D \gg 1$), экспонента в выражении для \hat{J}_{np} быстро осциллирует. Для удобства записи перейдем от параметров, характеризующих пространственное, частотное или модовое разнесение сигналов, к соответствующим разностям и полусуммам: $y - \bar{y} = \Delta y$, $x - \bar{x} = \Delta x$, $\bar{x} + x = 2\bar{x}$, $\tilde{x}'_p - x'_n = \Delta x$, $\tilde{x}'_p + x'_n = 2\bar{x}$. Если рассматривать теперь только относительно малые разнесения, такие, что $|\Delta x|/\bar{x} \ll 1$, $|\Delta y| \leq l$, $|\Delta x|/\bar{x} \ll 1$, то за счет более медленных изменений подынтегральной функции в формулах для J_{np} по сравнению с \hat{J}_{np} оказывается выполненным неравенство $|\hat{J}_{np}/J_{np}| \ll 1$. В результате корреляционные функции флуктуаций χ_n , S_n имеют приблизительно одинаковый вид, а сами χ_n , S_n не коррелируют между собой:

$$\begin{aligned} \langle \chi_n^{(1)} \chi_p^{(2)} \rangle &\approx \langle S_n^{(1)} S_p^{(2)} \rangle \approx \pi \sigma_h^2 \left(\frac{d\bar{x}}{dh} \right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha_y W(0, \alpha_y) \times \\ &\times \int_0^{\bar{x}} dx_1 \cos \left\{ \alpha_y \Delta y \frac{\sin(x_1/R_3)}{\sin(\bar{x}/R_3)} + \frac{\alpha_y^2 \sin^2(x_1/R_3)}{2\bar{x} \sin^2(\bar{x}/R_3)} \Delta x - \right. \\ &\left. - \frac{\alpha_y^2 R_3 \sin(x_1/R_3) \sin[(\bar{x} - x_1)/R_3]}{2\bar{x} \sin(\bar{x}/R_3)} \frac{\Delta x}{\bar{x}} \right\}, \\ \langle \chi_n^{(1)} S_p^{(2)} \rangle / \sqrt{\langle \chi_n^{(1)2} \rangle \langle S_p^{(2)2} \rangle} &= O(D^{-1/2}). \end{aligned} \quad (25)$$

Формулы (23) — (25) описывают статистические свойства нормальных волн в сферическом волноводе Земля — ионосфера. Для полу-

тения формул плоской геометрии достаточно выполнить в (23)–(25) предельный переход $R_3 \rightarrow \infty$. Не останавливаясь на деталях, приведем ниже основные результаты анализа статистических характеристик флюктуаций χ_n , S_n , акцентируя внимание читателя на тех отличиях, которым приводит учет сферичности волноводного канала.

Как следует из (23), в предельном случае $D \ll 1$ (ближняя зона) дисперсии флюктуаций фаз имеют одинаковый вид в плоском и сферическом волноводах и описываются формулой

$$\langle S_n^2 \rangle = (dx'_n/dh)^2 \sigma_h^2 xl, \quad (26)$$

где характерный масштаб неоднородностей введен соотношением $l = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha_y W(0, \alpha_y)$. В соответствии с (24) флюктуации уровней нормальных волн в ближней зоне малы, а их явный вид определяется соотношением параметров m , δ_n , D . Параметр m характеризует при этом вклад в амплитудные флюктуации радиосигнала неосновного вида ионосферной модуляции, δ_n описывает случайные изменения затухания, связанные с отличием фазового пути в шероховатом волноводе по сравнению с гладким, D — изменения амплитуд, связанные с дифракционным «уширением» лучевых трубок. Для достаточно больших неоднородностей l и не слишком протяженных трасс x , когда дифракционными эффектами можно полностью пренебречь,

$$D^2 \ll \min(m^2, \delta_n^2) \ll 1, \quad (27)$$

дисперсии флюктуаций $\langle \chi_n^2 \rangle$ в плоском и сферическом волноводах описываются формулой

$$\langle \chi_n^2 \rangle = (m^2 + \delta_n^2 + 2qm\delta_n)(dx'_n/dh)^2 \sigma_h^2 xl, \quad (28)$$

отличающейся от (26) лишь наличием дополнительного малого множителя. В тех же случаях, когда учет дифракции оказывается существенным,

$$1 \gg D^2 \gg \max(m^2, \delta_n^2), \quad (29)$$

имеет место формула

$$\begin{aligned} \langle \chi_n^2 \rangle = & \frac{\pi \sigma_h^2 (dx'_n/dh)^2 R_3^2}{2k^2 \sin^2(x/R_3)} \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha_y \alpha_y^4 W(0, \alpha_y) \times \\ & \times \int_0^x dx_1 \sin^2\left(\frac{x_1}{R_3}\right) \sin^2\left(\frac{x-x_1}{R_3}\right). \end{aligned} \quad (30)$$

Анализ (30) показывает, что в этом предельном случае рост флюктуаций уровней с дистанцией происходит в сферическом волноводе быстрее, чем в плоском. Указанные различия иллюстрируются кривой 1 рис. 2, которая изображает зависимость отношения $\langle \chi_n^2 \rangle_{\text{пл}}/\langle \chi_n^2 \rangle_{\text{сф}}$ от длины трассы x в условиях, определенных неравенством (29).

Что касается взаимной корреляции флюктуаций χ_n и S_n в совпадающих точках пространства, то в предельном случае (27) коэффициент корреляции $K_{\chi_n S_n} = \langle \chi_n S_n \rangle / V \langle \chi_n^2 \rangle \langle S_n^2 \rangle$ имеет вид

$$K_{\chi_n S_n} = (\delta_n + qm) / V \sqrt{m^2 + \delta_n^2 + 2qm\delta_n}. \quad (31)$$

При выполнении условия (29) $K_{\chi_n s_n}$ зависит от явного вида $W(0, \alpha_y)$, и для снектров гауссова вида $K_{\chi_n s_n} \approx 0,52$.

Иначе обстоит дело в случае фраунгоферовой дифракции ($D \gg 1$). Как следует из формул (25), флуктуации χ_n и S_n в этом случае не коррелируют между собой, а их дисперсии оказываются равны друг другу и описываются формулой (26) после введения в нее дополнительного множителя 0,5.

В соответствии с (23) корреляция между флуктуациями фаз в модах разных номеров в приближении геометрической оптики является полной. В случае фраунгоферовой дифракции (формулы (25)) статистическая связь этих флуктуаций исчезает, когда разность Δx волновых чисел нормальных волн превосходит величину $(\Delta x)_{\text{кор}} \sim \kappa D^{-1}$. При малых по сравнению с $(\Delta x)_{\text{кор}}$ разнесениях асимптотики коэффициентов $K_{S_n S_p}(\Delta x)$, $K_{\chi_n \chi_p}(\Delta x)$ имеют вид

$$K_{S_n S_p}(\Delta x) \approx K_{\chi_n \chi_p}(\Delta x) \approx 1 - (\Delta x/\Delta)^2,$$

$$\begin{aligned} \Delta^2 = [8x \bar{x}^4 \sin^2(x/R_3) \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha_y W(0, \alpha_y)] \times \\ \times \left\{ R_3^2 \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha_y \alpha_y^4 W(0, \alpha_y) \int_0^x dx_1 \sin^2(x_1/R_3) \sin^2[(x - x_1)/R_3] \right\}^{-1}. \end{aligned} \quad (32)$$

Корреляционный масштаб Δ оказывается при этом различным в плоском и сферическом волноводах. Величина отношения $\Delta_{\text{сф}}/\Delta_{\text{пл}}$ как функция дистанции x изображена на рис. 2 кривой 2.

При разнесении точек наблюдения поперек трассы распространения ($\Delta x=0, \Delta y \geq 0$) коэффициенты корреляции фаз (в предельном случае $D \ll 1$) либо фаз и амплитуд (в случае $D \gg 1$) описываются формулой

$$K^\perp(\Delta y) = F(\Delta y)/F(0), \quad (33)$$

где $F(\Delta y)$ определено соотношением (22). Если ввести среднюю вдоль трассы $r\{x, y\}$ высоту неровностей $\bar{h}_r = \frac{1}{x} \int_0^x dx_1 \delta h(x_1, \frac{\sin(x_1/R_3)}{\sin(x/R_3)} y)$, то нетрудно видеть, что $F(\Delta y) = \langle \bar{h}_r, \bar{h}_{\sim} \rangle$, в силу чего определенная формулами (22), (33) функция $K^\perp(\Delta y)$ имеет смысл коэффициента корреляции средних возвышений на трассах r и \tilde{r} . Из (22), (33) следует, что интервал поперечной корреляции волнового поля составляет величину $\sim l$. При малых по сравнению с l разнесениях для коэффициента корреляции $K^\perp(\Delta y)$ имеет место асимптотическое представление

$$K^\perp(\Delta y) \approx 1 - (\Delta y/Y)^2, \quad (34)$$

$$Y^2 = \frac{2x \sin^2(x/R_3) \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha_y W(0, \alpha_y)}{\int_{-\infty}^{\infty} d\alpha_y \alpha_y^2 W(0, \alpha_y) \int_0^x dx_1 \sin^2(x_1/R_3)}.$$

Величина отношения $Y_{\text{сф}}/Y_{\text{пл}}$ как функция x ведет себя практически так же, как отношение $\Delta_{\text{сф}}/\Delta_{\text{пл}}$ (см. кривую 2 на рис. 2).

Коэффициенты корреляции фаз при продольном разнесении точек наблюдения ($\Delta y=0$, $\Delta x \geq 0$) в случае $D \ll 1$ описываются формулой

$$K_{S_n}^{\parallel}(\Delta x) = \sqrt{(\bar{x} - \Delta x/2)/(\bar{x} + \Delta x/2)}. \quad (35)$$

При выполнении обратного неравенства интервалы корреляции фаз и амплитуд совпадают между собой и равны по порядку величины $(\Delta x)_{\text{кор}} \sim \bar{x}D^{-1} \ll \bar{x}$. При разнесениях, малых по сравнению с $(\Delta x)_{\text{кор}}$, имеет место асимптотическая формула

$$K_{S_n}^{\parallel}(\Delta x) \approx K_{\chi_n}^{\parallel}(\Delta x) \approx 1 - (\Delta x/X)^2, \quad (36)$$

$$X^2 = \frac{8x_n^2 \bar{x} \sin^4(\bar{x}/R_3) \int_0^\infty d\alpha_y W(0, \alpha_y)}{\int_{-\infty}^\infty d\alpha_y \alpha_y^4 W(0, \alpha_y) \int_0^x dx_1 \sin^4(x_1/R_3)}.$$

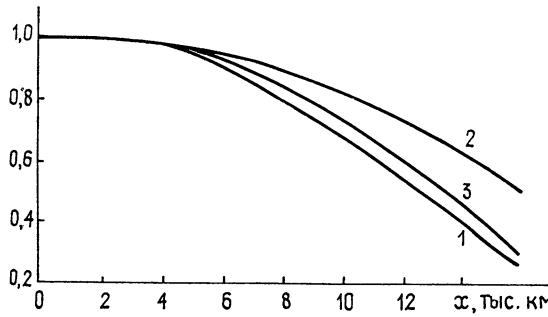


Рис. 2.

Изменение величины отношения $X_{\text{сф}}/X_{\text{пл}}$ с ростом дистанции x иллюстрируется кривой 3 на рис. 2.

При разнесении сигналов по частоте ($\tilde{\omega} - \omega = \Delta\omega$, $\tilde{\omega} + \omega = 2\bar{\omega}$) в предельном случае $D \ll 1$ флуктуации фаз полностью скоррелированы для всех значений $\Delta\omega$. В случае $D \gg 1$ интервал межчастотной корреляции можно оценить величиной $(\Delta\omega)_{\text{кор}} \sim \bar{\omega}D^{-1}$. Асимптотические выражения для коэффициентов корреляции $K_{S_n}(\Delta\omega)$, $K_{\chi_n}(\Delta\omega)$ получаются из формул (32), описывающих корреляцию между модами, после замены в них $\Delta x \rightarrow \Delta\omega/c$, $\bar{x} \rightarrow \bar{\omega}/c$, $K_{S_n S_p}(\Delta\omega) \rightarrow K_{S_n}(\Delta\omega)$, $K_{\chi_n \chi_p}(\Delta\omega) \rightarrow K_{\chi_n}(\Delta\omega)$.

Подводя итоги проведенному рассмотрению, можно сделать следующие выводы. В рамках использованных приближений (1), (2), (13)–(16) корреляционные зависимости в плоском и сферическом волноводах в качественном отношении полностью совпадают. Тем не менее, имеют место некоторые количественные отличия, связанные с различной геометрией задач. Это, прежде всего, отмеченный нами более быстрый рост с дистанцией амплитудных флуктуаций в сферическом волноводе по сравнению с плоским (кривая 1 на рис. 2). Кроме того, для сферического волновода характерно уменьшение всех корреляционных масштабов по мере удаления наблюдателя от передатчика (кривые 2 и 3 на том же рисунке). Указанные различия имеют достаточно простое объяснение и связаны с более быстрым, чем в плоском волноводе, ростом с дистанцией размера зоны Френеля и величины эффектив-

ного поперечного разнесения $(\Delta y)_{\text{эфф}} = (\Delta y/x) \int_0^x dx_1 \sin(x_1/R_3) \sin^{-1}(x/R_3)$ соседних трасс распространения $((\Delta y)_{\text{эфф}}^{\text{пл}} = \Delta y/2$, $(\Delta y)_{\text{эфф}}^{\text{сф}} > \Delta y/2$ при $x > \pi R_3/2$). Приведенные на рис. 2 данные показывают, что при расчете статистических характеристик СДВ сигналов сферичностью канала связи можно пренебречь вплоть до дистанций ~ 3 тыс. км. На трассах большей протяженности ее можно легко учесть подстановкой в формулы плоской геометрии истинных сферических корреляционных масштабов.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Альперт Я. Л., Гусева Э. Г., Флигель Д. С. Распространение низкочастотных электромагнитных волн в волноводе Земля — ионосфера. — М.: Наука, 1967. — 122 С.
- 2 Макаров Г. И., Новиков В. В., Орлов А. Б. — Изв. вузов — Радиофизика, 1970, 13, № 3, с. 321.
- 3 Безродный В. Г. — Изв. вузов — Радиофизика, 1973, 16, № 6, с. 918.
- 4 Безродный В. Г., Фукс И. М. — Изв. вузов — Радиофизика, 1972, 15, № 12, с. 1875.
- 5 Безродный В. Г. — Изв. вузов — Радиофизика, 1984, 27, № 2, с. 137.
- 6 Безродный В. Г., Шубова Р. С. — Изв. вузов — Радиофизика, 1978, 21, № 8, с. 1107.
- 7 Безродный В. Г., Блиох П. В., Ямпольский Ю. М. — Изв. вузов — Радиофизика, 1974, 17, № 3, с. 383.

Институт радиофизики и электроники
АН УССР

Поступила в редакцию
25 апреля 1983 г.

STATISTICAL PROPERTIES OF NORMAL MODES IN THE SPHERICAL EARTH — IONOSPHERE WAVEGUIDE

V. G. Bezrodny

Using a method similar to the Rytov approximation in the volume scattering theory, second-order statistical moments of log-amplitude and phase fluctuations in the spherical Earth — ionosphere waveguide have been calculated for VLF. Ionospheric boundary inhomogeneities are described in terms of random variations both of the real surface impedance and the height (i. e. $\delta\eta$ and δh). The fluctuations in $\delta\eta$ and δh have been assumed to be small and rather smooth. A comparative analysis of statistical properties of the radio signals in a plane and a spherical waveguide has been performed. It has been shown that the difference in geometry leads to a number of qualitative features in the field behaviour, in particular all the correlation sizes in the spherical waveguide are shorter than in the plane, which is one of the principal results.