

УДК 621 372.822.001

МЕТОД ЧАСТИЧНЫХ ОБЛАСТЕЙ ДЛЯ ДИФРАКЦИОННЫХ ЗАДАЧ С НЕКООРДИНАТНЫМИ ГРАНИЦАМИ

Г. И. Веселов, В. М. Темнов

В рамках метода частичных областей излагается новый подход к решению одного класса некоординатных задач электродинамики, содержащих наклонные границы раздела сред в прямоугольном волноводе. Подход основывается на использовании преобразования Зоммерфельда—Ватсона для построения поля в нерегулярной области. Приводятся результаты численных экспериментов.

Метод частичных областей (МЧО) благодаря его простоте, доступности и достаточно высокой универсальности является одним из наиболее распространенных методов решения задач прикладной электродинамики. Однако уверенное применение этого метода, гарантирующее получение строгого решения задач, сдерживается двумя причинами:

— недостаточно полной проработкой вопросов математического обоснования метода,

— отсутствием корректных и обоснованных способов построения решения при наличии некоординатных границ раздела сред с произвольными параметрами.

Известно, что при решении электродинамических задач с помощью МЧО существенным является представление электромагнитного поля в частичных областях в виде суперпозиции волн, удовлетворяющих волновому уравнению [1, 2]. При этом часть граничных условий (или условий излучения) удовлетворяется почленно, другая часть — путем суперпозиции волн. При наличии некоординатной границы построение такого решения в виде суперпозиции волн, которое будет справедливо вплоть до границы, является в общем случае сложной задачей (исключения составляют случаи «малых некоординатностей»).

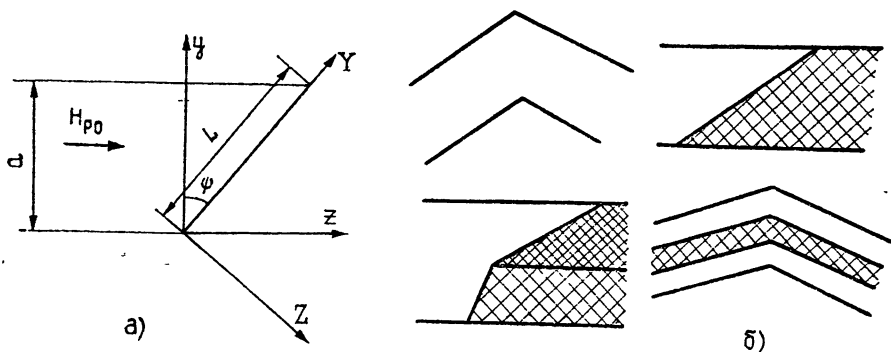


Рис. 1.

Настоящая работа посвящена построению подобного представления для класса задач, содержащих нерегулярную область, образованную стенкой прямоугольного (или плоского) волновода с одной сто-

роны и наклонной границей — с другой (рис. 1а). Излагаемый ниже метод решения может быть использован для анализа нерегулярных волноводов, изображенных на рис. 1б.

Без ограничения общности рассмотрим дифракцию H_{p0} -волны на электрической стенке в плоском волноводе, расположенной в плоскости $Z=0$ (рис. 1а). Амплитуду падающей волны обозначим через a_p , зависимость поля от времени t и координаты z примем в виде $\exp [i(\beta_p z - \omega t)]$ (β_p — фазовая постоянная, ω — частота).

В области $z \leq 0$ электромагнитное поле представим в виде суперпозиции падающей и отраженных волн:

$$F = a_p F_p + \sum_{n=1}^{\infty} b_{np} F_{-n}, \quad (1)$$

где

$$F = \begin{Bmatrix} E \\ H \end{Bmatrix}, \quad F_m = \begin{Bmatrix} E_m \\ H_m \end{Bmatrix}, \quad E_m = \{E_{xm}, 0, 0\}, \quad H_m = \{0, H_{ym}, H_{zm}\},$$

E_m, H_m — компоненты электромагнитного поля m -й собственной волны плоского волновода, b_{np} — неизвестные коэффициенты, запись « $-n$ » означает, что имеет место равенство $\beta_{-n} = -\beta_n$. В плоскости $Z=0$ полагаем

$$\tilde{F} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \tilde{H} \end{Bmatrix}, \quad \tilde{H} = \{0, H_1, 0\}, \quad H_1 = \sum_{m=1}^{\infty} c_m \sin \frac{\pi m Y}{L}, \quad (2)$$

c_m — неизвестные коэффициенты.

Используя формализм, основанный на применении леммы Лоренца к выражениям (1), (2), получаем в области $z \leq 0$ [3]

$$F = a_p F_p + \sum_{m=1}^{\infty} c_m \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(F_n, \tilde{F}_m)}{N_n} F_{-n}, \quad (1')$$

где

$$(F_n, \tilde{F}_m) = \int_0^L \sin \frac{\pi m Y}{L} \sin \frac{\pi n Y}{L} e^{i\beta_n Y \sin \psi} dY,$$

$$N_n = \frac{\beta_n a}{K_0}, \quad \beta_n = \sqrt{K_0^2 - \left(\frac{\pi n}{a}\right)^2},$$

K_0 — волновое число свободного пространства. В формуле (1') мы изменили порядок суммирования двух сходящихся рядов.

Для E_x компоненты вектора-столбца из (1') можно получить

$$\begin{aligned} F_x &= a_p E_{xp} + \sum_{m=1}^{\infty} c_m \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(F_n, \tilde{F}_m)}{N_n} E_{x(-n)} = \\ &= a_p E_{xp} + \sum_{m=1}^{\infty} c_m \sum_{n=1}^{\infty} [g_{nm}^{(1)}(y, z) - g_{nm}^{(2)}(y, z)], \end{aligned} \quad (3)$$

где

$$g_{nm}^{(1)} = \gamma(n, m) \sin \frac{\pi n y}{a} (-1)^{m+n} \exp [i\beta_n (L \sin \psi - z)],$$

$$g_{nm}^{(2)} = \chi(n, m) \sin \frac{\pi n y}{a} \exp (-i\beta_n z),$$

$$\begin{aligned} \kappa(n, m) = & 2i\pi^2 mnK_0 \sin \psi \left\{ aL^2 \left[\frac{\pi^2}{L^2} (m+n)^2 - \beta_n^2 \sin^2 \psi \right] \times \right. \\ & \left. \times \left[\frac{\pi^2}{L^2} (m-n)^2 - \beta_n^2 \sin^2 \psi \right]^{-1} \right\}. \end{aligned}$$

Поставим задачу описания электромагнитного поля в нерегулярной области $z > 0$. С этой целью рассмотрим ряды $\sum_{n=1}^{\infty} g_{nm}^{(1)}(y, z)$ и $\sum_{n=1}^{\infty} g_{nm}^{(2)}(y, z)$. Нетрудно видеть, что первый из них сходится в любой точке волновода, в то время как второй расходится при $z > 0$. Будем считать, что этот расходящийся ряд есть формальное разложение неизвестной функции, взятое вне области его сходимости. Определим эту функцию, т. е. найдем продолжение функции, определяемой рядом $\sum_n g_{nm}^{(2)}$ при $z \leq 0$, в область $z > 0$. С этой целью введем функцию комплексной переменной t $G(t, y', z)$, определяемую следующим образом:

$$G(t, y', z) = -\kappa(t, m) \frac{\sin(\pi t y' / a)}{\cos \pi t} \exp(-i\beta_t z),$$

где $y' = a - y$. Тогда при $z \leq 0$ на основании теоремы о вычетах будем иметь

$$\begin{aligned} \int_1 \! \! \! \int G(t, y', z) \frac{d\Delta(t)/dt}{\Delta(t)} dt &= \int_{-i\infty}^{i\infty} + \int_C + \int_{\Gamma'} = \\ &= 2\pi i \left\{ \sum_{j=1}^2 \operatorname{res} [g_{t_j m}^{(2)}(y', z)] + \sum_{j=1}^{\infty} g_{j m}^{(2)}(y', z) \right\}. \end{aligned} \quad (4)$$

В выражении (4) через $\Delta(t)$ обозначена левая часть дисперсионного уравнения $\Delta(t) = 0$ для определения нормированных поперечных волновых чисел регулярного волновода, т. е. в частном случае рассматриваемой задачи $\Delta(t) = \sin \pi t$. Контур интегрирования Γ показан на рис. 2, крестиками обозначены корни дисперсионного уравнения, t_b — точка ветвления функции $G(t, y', z)$, t_j ($j=1, 2$) — корни уравнения $\kappa^{-1}(t, m) = 0$, лежащие в правой полуплоскости. Заметим, что интеграл по мнимой оси в (4) равен нулю из-за нечетности по t подынтегральной функции, а интеграл по полуокружности C при $R \rightarrow \infty$ также стремится к нулю, так как $|G(t, y', z)| = O(|t|^{-3})$ при $|t| \rightarrow \infty$. Отметим также, что интеграл по разрезу Γ' является нечетной функцией относительно переменной z . Это важное свойство интеграла будет использовано в дальнейшем.

Выражение (4), известное в литературе под названием преобразования Зоммерфельда—Ватсона (см. [4, 5]), использовалось ранее в задачах дифракции на поверхности Земли при получении удобного для вычислений представления рассеянного поля [4]. Применение этого преобразования в квантовой теории потенциального рассеяния привело к появлению нового метода решения задач рассеяния, известного как метод комплексных угловых моментов или метод полюсов Редже [6]. К некоординатным задачам электродинамики излагаемый подход применяется, по-видимому, впервые.

Перейдем к выводу системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) относительно неизвестных коэффициентов c_m . Введем функцию

$$Q_m(y', z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma'} G(t, y', z) \frac{d\Delta(t)/dt}{\Delta(t)} dt - \sum_{j=1}^2 \text{res} [g_{t_j m}^{(2)}(y', z)]. \quad (5)$$

Она удовлетворяет волновому уравнению, граничным условиям всюду, кроме наклонной границы, условиям непрерывности самой функции и ее производной на границе $z=0$. Заметим, что граничные условия на наклонной границе удовлетворяются «в среднем» посредством суперпозиции вида (3).

Из выражения (4) следует, что при $z \leq 0$ справедливо равенство

$$Q_m(y', z) = \sum_{n=1}^{\infty} g_{nm}^{(2)}(y', z).$$

Отмеченная выше четность интеграла в (5) относительно z позволяет представить функцию $Q_m(y', z)$ при $z > 0$ также в виде ряда

$$Q_m(y', z) = - \sum_{n=1}^{\infty} g_{nm}^{(2)}(y', -z) - \sum_{j=1}^2 \{ \text{res} [g_{t_j m}^{(2)}(y', -z) + \text{res} [g_{t_j m}^{(2)}(y', z)] \}. \quad (6)$$

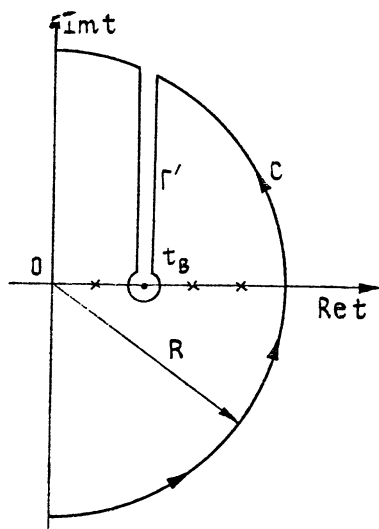


Рис. 2.

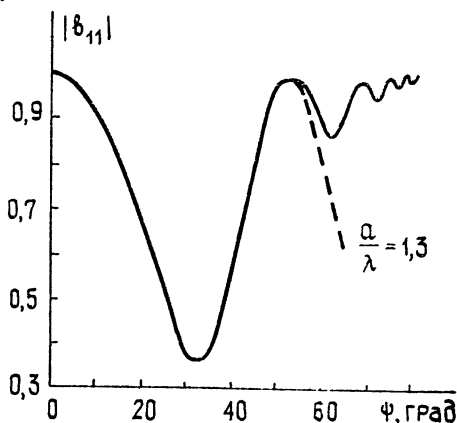


Рис. 3.

Изложенное позволяет заключить, что электромагнитное поле в нерегулярной области $z > 0$ представимо в виде суперпозиции падающих и отраженных волн виртуального волновода, образованного продолжением регулярного волновода в область $z > 0$, а также так называемых «вычетных» волн, определяемых наклонной границей и зависящих от функций (2), по которым производится разложение H_y на границе. Корни t_j , соответствующие вычетным волнам, имеют смысл поперечных волновых чисел и определяются по формулам

$$t_1(m) = m \cos^2 \psi + \sin \psi \sqrt{(2a/\lambda)^2 - m^2 \cos^2 \psi},$$

$$t_2(m) = \pm m \cos^2 \psi \mp \sin \psi \sqrt{(2a/\lambda)^2 - m^2 \cos^2 \psi},$$

λ — длина волны свободного пространства. Знак в выражении для t_2 выбирается из условия $\text{Re } t_2 \geq 0$. При $m > 2a/\lambda \cos \psi$ корни комплексные, при $m \rightarrow \infty$ они приближаются к двум лучам, составляющим с

действительной осью угол $\pm\psi$. Подобно собственным волнам регулярного волновода вычетные волны являются необходимой компонентой представления поля в нерегулярной области с наклонной границей.

Подставляя (6) в (3) и проектируя полученное функциональное соотношение на базис $\{\sin \pi k Y/L\}$, получаем систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных c_m :

$$\sum_{m=1}^{\infty} c_m Q_{mk} + a_p h_{pk} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (7)$$

где

$$Q_{mk} = \int_0^L \left[\sum_{n=1}^{\infty} g_{nm}^{(1)}(y, z) + Q_m(y', z) \right] \sin \frac{\pi k Y}{L} dY,$$

$$h_{pk} = \int_0^L E_{xp} \sin \frac{\pi k Y}{L} dY, \quad y' = a - Y \cos \psi, \quad z = Y \sin \psi.$$

Коэффициенты b_{np} могут быть вычислены через c_m с помощью соотношений (1) и (1').

С целью доказательства сходимости метода при решении СЛАУ (7) методом редукции приведем некоторые результаты численного эксперимента. Так, в табл. 1 даны значения коэффициентов b_{11} и b_{71} в зависимости от порядка N решаемой системы при $\psi = 30^\circ$ и $a/\lambda = 3,7$. При этом число слагаемых M во «внутренних суммах» СЛАУ (7) было взято равным порядку системы $M=N$. Звездочкой помечены, результаты, полученные методом полуобращения [7]. Из табл. 1 видно, что сходимость решений достаточно высокая.

Таблица 1

b_{np}	N						
	4	8	10	12	16	20	24
$ b_{11} $	0,6959	0,01369	0,001997	0,001847	0,001809	0,001804	0,001803
$\arg(b_{11})$ (град)	324,76	268,71	214,11	212,48	212,84	213,04	213,12
$ b_{71} $		0,9158	0,8661	0,8643	0,8638	0,8640	0,8637
$\arg(b_{71})$ (град)		153,92	152,73	152,75	152,78	152,79	152,79 152,795*

На рис. 3 приведены зависимости модуля коэффициента отражения b_{11} от угла наклона ψ при двух порядках системы $N=4$ (штриховая кривая) и $N=16$ (сплошная кривая). Видно, что при $\psi > 55^\circ$ между кривыми существует заметное расхождение, свидетельствующее о зависимости порядка N от угла ψ . В то же время, кривая, отвечающая $N=16$, практически не отличается от соответствующей зависимости, полученной методом полуобращения и приведенной в [8]. Таким образом, можно утверждать, что при увеличении N имеет место сходимость приближенных решений к точному.

Остановимся на вопросе о выборе N и M для получения результатов с достаточной для практики точностью. Число M , равное числу волн в регулярном волноводе, выбирается таким, чтобы в волноводе помимо всех распространяющихся волн ($\text{Re } \beta_n \neq 0, \text{Im } \beta_n = 0$) присутствовали и несколько типов затухающих волн ($\text{Im } \beta_n \neq 0, \text{Re } \beta_n = 0$). При выборе числа N нужно учитывать, что матрица решаемой СЛАУ (7)

должна содержать все вещественные корни $t_1(m)$ (или $t_2(m)$), а также несколько комплексных корней. Этот вывод, по существу, совпадает с соответствующими рекомендациями в методе полуобращения [7-9].

Вместе с тем, изложенный метод обладает несомненными достоинствами, а именно:

— метод позволяет достаточно эффективно вычислять электромагнитное поле в нерегулярной области,

— при практических расчетах можно ограничиться относительно небольшим числом собственных волн регулярного волновода, что особенно важно для неоднородных по поперечному сечению волноводов (например волноводов со сложной слоистой структурой), когдахождение спектра волн представляет достаточно сложную самостоятельную задачу.

В заключение отметим, что описанный метод допускает обобщение на векторные некоординатные задачи электродинамики, содержащие изломы волноводов непрямоугольного сечения, наклонные границы раздела сред и др.

ЛИТЕРАТУРА

1. Веселов Г. И. Диссертация, МВТУ, М., 1971.
2. Нефедов Е. И. Открытые коаксиальные резонансные структуры. — М.: Наука, 1982.
3. Веселов Г. И., Темнов В. М. — Радиотехника, 1982, № 8, с. 71.
4. Ваганов Р. Б., Каценеленбаум Б. З. Основные теории дифракции. — М.: Наука, 1982.
5. Краснушкин П. Е. — ДАН СССР, 1969, 185, № 5, с. 1014.
6. Альфаро В, Редже Т. Потенциальное рассеяние — М.: Мир, 1966.
7. Кириленко А. А., Литвинов В. Р., Рудь Л. А. — Сб. Выч. мат. и выч. техн. — Харьков: ФТИИТ АН УССР, 1973, вып. IV, с. 34.
8. Кириленко А. А., Рудь Л. А., Шестопалов В. П. — Сб. Прикладная электродинамика — М.: Высшая школа, 1978, вып. 2, с. 3
9. Кириленко А. А., Рудь Л. А., Шестопалов В. П. — Радиотехника и электроника, 1974, 19, № 4, с. 687.

Московский институт электронной
техники

Поступила в редакцию
15 октября 1982 г,
в окончательном варианте
16 января 1984 г.

THE METHOD OF PARTIAL REGIONS FOR DIFFRACTION PROBLEMS WITH NONCOORDINATE BOUNDARIES

G. I. Veselov, V. M. Temnov

A new approach is presented in the frames of partial region method for the solution of one class of noncoordinate electrodynamic problems containing oblique boundaries of medium separation in a rectangular waveguide. The approach is based on the use of Sommerfeld — Watson transformation for the field building in the nonregular region. The results of numerical experiments are presented