

- 1 Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны — М: Мир, 1977
- 2 Фридман В. Е. В кн: Нелинейная акустика. — Горький: ИПФ АН СССР, 1980, с. 68
- 3 Гурбатов С. Н., Демин И. Ю. — Акуст. журн., 1982, 28, № 5, с. 634.
- 4 Малахов А. Н., Саичев А. И. — Изв. вузов — Радиофизика, 1974, 17, № 5, с. 699
- 5 Гурбатов С. Н., Санчев А. И. — ЖЭТФ, 1981, 80, № 2, с. 689.

Горьковский государственный университет

Поступила в редакцию
3 ноября 1983 г

УДК 534 222

О СВОЙСТВАХ ТУРБУЛЕНТНОСТИ БЮРГЕРСА НА СТАДИИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ УДАРНЫХ ФРОНТОВ

С. Н. Гурбатов, И. Ю. Демин, А. И. Саичев

Как известно, в нелинейных недиспергирующих средах с высокочастотным затуханием характер эволюции волны определяется соотношением нелинейных и диссипативных эффектов, относительное влияние которых на распространение волны характеризуется числом Рейнольдса Re_0 . При этом обычной является следующая ситуация. Если начальное число Рейнольдса мало, то диссипация преобладает над затуханием и нелинейные эффекты практически не влияют на распространение волны. Если же $Re_0 \gg 1$, то из-за конкуренции нелинейных и диссипативных эффектов в среде формируется пилообразный профиль, однако из-за диссипации энергии на ударном фронте и его расплывании сильнонелинейный режим сменяется на режим линейного затухания.

В настоящей работе показано, что при распространении случайных волн, в спектре которых присутствуют низкочастотные компоненты, возможна и обратная ситуация, когда волна из линейного режима выходит на сильнонелинейный режим. Мы будем рассматривать трансформацию случайного поля $u(x, t)$, описываемого уравнением Бюргерса (УБ) [1]

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u(x, t=0) = u_0(x), \quad (1)$$

которое широко используется как модельное уравнение в теории турбулентности, так и в нелинейной акустике [2]. При шумовом поле $u_0(x)$ законы трансформации статистических характеристик поля $u(x, t)$ существенно зависят от значения энергетического спектра начального поля на нулевой частоте $S_0(0) = D$ [1, 3-5], где

$$D = \int_{-\infty}^{\infty} B_0(\rho) d\rho, \quad B_0(\rho) = \langle u_0(x) u_0(x + \rho) \rangle \quad (2)$$

и является инвариантом уравнения (1). В вырожденном случае $D=0$ (точнее, $S_0(k) \sim k^n$, $n \gg 2$, $k \rightarrow 0$), сильнонелинейный режим реализуется, лишь если начальное число Рейнольдса $Re_0 \sim \sigma_0 l_0 / \nu \gg 1$, где σ_0 и l_0 — характерные амплитуда и пространственный масштаб начального поля. Из-за диссипации на ударных фронтах при $t > t_n$ волна выходит на линейный режим затухания, причем если для периодического сигнала $t_n \sim t_n Re_0$, то для шумового — $t_n \sim t_n \exp\{Re_0^2\}$ [3], где $t_n \sim l_0 / \sigma_0$ — характерное время развития нелинейных эффектов. Связано это с тем, что слияние ударных фронтов увеличивает характерный масштаб шумового поля и весьма существенно замедляет относительное уширение ударных фронтов.

Покажем, что для турбулентности Бюргерса (ТБ) с $D \neq 0$ сильнонелинейный режим, т. е. режим хаотически пилообразных волн, рано или поздно реализуется даже в случае, если начальное число Рейнольдса $Re_0 \ll 1$. Действительно, пусть $Re_0 \ll 1$. Тогда в (1) можно пренебречь нелинейным членом, и из-за сглаживания мелких масштабов поля $u(x, t)$ за счет вязкой диссипации его пространственный масштаб $l(t)$ будет увеличиваться, а энергия $\sigma^2(t) = \langle u^2(x, t) \rangle$ затухать. При $t > t_{днс} \sim l_0^2 / \nu$ из (1) имеем $l(t) = \sqrt{2\nu t}$ и $\sigma^2(t) = \sigma_0^2 l_0^2 (l(t))^{-1}$. При этом эффективное число Рейнольдса

$$Re(t) = \sigma(t) l(t) / \nu \simeq Re_0 \sqrt[4]{t/t_{днс}}$$

растет с течением времени и на временах $t > t_n / \text{Re}_0^3$ становится больше единицы, т. е. нелинейные эффекты начинают играть определяющую роль.

Вступающие затем нелинейные процессы только убыстряют рост эффективного числа Рейнольдса. Покажем это, используя точное решение УБ — решение Хопфа — Коула [6, 7]. Перейдем в решении Хопфа—Коула к безразмерной координате $\bar{x} = x/l(t)$, где $l(t) = \sqrt[3]{Dt^2}$:

$$u(\bar{x}, t) = \frac{l(t)}{t} \frac{\int_{-\infty}^{\infty} (\bar{x} - \bar{y}) \exp \{-\text{Re}(t) G(\bar{x}, \bar{y}, t)\} d\bar{y}}{\int_{-\infty}^{\infty} \exp \{-\text{Re}(t) G(\bar{x}, \bar{y}, t)\} d\bar{y}}; \quad (3)$$

$$G(\bar{x}, \bar{y}, t) = V(x, y, t) + (1/2) (\bar{x} - \bar{y})^2, \quad (4)$$

$$V = \int_{\bar{x}}^{\bar{y}} \bar{u}_0(z, t) dz.$$

В выражениях (3), (4) $\text{Re}(t)$ — эффективное число Рейнольдса:

$$\text{Re}(t) \simeq (l^2(t)/2vt) = \sqrt[3]{D^2 t^8 / 8 \nu^3}, \quad (5)$$

а $\bar{u}_0(z, t)$ связано с начальным полем $u_0(z)$ и его корреляционной функцией как

$$\bar{u}_0(z, t) = (t/l(t)) u_0(l(t)z), \quad \langle \bar{u}_0(z, t) \bar{u}_0(z + \lambda, t) \rangle = (t^2/l^2(t)) B_0(l(t)\lambda) \quad (6)$$

и имеет длину корреляции $\lambda_0 = l_0/l(t)$. При $\lambda_0 \ll 1$ ($t \gg t_n$) $\bar{u}_0(z, t)$ стремится к дельта-коррелированному полю, а $V(x, y, t)$ — к винеровскому процессу, все статистические свойства которого полностью определяются его первыми моментами

$$\langle V \rangle = 0, \quad \langle V^2 \rangle = |\bar{x} - \bar{y}|$$

и не зависят от времени. В то же время при $\text{Re}(t) \gg 1$ ($t \gg t_n / \text{Re}_0^3$) из (3) следует формула

$$u(\bar{x}, t) = (l(t)/t) (\bar{x} - \bar{y}(\bar{x}, t)), \quad (7)$$

где $\bar{y}(\bar{x}, t)$ — координата абсолютного минимума по \bar{y} функции $G(\bar{x}, \bar{y}, t)$ (4). Таким образом, на достаточно больших временах и в масштабе $l(t)$ ТБ с $D \neq 0$ ведет себя как разрывная волна с $\nu \rightarrow 0$. Действительно, на стадии пилообразных волн характерная ширина ударного фронта равна $\delta \sim \nu t / l(t)$ и эффективное число Рейнольдса (5) равно отношению внешнего масштаба $l(t)$ к ширине ударного фронта δ . Изменение $\text{Re}(t)$ обусловлено конкуренцией двух эффектов: уширением ширины ударного фронта δ и увеличением внешнего масштаба $l(t)$ из-за слияния разрывов. Как видно, при $D \neq 0$ последний эффект преобладает над уширением и поэтому при $t \rightarrow \infty$ относительная ширина ударного фронта уменьшается.

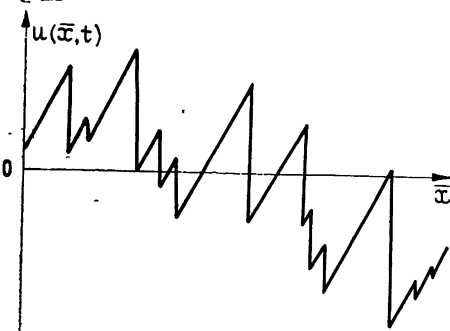


Рис. 1.

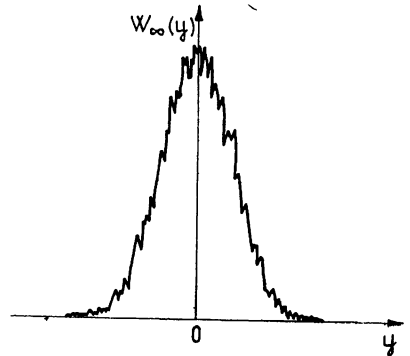


Рис. 2

Из сказанного следует еще, что при $\text{Re}(t) \gg 1$, $\lambda_0 \ll 1$ ($t \gg \max\{t_n, t_n / \text{Re}_0^3\}$) все статистические характеристики ТБ становятся автомодельными и определяются ста-

стистическими свойствами винеровского процесса $V(\bar{x}, \bar{y}, \infty)$ Физически автомодельность связана с многократным слиянием разрывов, приводящим к потере информации о тонкой структуре начального спектра. В частности, корреляционная функция и вероятностное распределение ТБ представимы в виде

$$B(\rho, t) = (t^2(t)/t^2) \langle y^2 \rangle R(\rho/l(t)), \quad R(0) = 1,$$

$$W(u; t) = (t/l(t)) W_\infty(ut/l(t)), \quad \langle y^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} y^2 W_\infty(y) dy.$$

В настоящей работе приведены результаты численного эксперимента на основе решения (4), (7), т. е. с помощью отыскания координат абсолютного минимума функции $G(\bar{x}, \bar{y}, \infty)$ и дальнейшей статистической обработки полученного решения для нахождения функций $R(\lambda)$, $W_\infty(t)$ и константы $\langle y^2 \rangle$. Типичный вид реализации $u(\bar{x}, t)$ приведен на рис. 1. На рис. 2. приведено вероятностное распределение $W_\infty(y)$, дисперсия которого, как показал численный расчет, $\langle y^2 \rangle = 0,669$ Из расчетов следует, что вероятностное распределение $W_\infty(y)$ в отличие от случая $D=0$, где распределение гауссово [2], хотя и не сильно, отличается от гауссова. В частности, четвертый кумулянтный коэффициент, характеризующий отличие от гауссовости, $\gamma_4 = \alpha_4 / \langle y^2 \rangle^2$ равен $(-0,1419)$.

Физически условие $D \neq 0$ соответствует тому, что в спектре входного поля присутствуют пространственные компоненты со сколь угодно большими периодами. Именно наличие таких компонент, для каждой из которых эффективное число Рейнольдса возрастает с уменьшением ее периода, и приводит к выводу ТБ на сильноточный автомодельный режим вне зависимости от начального числа Рейнольдса

Авторы благодарны А. Н. Малахову за полезное обсуждение работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Burgers J. M. The nonlinear diffusion equation — Dordrecht, 1974.
2. Руденко О. В., Солюян С. И. Теоретические основы нелинейной акустики — М.: Наука, 1975.
3. Kida Sh.— J. Fluid Mech., 1979, 93, № 2, p. 337.
4. Якушкин И. Г.— Изв. вузов — Радиофизика, 1981, 24, № 1, с. 59.
5. Гурбатов С. Н., Саичев А. И. — ЖЭТФ, 1981, 80, № 2, с. 689
6. Norf E — Comm. Pure Appl. Math., 1950, 3, № 3, p. 201.
7. Cole J. D.— Quart. Appl. Math., 1951, 9, № 5, p. 226.

Горьковский государственный университет

Поступила в редакцию
23 ноября 1983 г.

УДК 621.372.221

ОБ ИЗЛУЧЕНИИ НЕПОДВИЖНЫХ ИСТОЧНИКОВ МАГНИТНОГО ПОЛЯ В СРЕДАХ С МЕНЯЮЩЕЙСЯ МАГНИТНОЙ ПРОНИЦАЕМОСТЬЮ

В. А. Давыдов

В средах с меняющимся во времени тензором диэлектрической проницаемости возможно излучение неподвижных источников электрического поля — зарядов, диполей и т. д. Впервые на эту возможность было указано в работе [1], где рассматривалось излучение неподвижного точечного заряда при мгновенном переходе изотропной среды в одноосный кристалл. В [2] предложена теория возмущений для расчета энергии излучения в слабоанизотропных нестационарных средах и рассмотрено излучение ряда неподвижных источников в средах с периодическим и плавным изменением анизотропии во времени. В [3] рассматривалось излучение неподвижного заряда при изменении направления оптической оси одноосного кристалла. Проведенные исследования позволяют сформулировать условия возможности излучения неподвижных источников электрического поля следующим образом: неподвижный заряженный источник может излучать в том случае, если в среде, где он находится, возникают либо меняются выделенные направления, либо диэлектрические свойства среды меняются во времени вдоль некоторых выделенных направлений. Энергия на излучение при этом черпается от «внешней силы», которая создает нестационарность в среде. Если среда меняет свою диэлектрическую проницаемость, оставаясь при этом изотропной, неподвижный заряженный источник не излучает.