ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XXVII, № 8 РАДИОФИЗИКА 1984

УДК 537 87.

ТЕОРЕМЫ ОБ ОТРАЖЕНИИ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ АНИЗОТРОПНЫХ СРЕД

В. Н. Красильников, А. В. Тюхтин

Рассмотрена задача о поле, подчиняющемся произвольному дифференциальному уравнению (или системе уравнений) в полупространстве и граничному условию Дирихле или Неймана на плоскости. Построены теоремы о зеркальном отражении для точечного источника электромагнитных волн в движущемся диэлектрике, магнитоактивной плазме и кристалле. Показано, что в некоторых случаях может существовать также и теорема об отражении с непрерывным продолжением свойств среды за зеркало

Законы отражения электромагнитных волн от идеального плоского зеркала, расположенного в однородной изотропной среде, известны под названием теорем об отражении. Целесообразно использовать этот термин и в случае более сложных сред, так, в [1] построены теоремы об отражении для движущегося диэлектрика. Если дополнительный («мнимый») источник расположен в зеркальной точке и с точностью до знака совпадает с действительным, то естественно использовать термин «теорема о зеркальном отражении». Мы рассмотрим, прежде всего, достаточно общие правила построения таких утверждений.

1. Пусть в полупространстве $z>0$ скалярное поле U подчиняется некоторому (вообще говоря, нелинейному) дифференциальному уравнению первого или второго порядка по z и произвольного порядка по x, y, t

$$N(x, y, z, t, U(x, y, z, t)) = f(x, y, z, t), \tag{1}$$

граничному условию Дирихле на плоскости $z=0$

$$U(x, y, 0, t) = 0 \tag{2}$$

и условиям на бесконечности (при x, $y \to \pm\infty$, $z \to +\infty$), обеспечивающим единственность решения задачи. Здесь (x, y, z) — координаты точки наблюдения, t — время, $f(x, y, z, t)$ —функция, описывающая источник поля, отличная от нуля лишь в области $z>0$ Задачу (1), (2) назовем исходной. Далее, ради краткости, не будем писать зависимость от x, y, t.

Рассмотрим уравнение

$$\tilde{N}(z, \tilde{U}(z)) = \tilde{f}(z), \tag{3}$$

в котором оператор $\tilde{N}$ определен во всем пространстве (кроме, быть может, плоскости $z=0$) и тождествен оператору N в области $z>0$, причем

$$\tilde{N}(z, \tilde{U}(z)) = (-1)^j \tilde{N}(-z, -\tilde{U}(z)); \tag{4}$$

$$\tilde{f}(z) = f(z) + (-1)^j f(-z), \tag{5}$$

где $j=0,1$. Очевидно, что

$$\tilde{f}(-z) = (-1)^j \tilde{f}(z). \tag{6}$$

Для уравнения, описывающего поле в какой-либо среде, продолжение оператора N на область $z < 0$ в соответствии с правилом (4) может привести к разрыву свойств среды на месте идеального зеркала. Тогда в плоскости $z = 0$ следует использовать определенные условия сшивания, которые вытекают из физических соображений. Рассмотрим такую ситуацию, когда эти условия имеют вид

$$\tilde{U}(+0) = \tilde{U}(-0); \tag{7}$$

$$F(z, \tilde{U}(z))_{z=+0} = F(z, \tilde{U}(z))_{z=-0}, \tag{8}$$

причем оператор $F(z, \tilde{U}(z))$ обладает свойством

$$F(z, \tilde{U}(z)) = \pm F(-z, -\tilde{U}(z)). \tag{9}$$

Функция $\tilde{U}$ должна удовлетворять соответствующим условиям на бесконечности при $x, y, z \to \pm\infty$. Предполагается существование и единственность решения задачи (3), (7), (8), которую мы назовем вторичной

Нетрудно доказать, что

$$\tilde{U}(z) = -\tilde{U}(-z). \tag{10}$$

Действительно, заменяя в (3), (7), (8) z на $-z$ и пользуясь соотношениями (4), (6), (9), получим для функции $V(z) = -\tilde{U}(-z)$ задачу (3), (7), (8). Вследствие единственности ее решения $V(z) = \tilde{U}(z)$.

В силу (7) из (10) следует, что $\tilde{U}(0)=0$.

Таким образом, поле $\tilde{U}$ удовлетворяет уравнению (1) в области $z > 0$ и условию (2) при $z = 0$, и, следовательно, $\tilde{U} = U$ в верхнем полупространстве. Вторичная задача при $z > 0$ эквивалентна исходной, если имеют место соотношения (4), (5), (9).

Аналогично можно рассмотреть задачу с условием Неймана:

$$\partial U/\partial z|_{z=0} = 0. \tag{11}$$

Пусть «продолженный» на область $z < 0$ оператор $\tilde{N}$ обладает свойством

$$\tilde{N}(z, \tilde{U}(z)) = (-1)^j \tilde{N}(-z, \tilde{U}(z)), \tag{12}$$

а условия сшивания имеют вид

$$\partial\tilde{U}/\partial z|_{z=+0} = \partial\tilde{U}/\partial z|_{z=-0}; \tag{13}$$

$$F(z, \tilde{U}(z))|_{z=+0} = \tilde{F}(z, U(z))|_{z=-0}, \tag{14}$$

причем

$$F(z, \tilde{U}(z)) = \pm F(-z, \tilde{U}(z)). \tag{15}$$

Тогда нетрудно доказать, что функция $\widetilde{U}(z)$ четна по z, а, значит, производная $\partial\widetilde{U}/\partial z$ — нечетна. В силу (13) $\partial\widetilde{U}/\partial z|_{z=0}=0$. Следовательно, исходная задача (1), (11) эквивалентна вторичной (3), (13), (14) при $z>0$, если имеют место соотношения (5), (12), (15).

Таким образом, существование теоремы о зеркальном отражении и вид функции источника во вторичной задаче обусловлены свойствами четности (нечетности) оператора и условий сшивания, которые возникают при определенном продолжении свойств среды за зеркало. В приведенном доказательстве не используется принцип суперпозиции, что позволяет рассматривать и нелинейные поля.

В линейном случае $N(z, U(z))$ удобнее записать в виде $L(z)U(z)$, $\widetilde{N}(z, \widetilde{U}(z))$ — в виде $\widetilde{L}(z)\widetilde{U}(z)$, $F(z, \widetilde{U}(z))$ — в виде $G(z)\widetilde{U}(z)$. Тогда условия (4), (12) переходят в требование $\widetilde{L}(z)=(-1)^k\widetilde{L}(-z)$, а условия (9), (15) — в требование $G(z)=\pm G(-z)$. Источник во вторичной задаче равен

$$\widetilde{f}(z)=f(z)+(-1)^{k+l+1}f(-z), \tag{16}$$

где $l=0$ в случае граничного условия Дирихле и $l=1$ — в случае условия Неймана. Поля обоих источников — действительного $f(z)$ и мнимого $(-1)^{k+l+1}f(-z)$ — подлежат расчету во всем пространстве в соответствии с уравнениями поля, разными при $z>0$ (оператор $L(z)$) и при $z<0$ (оператор $(-1)^kL(-z)$), условиями на бесконечности и условиями сшивания при $z=0$. Разумеется, полученная теорема справедлива и в том частном случае, когда плоскость $z=0$ во вторичной задаче не является границей раздела двух сред.

Из доказанного вытекает, в частности, теорема о зеркальном отражении для поля, подчиняющегося уравнению Гельмгольца ($L(x, y, z)=\Delta+\varkappa^2(x, y, z)$). Продолжая функцию $\varkappa^2(x, y, z)$ на область $z<0$ четным по z образом, мы получим четный по z оператор $\widetilde{L}(x, y, z)$. Типичными условиями сшивания при $z=0$ являются условия непрерывности $\widetilde{U}$ и $\partial\widetilde{U}/\partial z$. Из (16) следует, что мнимый источник равен $(-1)^{l+1}f(-z)$. Например, для электромагнитного поля в неоднородном изотропном диэлектрике ($\varkappa=\omega c^{-1}\sqrt{\varepsilon}$) U имеет смысл одной из компонент вектора Герца $\mathbf{\Pi}$, а f пропорциональна соответствующей компоненте плотности дипольного момента $\boldsymbol{p}$. В исходной задаче (с идеально проводящей плоскостью) имеют место условия $\Pi_x=\Pi_y=\partial\Pi_z/\partial z|_{z=0}=0$. Следовательно, при произвольной ориентации действительного источника $\boldsymbol{p}(x, y, z)$ мнимый источник равен $\boldsymbol{p}_1=-p_x(x, y, -z)\,\boldsymbol{e}_x-p_y(x, y, -z)\,\boldsymbol{e}_y+p_z(x, y, -z)\,\boldsymbol{e}_z$, причем область $z<0$ заполняется диэлектриком с проницаемостью $\varepsilon_1=\varepsilon(x, y, -z)$. Частным случаем этой теоремы является общеизвестная теорема об отражении в однородной среде ($\varepsilon=\mathrm{const}$).

Доказанные утверждения легко обобщить на случай полей, описываемых несколькими скалярными функциями U_m ($m=1, 2, \ldots, M$). Мы приведем формулировку теоремы о зеркальном отражении для линейного случая. Пусть U_m подчиняются системе M-дифференциальных уравнений первого или второго порядка по z в области $z>0$,

$$\sum_{n=1}^{M} L_{mn}(z)\,U_n(z)=f_m(z), \tag{17}$$

условиям Дирихле $U_m(0)=0$ для $m=1, 2, \ldots, N$ и Неймана $\partial U_m/\partial z|_{z=0}=0$ для $m=N+1, \ldots, M$, а также условиям на бесконечности, обеспе-

чивающим единственность решения. Здесь, как и ранее, не пишем зависимость от x, y, t.

Пусть при продолжении операторов $L_{mn}(z)$ на область $z<0$ возникает система уравнений

$$\sum_{n=1}^{M} \tilde{L}_{mn}(z)\,\tilde{U}_n(z) = \tilde{f}_m(z), \tag{18}$$

причем условиями сшивания в плоскости $z=0$ являются непрерывность $\tilde{U}_m$ для $m=1,2,\ldots,N$ и $\partial\tilde{U}_m/\partial z$ для $m=N+1,\ldots,M$, а также условия вида

$$\sum_{n=1}^{M} G_{mn}(z)\,\tilde{U}_n(z)|_{z=+0} = \sum_{n=1}^{M} G_{mn}(z)\tilde{U}_n(z)|_{z=-0}. \tag{19}$$

Если $\tilde{L}_{mn}(z) = (-1)^{k_m}\tilde{L}_{mn}(-z)$, $G_{mn}(z) = (-1)^{p_m}G_{mn}(-z)$ для $n = 1,2,\ldots,N$ и $\tilde{L}_{mn}(z) = (-1)^{k_m+1}\tilde{L}_{mn}(-z)$, $G_{mn}(z) = (-1)^{p_m+1}\times G_{mn}(-z)$ для $n=N+1,\ldots,M$, причем $\tilde{f}_m(z) = f_m(z)+(-1)^{k_m+1}\times f_m(-z)$, то $\tilde{U}_m(z) = U_m(z)$ в верхнем полупространстве.

2. Рассмотрим частные случаи применения теоремы о зеркальном отражении. Сначала остановимся на отражении от зеркала волн, излученных точечным гармоническим источником в движущемся с постоянной скоростью $\boldsymbol{u}$ диэлектрике, однородном и изотропном в системе покоя. Пусть источник находится в точке $x=0$, $y=0$, $z=z_0>0$. Без ограничения общности положим $u_y=0$*. Поле описывается четырехтензором Герца $\Pi_{\alpha\beta}$, который подчиняется уравнению [2]

$$\left[\Delta + \frac{\omega^2}{c^2} - (n^2-1)\gamma^2\left(\beta_x\frac{\partial}{\partial x} + \beta_z\frac{\partial}{\partial z} - i\frac{\omega}{c}\right)^2\right]\Pi_{\alpha\beta} = \\ = -4\pi\mu P_{\alpha\beta}\,\delta(x)\,\delta(y)\,\delta(z-z_0), \tag{20}$$

где $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{u}c^{-1}$, $\gamma^{-2} = 1-\beta^2$, $n=\sqrt{\varepsilon\mu}$ — показатель преломления среды в системе покоя, $P_{\alpha\beta}$ — четырех-тензор дипольных моментов источника, $\alpha,\beta = 1,2,3,4$.

Как показано в [1], в случае горизонтального электрического диполя (P_{ex} или P_{ey}) решение задачи определяется одной из компонент тензора Герца (Π_{ex} или Π_{ey} соответственно), которую далее будем обозначать как Π. Граничные условия ($E_x=E_y|_{z=0}=0$) сводятся при этом к одному условию Дирихле [1] $\Pi|_{z=0}=0$.

Продолжим оператор уравнения (20) за зеркало четным по z образом. Для этого нужно «заполнить» область $z<0$ диэлектриком, движущимся со скоростью $\boldsymbol{u}_1 = (u_x, 0, -u_z)$. Выражая $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{B}$ через компоненты тензора Герца [2] и пользуясь соотношениями Минковского для $\boldsymbol{H}$ [3], можно показать, что условия непрерывности E_x, E_y, H_x, H_y при $z=0$ в каждом из рассматриваемых случаев (P_{ex} и P_{ey}) сводятся к требованиям:

$$\Pi|_{z=+0} = \Pi|_{z=-0}; \tag{21}$$

$$\frac{\partial\Pi}{\partial z} - \delta\beta_z\left(\beta_x\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\omega}{c}\right)\Pi\Big|_{z=+0} = \frac{\partial\Pi}{\partial z} + \delta\beta_z\left(\beta_x\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\omega}{c}\right)\Pi\Big|_{z=-0}^{**}. \tag{22}$$

---

* Напомним, что моделью зеркала может служить сетчатый экран [1], поэтому, вообще говоря, $u_z \neq 0$

** Выражение для δ приведено в п. 4.

Таким образом, выполнены все условия общей теоремы. Задачу с идеальным зеркалом можно заменить на задачу с дополнительным (мнимым) источником, расположенным в зеркальной точке $x=0$, $y=0$, $z=-z_0$ и работающим в противофазе к действительному. При этом производится зеркальное отражение вектора скорости движения среды (рис. 1).

В случае вертикального электрического источника P_{ez} электромагнитное поле описывается двумя компонентами (Π_{ex} и Π_{ez}), а граничные условия на идеальном зеркале не сводятся к условиям Дирихле или Неймана [1]. Однако можно ввести новые неизвестные функции

$$\varphi = \frac{\partial \Pi_{ez}}{\partial z} + \frac{\partial \Pi_{ex}}{\partial x} + i\,\frac{\omega}{c}\,\frac{n^2-1}{1-n^2\beta^2}\,(\beta_z \Pi_{ez} + \beta_x \Pi_{ex}); \tag{23}$$

$$\begin{gathered}\psi = (n^2 - n^2\beta_z^2 - \beta_x^2)\,\Pi_{ex} + \\ + (n^2-1)\,\beta_x\beta_z\,\Pi_{ez} + i\,\frac{c}{\omega}\,(n^2-1)\,\beta_x\left(\frac{\partial \Pi_{ez}}{\partial z} + \frac{\partial \Pi_{ex}}{\partial x}\right),\end{gathered} \tag{24}$$

для которых имеют место условия Дирихле [1]. Из (20) вытекают следующие уравнения для φ и ψ:

$$D(x, y, z)\,\varphi = -4\pi\mu P_{ez}\left(\frac{\partial}{\partial z} + i\,\frac{\omega}{c}\,\frac{n^2-1}{1-n^2\beta^2}\,\beta_z\right)\delta(x)\,\delta(y)\,\delta(z-z_0); \tag{25}$$

$$D(x, y, z)\,\psi = -4\pi\mu P_{ez}(n^2-1)\,\beta_x\left(i\,\frac{c}{\omega}\,\frac{\partial}{\partial z} + \beta_z\right)\delta(x)\,\delta(y)\,\delta(z-z_0), \tag{26}$$

где $D(x, y, z)$ — оператор уравнения (20). «Заполняя» область $z<0$ диэлектриком, движущимся со скоростью u_1, и рассматривая условия сшивания при $z=0$, можно доказать теорему о зеркальном отражении, при которой мнимый источник работает в фазе с действительным.

Полученные вторичные задачи во всех трех случаях (P_{ex}, P_{ey}, P_{ez}) можно решить с помощью разложения по плоским волнам и непосредственно убедиться в их эквивалентности исходным задачам, рассмотренным в [1]. При этом оказывается, что возникшая в плоскости $z=0$ граница раздела обладает интересным свойством: она не отражает электромагнитные волны (независимо от их частоты и направления распространения). Таким образом, в случае движущегося диэлектрика отраженное поле в исходной задаче равно проходящему полю мнимого источника во вторичной задаче.

Случай магнитного источника сводится к рассмотренному, если представить его как рамку с током. При этом горизонтальный магнитный источник «отражается» в фазе, а вертикальный — в противофазе.

Заметим, что возникновение разрыва свойств среды на месте идеального зеркала связано с невзаимностью относительно направления z*. Действительно, в безграничном движущемся диэлектрике $\Pi_{\alpha\beta}(x, y, z-z_0) \neq \Pi_{\alpha\beta}(x, y, z_0-z)$. Равенство имеет место, только если $u_z=0$, в этом же случае не происходит изменения вектора скорости при его зеркальном отражении.

3. В качестве примера векторного поля рассмотрим гармоническое электромагнитное поле в неоднородной анизотропной среде без дисперсии, характеризуемой постоянной магнитной проницаемостью μ

* Взаимность относительно направления z означает неизменность поля при замене z на z_0 и z_0 на z.

и тензором диэлектрической проницаемости $\hat{\varepsilon}$, зависящим от координат. Вводя вектор Герца по правилу $\boldsymbol{B} = -(i\omega/c)\,\mathrm{rot}\,\Pi$, после несложных преобразований из уравнений Максвелла с источником электрического типа получим

$$\Delta\Pi + (\omega^2/c^2)\,\hat{\varepsilon}\mu\Pi - \nabla\,\mathrm{div}\,\Pi + \hat{\varepsilon}\mu\nabla\Phi = -4\pi\mu\,\boldsymbol{P}_e\,\delta(x)\,\delta(y)\,\delta(z - z_0), \quad (27)$$

где Φ — произвольная дифференцируемая функция, $\boldsymbol{P}_e$ — дипольный момент источника. При этом $\boldsymbol{E} = (\omega^2/c^2)\Pi + \nabla\Phi$.

Так как (27) есть система трех уравнений для четырех неизвестных Π_x, Π_y, Π_z, Φ, то одну из этих функций можно положить равной нулю. Пусть $\Pi_z = 0$. Тогда (27) принимает вид

$$\frac{\partial^2\Pi_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Pi_x}{\partial z^2} - \frac{\partial^2\Pi_x}{\partial x\,\partial y} + \frac{\omega^2}{c^2}\mu\,(\varepsilon_{11}\Pi_x + \varepsilon_{12}\Pi_y) + \quad (28а)$$

$$+ \mu\left(\varepsilon_{11}\frac{\partial\Phi}{\partial x} + \varepsilon_{12}\frac{\partial\Phi}{\partial y} + \varepsilon_{13}\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right) = -4\pi\mu P_{ex}\,\delta(x)\,\delta(y)\,\delta(z - z_0);$$

$$\frac{\partial^2\Pi_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Pi_y}{\partial z^2} - \frac{\partial^2\Pi_y}{\partial x\partial y} + \frac{\omega^2}{c^2}\mu\,(\varepsilon_{21}\Pi_x + \varepsilon_{22}\Pi_y) + \quad (28б)$$

$$+ \mu\left(\varepsilon_{21}\frac{\partial\Phi}{\partial x} + \varepsilon_{22}\frac{\partial\Phi}{\partial y} + \varepsilon_{23}\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right) = -4\pi\mu P_{ey}\,\delta(x)\,\delta(y)\,\delta(z - z_0);$$

$$-\frac{\partial^2\Pi_x}{\partial x\partial z} - \frac{\partial^2\Pi_y}{\partial y\partial z} + \frac{\omega^2}{c^2}\mu\,(\varepsilon_{31}\Pi_x + \varepsilon_{32}\Pi_y) + \quad (28в)$$

$$+ \mu\left(\varepsilon_{31}\frac{\partial\Phi}{\partial x} + \varepsilon_{32}\frac{\partial\Phi}{\partial y} + \varepsilon_{33}\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right) = -4\pi\mu P_{ez}\,\delta(x)\,\delta(y)\,\delta(z - z_0).$$

Граничными условиями на идеально проводящей плоскости являются условия Дирихле:

$$\Pi_x = \Pi_y = \Phi|_{z=0} = 0. \quad (29)$$

Если функции ε_{11}, ε_{22}, ε_{33}, ε_{12}, ε_{21}, μ продолжить на область $z < 0$ четным по z образом, а ε_{13}, ε_{23}, ε_{31}, ε_{32} — нечетным, то операторы уравнений (28а), (28б) будут четны по z, а (28в) — нечетны. Нетрудно показать, что условия сшивания при $z = 0$ удовлетворяют требованиям общей теоремы, и, в соответствии с ней, вертикальный диполь «отражается» в фазе, а горизонтальный — в противофазе. В плоскости $z = 0$ возникает разрыв свойств среды. Он исчезает в том случае, если $\varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = \varepsilon_{31} = \varepsilon_{32} = 0$.

Рассмотрим теперь однородную плазму с внешним магнитным полем $\boldsymbol{H}_0$ Используя выражение для тензора $\hat{\varepsilon}$ (см., например, [4]), нетрудно доказать, что нижнее полупространство следует «заполнить» плазмой, в которой внешнее магнитное поле равно $\boldsymbol{H}_1 = (-H_{0x}, -H_{0y}, H_{0z})$ (рис. 2.). Заметим, что магнитное поле «отражается» не так, как скорость движения диэлектрика (рис. 1). Это отличие связано с тем, что скорость — вектор, а магнитное поле — псевдовектор.

Другим примером анизотропной среды является кристалл. Нетрудно видеть, что его главные оси «отражаются» подобно векторам $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{H}_0$: нужно только «стереть» стрелки на рис. 1 или 2.

4. Рассмотренные варианты теоремы о зеркальном отражении показывают, что для анизотропных сред характерно возникновение

разрыва свойств на месте идеального зеркала, в связи с чем новая граничная задача не дает вычислительных преимуществ по сравнению с исходной. Поэтому интересны иные, незеркальные теоремы об отражении, предполагающие непрерывное продолжение свойств среды за зеркало. В [1] они получены для движущегося диэлектрика. Здесь мы рассмотрим другой способ их построения в более общем случае.

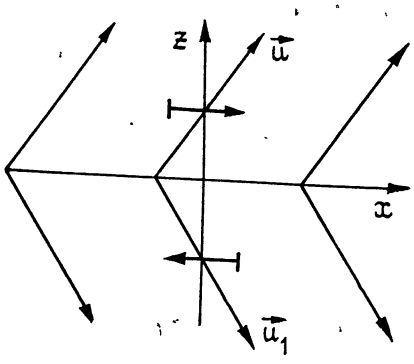

Рис. 1.

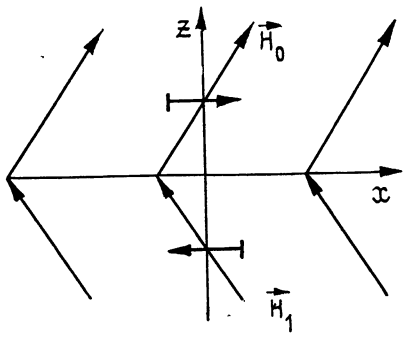

Рис. 2.

Пусть скалярное поле U в области $z > 0$ подчиняется линейному дифференциальному уравнению второго порядка с постоянными коэффициентами

$$a_{ij}U_{x_ix_j} + b_iU_{x_i} + dU = \delta(x)\,\delta(y)\,\delta(z - z_0), \tag{30}$$

условию Дирихле (2) при $z = 0$ и условию на бесконечности при $x, y \to \pm\infty$, $z \to +\infty$. В (30) проводится суммирование по повторяющимся индексам, причем $x_{1,2,3} = x, y, z$. Без ограничения общности считаем $a_{ij} = a_{ji}$.

Введем новые переменные и неизвестную функцию так, чтобы оператор уравнения (30) был четен по z при четном продолжении всех его коэффициентов за зеркало. Переходя в (30) к переменным $\xi_{1,2,3} = \xi, \eta, \zeta$, получим уравнение

$$\begin{gathered}\bar{a}_{kl}U_{\xi_k\xi_l} + \bar{b}_kU_{\xi_k} + \bar{d}U = \\ = (D(\xi, \eta, \zeta)/D(x, y, z))\,\delta(\xi - \xi_0, \eta - \eta_0, \zeta - \zeta_0),\end{gathered} \tag{31}$$

где

$$\bar{a}_{kl} = a_{ij}(\xi_k)_{x_i}(\xi_l)_{x_j}, \quad \bar{b}_k = b_i(\xi_k)_{x_i} + a_{ij}(\xi_k)_{x_ix_j}, \quad \bar{d} = d, \tag{32}$$

$D(\xi, \eta, \zeta)/D(x, y, z)$ — якобиан перехода от x, y, z к ξ, η, ζ, $\xi = \xi_0$, $\eta = \eta_0$, $\zeta = \zeta_0$ соответствует $x = 0$, $y = 0$, $z = z_0$. Потребуем, чтобы уравнение (31) не содержало производных $U_{\xi\zeta}$ и $U_{\eta\zeta}$ (т. е. $\bar{a}_{13} = \bar{a}_{23} = 0$), а также чтобы ζ зависела только от z. Нетрудно доказать, что этим условиям удовлетворяют, например, следующие функции, линейно независимые при $a_{33} \neq 0$:

$$\xi = x - (a_{13}/a_{33})\,z, \quad \eta = y - (a_{23}/a_{33})\,z, \quad \zeta = z. \tag{33}$$

Это косоугольные координаты, оси ξ и η которых совпадают с осями x и y.

Введем новую неизвестную функцию $\bar{U} = Ue^{\varkappa(\zeta - \zeta_0)}$ и выберем параметр $\varkappa$ так, чтобы коэффициент при производной $\bar{U}_\zeta$ обратился в нуль: $\varkappa = \bar{b}_3/(2\bar{a}_{33})$. Для $\bar{U}$ получим уравнение

$$\bar{a}_{11}\bar{U}_{\xi\xi} + \bar{a}_{22}\bar{U}_{\eta\eta} + a_{33}\bar{U}_{\zeta\zeta} + 2\bar{a}_{12}\bar{U}_{\xi\eta} + \bar{b}_1\bar{U}_{\xi} + \\ + \bar{b}_2\bar{U}_{\eta} + (d - b_3^2/4a_{33})\,\bar{U} = \delta(\xi - \xi_0, \eta - \eta_0, \zeta - \zeta_0). \tag{34}$$

Здесь мы воспользовались тем, что в соответствии с (32) и (33) $\bar{b}_3 = b_3$, $\bar{a}_{33} = a_{33}$, $\bar{d} = d$, $D(\xi, \eta, \zeta)/D(x, y, z) = 1$. Условие $U|_{z=0} = 0$ переходит в условие $U|_{\zeta=0} = 0$.

Оператор уравнения (34) продолжается на область $\zeta > 0$ $(z < 0)$ четным по ζ образом, если четным образом продолжить все его коэффициенты (они будут постоянны во всем пространстве). При этом из (32) и (33) следует, что и коэффициенты уравнения (30) будут постоянны всюду. В соответствии с общей теоремой о зеркальном отражении граничная задача для функции $\bar{U}$ эквивалентна при $\zeta > 0$ задаче

$$\bar{L}(\xi, \eta, \zeta)\,\bar{U} = \delta(\xi - \xi_0, \eta - \eta_0, \zeta - \zeta_0) - \delta(\xi - \xi_0, \eta - \eta_0, \zeta + \zeta_0) \tag{35}$$

в безграничном пространстве. Здесь $\bar{L}$ — оператор уравнения (34). Переходя к полю U и координатам x, y, z, получим

$$L(x, y, z)\,U = \delta(x)\,\delta(y)\,\delta(z - z_0) - \exp\{-(b_3/2a_{33})(z_1 - z_0)\} \times \\ \times \delta(x - x_1)\,\delta(y - y_1)\,\delta(z - z_1), \tag{36}$$

где L — оператор уравнения (30). Координаты мнимого источника определяются соотношениями

$$\xi(x_1, y_1, z_1) = \xi(0, 0, z_0), \quad \eta(x_1, y_1, z_1) = \eta(0, 0, z_0), \quad z_1 = -z_0. \tag{37}$$

Из этой системы уравнений с учетом (33) получим

$$x_1 = -2(a_{13}/a_{33})\,z_0, \quad y_1 = -2(a_{23}/a_{33})\,z_0. \tag{38}$$

Таким образом, решение задачи (30), (2) при $z > 0$ равно

$$U = U_0(x, y, z - z_0) - \exp\{b_3 z_0/a_{33}\}\,U_0(x + 2(a_{13}/a_{33})\,z_0, \\ y + 2(a_{23}/a_{33})\,z_0, z + z_0), \tag{39}$$

где $U_0(x, y, z - z_0)$ — решение уравнения (30) в безграничном пространстве. Наличие смешанных производных U_{xz} и U_{yz} в (30) обусловливает смещение мнимого источника относительно зеркальной точки в плоскости $z = -z_0$, а наличие первой производной U_z — добавки к амплитуде (если b_3/a_{33} — вещественно) или фазе (если b_3/a_{33} — мнимо) этого источника.

Следствием формулы (39) является теорема об отражении для горизонтального электрического источника $(\boldsymbol{P}_e = P_{ex}\boldsymbol{e}_x + P_{ey}\boldsymbol{e}_y)$ в движущемся диэлектрике, причем теперь среда в зазеркальной области движется с той же скоростью, что и перед зеркалом. В качестве функции U выступают Π_{ex} или Π_{ey}, а в качестве L — оператор D уравнения (20) (как и в п. 2, считаем $u_y = 0$). В соответствии с (39) мнимый источник равен $\boldsymbol{P}_e^{(1)} = -\boldsymbol{P}_e \exp\{2i(\omega/c)\,\delta\beta_z z_0\}$ и расположен в точке $x_1 = 2\delta\beta_x\beta_z z_0$, $y_1 = 0$, $z_1 = -z_0$, где $\delta = (n^2 - 1)(1 - n^2\beta_z^2 - \beta_x^2)^{-1}$. Этот результат был получен в [1] с помощью разложения по плоским волнам.

Для того, чтобы рассмотреть подобным образом вертикальный электрический источник в движущемся диэлектрике, нужно использовать функции φ и ψ, определяемые формулами (23), (24), и перейти в уравнениях (25), (26) к новым переменным ξ, η, ζ и неизвестным $\bar{\varphi}$, $\bar{\psi}$ в соответствии с найденными выше правилами. Для новой граничной

задачи нетрудно построить теорему о зеркальном отражении с непрерывным продолжением свойств среды (в том числе скорости ее движения) за зеркало. Переходя снова к переменным x, y, z и неизвестным φ и ψ, можно показать, что мнимый диполь имеет как вертикальную ($P_{ez}^{(1)} = P_{ez} \exp\{2i(\omega/c)\delta\beta_z z_0\}$), так и горизонтальную ($P_{ex}^{(1)} = -2\delta\beta_x\beta_z P_{ez} \exp\{2i(\omega/c)\delta\beta_z z_0\}$) компоненты и расположен в точке $x_1 = 2\delta\beta_x\beta_z z_0$, $y_1 = 0$, $z_1 = -z_0$. Это совпадает с результатами статьи [1].

В данной работе получены достаточно общие правила построения теорем о зеркальном отражении. Наряду с ними, в некоторых случаях могут иметь место теоремы об отражении с непрерывным продолжением свойств среды за зеркало. При этом задача сводится к определению поля в безграничной среде, что обусловливает вычислительные преимущества такого подхода.

ЛИТЕРАТУРА

1. Красильников В. Н., Тюхтин А. В. — Изв. вузов — Радиофизика, 1982, 25, № 3, с. 328
2. Болотовский Б. М., Столяров С. Н. Эйнштейновский сборник, 1974.— М.: Наука, 1976, 179 с.
3. Столяров С. Н. Эйнштейновский сборник, 1975—1976.—М.: Наука, 1978, 152 с.
4. Гинзбург В. Л. Распространение электромагнитных волн в плазме.—М. Наука, 1967.

Ленинградский государственный университет

Поступила в редакцию 30 ноября 1982 г., после доработки 19 октября 1983 г.

THE REFLECTION THEOREMS FOR SOME ANISOTROPIC MEDIA

V. N. Krasil'nikov, A. V. Tyukhtin

A solution is outlined for the problem of the field described by an arbitrary differential equation (or, system of equations) in a half-space and Dirichlet or Neymann boundary conditions at the plane. The mirror reflection theorems are obtained for a point source of electromagnetic waves in the moving dielectric, magnetoactive plasma and crystal. It is shown that there are situations when the reflection theorema exists with the continuation of medium's properties behind the mirror