ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XXVII, № 8 РАДИОФИЗИКА 1984

УДК 533 922.

ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОЕ РАВНОВЕСИЕ МОДУЛИРОВАННОГО ЭЛЕКТРОННОГО ПУЧКА В ПЛАЗМЕ

В. Г. Дорофеенко, В. Б. Красовицкий

Найдены условия равновесия электронного пучка, предварительно сформированного в виде сгустков, в холодной плазме. Коллективное электрическое поле, возбуждаемое пучком в плазме, компенсирует силы кулоновского расталкивания и дефокусирующий градиент кинетического давления в сгустках, если частота модуляции пучка меньше плазменной частоты. В условиях резонанса найдена форма пространственной потенциальной ямы и условия ее возникновения в зависимости от параметров пучка и плазмы Показано, что продольное магнитное поле подавляет поперечное движение электронов плазмы и распределение потенциала в пространстве становится анизотропным Наличие столкновительной диссипации в плазме сопровождается появлением фазовой расстройки пучка с волной и срывом режима самофокусировки при совпадении частоты модуляции с ленгмюровской частотой плазмы

В работах [1] и [2] теоретически и экспериментально показана возможность радиальной самофокусировки глубоко промодулированного электронного пучка в плазме. Существо этого эффекта заключается в том, что коллективное электрическое поле (волна потенциала), возбуждаемое пучком в плазме, захватывает электронные сгустки и в условиях резонанса компенсирует кулоновское расталкивание и поперечный градиент кинетического давления в пучке. Так как самофокусировка пучка возникает при $\omega_{м}<\omega_p$ ($\omega_{м}$ и ω_p — модуляционная и ленгмюровская частоты), то эффект может быть интерпретирован как кулоновское притяжение электронов в плазме с отрицательной диэлектрической проницаемостью $\varepsilon=1-\omega_p^2/\omega_{м}^2<0$ [1]. Так как плотность энергии фокусирующего поля растет с увеличением плотности пучка, то этот способ самофокусировки пучка в плазме может быть использован для осуществления УТС на релятивистском электронном пучке [3].

При распространении в плазме одномерного модулированного пучка электронов в условиях $\varepsilon<0$ возникает периодическая продольная потенциальная яма, захватывающая электронные сгустки, и в системе отсчета пучка устанавливается электростатическое равновесие [4]. Физически очевидно, что в отсутствие магнитного поля должно установиться пространственное распределение потенциала и найденные в работах [2, 4] решения являются лишь предельными случаями неодномерной задачи.

В настоящей работе получено двумерное (аксиально-симметричное) решение задачи об электростатическом равновесии модулированного электронного пучка в плазме, учитывающее захват электронов полем волны как в продольном, так и в поперечном направлениях. Возбуждаемая пучком волна плотности заряда вытесняет электроны плазмы из объема пучка, и возникающий при этом нескомпенсированный ионный заряд создает пространственную потенциальную яму для электронных сгустков. Ее глубина пропорциональна параметру $\rho_0 l^2 |\varepsilon|^{-1}$ (ρ_0 — плотность пучка), а размеры сгустков определяются пространственным периодом модуляции пучка l*.

В продольном магнитном поле пространственная потенциальная яма становится анизотропной, так как электроны плазмы вытесняются коллективным полем в основном вдоль магнитных силовых линий. Поэтому в резонансном случае $|\varepsilon| \ll 1$ даже относительно слабое магнитное поле $|\varepsilon|^{1/2}\omega_p \ll \omega_B \ll \omega_p$ (ω_B — гирочастота электрона) значительно деформирует потенциальную яму.

По мере приближения к резонансу увеличение глубины потенциальной ямы сопровождается уходом фазы волны и срывом режима самофокусировки. Поэтому величина расстройки по частотам ограничена со стороны малых значений неравенством $|\varepsilon| \gg \nu/\omega_p$, где ν — частота соударений электронов плазмы с ионами, учитывающая диссипацию энергии в плазме.

Пусть пучок электронов с плотностью ρ распространяется в холодной плазме. Считая уравнения движения электронов плазмы линейными, представим уравнение для самосогласованного потенциала в системе отсчета пучка в виде

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial t} - v_0 \frac{\partial}{\partial z}\right)^2 + \omega_p^2\right] \Delta\varphi = 4\pi e \left(\frac{\partial}{\partial t} - v_0 \frac{\partial}{\partial z}\right)^2 \rho, \tag{1}$$

где Δ — оператор Лапласа, $e>0$, а плазма движется со скоростью — v_0.

Рассмотрим статическое аксиально-симметричное решение (1), полагая $\partial/\partial t = 0$ и $\rho = \rho(r, z)$. Учитывая, что поле пучка является периодической функцией координаты z, представим потенциал в виде ряда Фурье по этой переменной и преобразуем уравнение к виду

$$\Delta\varphi = 4\pi e \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{n^2}{n^2 - \alpha^2} \rho_n(r) \exp\left(\frac{2\pi i n z}{l}\right),$$

$$\rho_n(r) = \left\langle \rho(r, z') \exp\left(-\frac{2\pi i n z}{l}\right)\right\rangle, \tag{2}$$

$$\alpha = \omega_p/\omega_{\text{м}}, \quad \omega_{\text{м}} = 2\pi v_0/l, \quad \langle\ldots\rangle = l^{-1}\int_{-l/2}^{l/2} \ldots dz',$$

l — пространственный период пучка.

Вычисляя в (2) стандартные суммы [5], приходим к интегральному уравнению

$$\Delta\varphi = 4\pi e \rho_{\text{эфф}},$$
$$\rho_{\text{эфф}} = \rho(r, z) - \frac{\alpha\pi}{\sin \alpha\pi}\left\langle \rho(r, z') \cos\left[2\pi\alpha\left(\frac{|z - z'|}{l} - \frac{1}{2}\right)\right]\right\rangle \tag{3}$$

для периодической части потенциала, соответствующей высокочастотному полю в системе отсчета плазмы. Монотонная составляющая $\langle\varphi\rangle$ отсутствует из-за экранировки статического поля холодной плазмой $\langle\rho_{\text{эфф}}\rangle = 0$.

В условиях резонанса $\alpha \to 1$ уравнение (3) существенно упрощается и принимает вид

---

* Отметим, что система плазма — модулированный пучок неустойчива относительно раскачки ленгмюровских колебаний. Однако инкремент мал по сравнению с обычным пучковым, если выполнено условие $\rho_p \delta^3 \ll \rho_0$ (ρ_p — плотность плазмы) [4]

$$\Delta\varphi = -\frac{4\pi e}{\delta l}\cos\frac{2\pi z}{l}\left\langle \rho(r, z')\cos\frac{2\pi z'}{l}\right\rangle. \qquad (4)$$

При переходе от (3) к (4) в правой части опущено слагаемое $\rho(r, z)$ и предполагается выполненным условие $\rho(r, z) = \rho(r, -z)$, $\delta = 1 - \omega_M/\omega_p > 0$.

Для определения зависимости плотности захваченных электронов от потенциала необходимо конкретизировать функцию распределения, которая в самом общем виде является произвольной функцией интегралов движения и зависит от способа создания физической системы. Поэтому, следуя работе [6], будем считать*

$$f(v) \sim (e\varphi - mv^2/2)^{1/2}. \qquad (5)$$

Интегрируя (5) по скоростям с весом $4\pi v^2$ в пределах от нуля до $(2e\varphi/m)^{1/2}$, находим плотность захваченных частиц

$$\rho = \rho_0(\varphi/\varphi_m)^2, \qquad (6)$$

где ρ_0 — плотность электронов пучка на дне потенциальной ямы φ_m**.

Подставим (6) в (4) и, учитывая вид правой части уравнения, будем искать его решение в виде

$$\varphi(r, z) = \varphi_m\Phi(r)\cos(2\pi z/l). \qquad (7)$$

В результате получаем нелинейное уравнение для радиальной части потенциала:

$$\xi^{-1}(\xi\Phi')' = -\beta\Phi^2 + \Phi, \qquad (8)$$

где $\beta = 2e\rho_0 l^2/3\pi^2\delta\varphi_m$, а штрихом обозначена производная по переменной $\xi = 2\pi r/l$. При вычислении интеграла в (4) учтено условие захвата электронов волной, которое при $\Phi > 0$ соответствует области $|z| \leqslant l/4$.

Для рассматриваемой задачи физический смысл имеет положительное решение (8), достигающее максимума $\Phi(0) = 1$ и $\Phi'(0) = 0$ на оси пучка и монотонно спадающее с ростом ξ пропорционально функции Макдональда $K_0(\xi)$.

Так как интеграл (8) найти не удается, исследуем уравнение (8) качественно, используя аналогию с задачей о движении механической частицы в потенциальном поле [7] и опуская «силу трения» $\xi^{-1}\Phi$. Представим правую часть (8) в виде $-\partial W/d\Phi$, где $W = \beta\Phi^3/3 - \Phi^2/2$ — эффективная потенциальная энергия. График этой функции, нулевые точки которой есть $\Phi_1 = 0$ и $\Phi_2 = 3/2\beta$, приведен на рис. 1. При $W > 0$ движение является инфинитным, а при $W < 0$ — периодическим. В случае $W = 0$ имеет место солитонное решение, обладающее упомянутыми выше свойствами, причем точка Φ_2 соответствует оси пучка, где по определению $\Phi = 1$ и, следовательно, $\beta = 3/2$.

Численное интегрирование уравнения (8) (с учетом $\xi^{-1}\Phi$) показывает, что солитонному решению соответствует $\beta_{opt} = 2{,}4$, так что глубина потенциальной ямы для каждого сгустка равна:

$$\varphi_m = 0{,}16 e\rho_0 l^2\delta^{-1}. \qquad (9)$$

---

* Функция распределения вида (5) качественно правильно описывает распределение захваченных частиц в потенциальной яме волны. Расчеты, проведенные в [6] для функций распределения, отличных от [5], привели к качественно тем же результатам.

** В отличие от одномерного случая, когда $\rho \sim \varphi$ [6], наша функция распределения сферически симметрична в пространстве скоростей и зависимость плотности от потенциала является квадратичной.

При отклонении параметра β от оптимального значения характер решения изменяется и нужная форма кривых отсутствует (см. рис. 2). Существенно, что условие захвата электронов в потенциальную яму (5) выполняется лишь при $\delta > 0$.

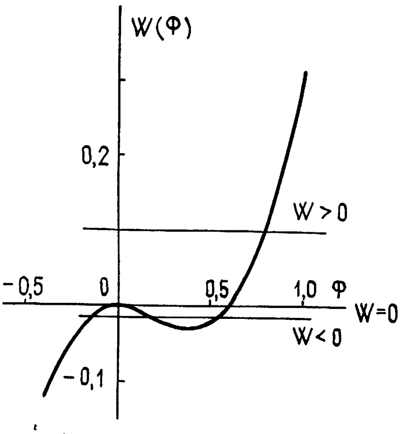

Рис. 1.

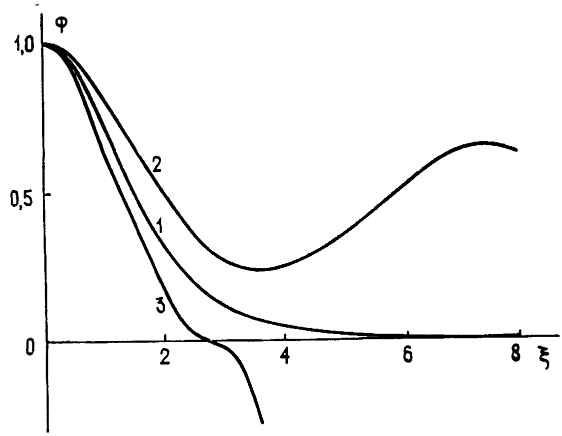

Рис. 2.

Рис. 2 Зависимость потенциала от координаты для разных значений параметра β: *1* — 2,4; *2* — 2, *3* — 3.

Таким образом, электронный пучок, модулированный частотой $\omega_{\text{м}}$, близкой к ленгмюровской частоте плазмы, $\omega_p - \omega_{\text{м}} \ll \omega_p$, создает для себя пространственную потенциальную яму, характерные размеры которой в продольном и поперечном измерениях соответственно равны $l/2$ и l/π. Вид эквипотенциальных поверхностей иллюстрирует рис. 3.

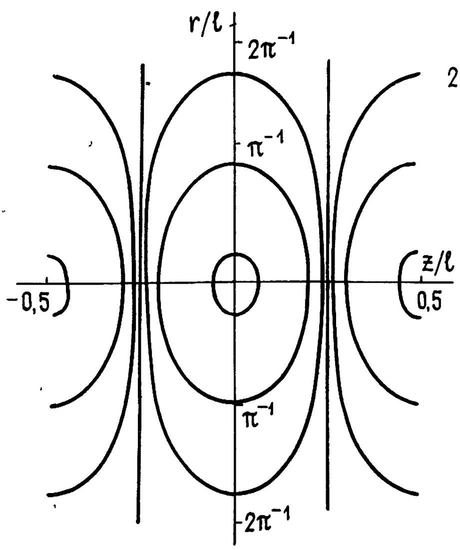

Рис. 3.

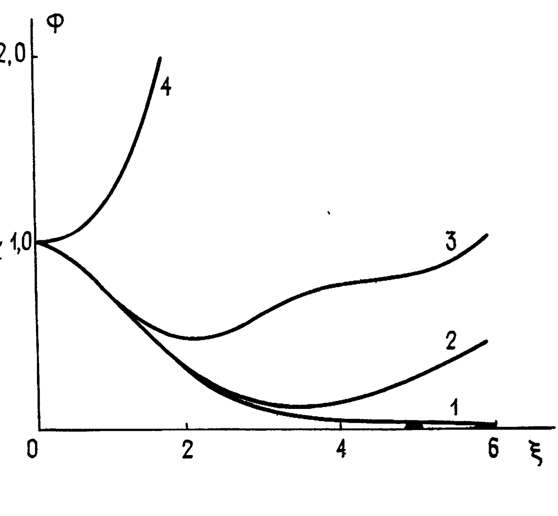

Рис. 4.

Рис. 3. Эквипотенциальные поверхности на пространственном периоде пучка.

Рис. 4. Кривые, иллюстрирующие отклонение решения от солитонного при разных значениях параметра γ/δ: *1* — 0; *2* — 0,04; *3* — 0,42, *4* — соответствует резонансу $\delta = 0$

Продольное магнитное поле $\boldsymbol{B}$ и наличие столкновительной диссипации в плазме могут существенно изменить геометрию потенциальной ямы. Учет этих эффектов не представляет принципиальных трудностей и сводится к удержанию соответствующих слагаемых в уравнениях движения электронов плазмы. Существенно, что при нашем выборе функции распределения в виде (5) зависимость плотности захваченных частиц от потенциала не изменяется, так как интеграл энергии не зависит от B^*. Одновременно можно пренебречь кулоновскими столкновениями электронов пучка с плазмой из-за их большой скорости [9].

Как показано выше, в условиях резонанса в системе плазма — модулированный пучок доминирует одна гармоника поля. Одновременно при $\delta \to 0$ возникает необходимость учитывать, наряду с амплитудой $\Phi(r)$, фазу волны $\theta(r)$:

$$\varphi(r, z) = \varphi_m \Phi(r) \cos[2\pi z/l + \theta(r)],$$

и порядок системы уравнений по сравнению с (8) повышается:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\xi}(\xi\Phi')' - \left[\theta'^2 + \frac{\delta^2(1+\eta)+\gamma^2}{\delta^2(1+\eta)^2+\gamma^4}\right]\Phi = -\beta\Phi^2, \\ &(\xi\Phi^2\theta')' = -\frac{\gamma}{\delta}\xi\Phi^2\left[\beta\Phi + \frac{\eta\delta^2}{\delta^2(1+\eta)^2+\gamma^2}\right]. \end{aligned} \tag{10}$$

Штрихом обозначена производная по переменной $\xi = 2\pi r/l$, а безразмерные параметры есть

$$\beta = \frac{2}{3\pi^2}\frac{e\rho_0 l^2}{\varphi_m}\frac{\delta}{\delta^2(1+\eta)^2+\gamma^2}, \qquad \eta = \frac{\omega_B}{2\omega_p^2\delta}, \qquad \omega_B = \frac{eB}{mc},$$

$$\gamma = \nu/2\omega_м \ll 1, \qquad \omega_B/\omega_p \ll 1.$$

Частота соударений электронов плазмы с ионами учитывается в уравнениях движения в виде силы трения [9].

В отсутствие диссипации $\gamma = \theta' = 0$ из (8) и (10) следует, что магнитное поле $\eta > 0$ деформирует пространственную потенциальную яму, изменяя ее радиус,

$$r_B = (l/2\pi)(1+\eta)^{1/2}, \tag{11}$$

но оставляет неизменным характер решения. При $\eta \gg 1$, когда поперечное движение электронов плазмы «заморожено», потенциальная яма близка к одномерной продольной, так как магнитное поле не влияет на процесс вытеснения электронов плазмы коллективным полем вдоль пучка.

Наличие диссипации энергии в плазме** принципиальным образом изменяет вид решения для потенциала, так как при $\gamma > 0$ система (10) не имеет солитонного решения. В этом можно убедиться путем простого качественного анализа, используя соотношение

$$\theta' = -\frac{\gamma}{\delta}\frac{1}{\xi\Phi^2}\int_0^\xi \Phi^2\left[\beta\Phi + \frac{\eta\delta^2}{\delta^2(1+\eta)^2+\gamma^2}\right]\xi d\xi, \tag{12}$$

следующее из второго уравнения (10).

---

* Ситуация изменяется, если захваченный сгусток электронов вращается как целое с угловой частотой Ω, так как в этом случае $f(\mathbf{v}) \sim (e\varphi - mv^2/2 - \mathbf{\Omega M})^{1/2}$ зависит от аксиального момента M [8] и при $\Omega < \omega_B$ или $\Omega > \omega_B$ магнитное поле фокусирует или дефокусирует электроны.

** Очевидно, что стационарное решение в плазме с конечной диссипацией может иметь место лишь при наличии внешнего источника, восполняющего потери энергии пучка и поддерживающего неизменной его скорость

Ясно, что при $\gamma/\delta \ll 1$ и $\Phi(0)=1$, $\Phi'(0)=\theta'(0)=0$ решение (10) асимптотически близко к солитонному решению уравнения (8) до тех пор, пока $\theta'^2 \ll 1$ и соответствующее слагаемое в первом уравнении может быть опущено. Однако достаточно далеко от оси пучка $\xi \gg 1$, где $\Phi \to 0$, а интеграл в (12) остается конечным, это условие нарушается при $\xi\Phi^2 \approx \gamma/\delta$, и уход фазы волны сказывается на изменении ее амплитуды. Соответственно в первом уравнении (10) появляется «точка поворота», в которой потенциал достигает минимального значения (см. рис. 4), а затем растет с увеличением координаты. Поскольку вблизи этой точки $\xi_{\min}$ справедлива асимптотика $\Phi \approx \approx K_0(\xi) \approx \xi^{-1/2} e^{-\xi}$, то из условия $|\theta'| \approx 1$ следует

$$\xi_{\min} \approx \ln(\delta/\gamma)^{1/2}. \tag{13}$$

Таким образом, в плазме с диссипацией энергии $\gamma > 0$ нет солитонного решения, соответствующего пространственной потенциальной яме. Однако достаточно далеко от резонанса $\delta/\gamma \gg 1$ существует асимптотическое решение, близкое к солитонному. Это неравенство ограничивает глубину потенциальной ямы (9) со стороны малых значений параметра δ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Красовицкий В. Б — Письма в ЖЭТФ, 1969, **9**, с. 679.
2. Гладкий А. М., Коваленко В. П., Юшманов П. Н.— Письма в ЖЭТФ, 1976, **24**, с. 533.
3. Winterberg F.— Atomkernenergie, 1973, **22**, Lfg. 2, S. 142.
4. Коваленко В. П, Юшманов П. Н.— Физика плазмы, 1977, **3**, с 1284.
5. Градштейн И. С, Рыжик И. М. Таблицы интегралов, рядов, сумм и произведений — М.:. Физматгиз, 1962, с. 54.
6. Bohm D, Gross E.— Phys. Rev, 1949, **75**, p. 1851.
7. Кадомцев Б. Б Коллективные явления в плазме.— М: Наука, 1976, с 108.
8. Дэвидсон Р. Теория заряженной плазмы — М.: Мир, 1978, с. 117.
9. Коваленко В П.— Физика плазмы, 1980, **5**, с. 1092.

Ростовский государственный университет

Поступила в редакцию 29 июля 1983 г.

THE ELECTROSTATIC EQUILIBRIUM OF A MODULATED ELECTRON BEAM IN A PLASMA

V. G. Dorofeenko, V. B. Krasovitskij

The conditions of the equilibrium of an electron beam previously formed in the form of bunches in a cold plasma have been found. The collective electric field excited by the beam in the plasma compensates the defocusing gradient of the kinetic pressure in the bunches if a beam modulation frequency is less than a plasma one. Under the resonance conditions the form of a spatial potential wall and the conditions of its arising according to beam and plasma parameters are found. A longitudinal magnetic field suppresses the transverse motion of plasma electrons, and the space distribution of the potential becomes anisotropic. The presence of collisional dissipation in the plasma is accompanied by the phase detuning of the beam with the wave and the break-down of a self-focusing condition.