ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XXVII, № 7 РАДИОФИЗИКА 1984

УДК 533.95

ГЕНЕРАЦИЯ ПРОДОЛЬНЫХ ЗВУКОВЫХ ВОЛН МОДУЛИРОВАННЫМИ ГЕЛИКОННЫМИ ВОЛНАМИ

Н. Е. Вигдорчик

Рассматривается распространение геликонов конечной амплитуды в плазме твердого тела. Показано, что модуляция исходной геликонной волны приводит к трансформации ее не только в поперечные, но и продольные звуковые волны. Доказана возможность существования уединенных геликонных волн (солитонов огибающей).

Как известно, в сильном постоянном магнитном поле в металлах и полупроводниках существуют электромагнитные волны, которые получили название геликонов [1,2]. В [3,4] было показано, что возможна взаимная трансформация геликонов и колебаний решетки в линейном приближении. Однако для изучения таких вопросов, как распространение геликонов конечной амплитуды, становится небходимым учет нелинейных эффектов. В частности, в работе [5] был рассмотрен распад геликонов конечной амплитуды на геликон малой амплитуды и поперечный или продольный звук.

В настоящей работе рассмотрены модуляционные процессы в металлах и полупроводниках. Показано, что модуляция исходной геликонной волны конечной амплитуды, распространяющейся в металлах, приводит к изменению спектра продольной звуковой волны. Рассмотрено также распространение нелинейных стационарных волн в металле и доказана возможность существования в них уединенных волн («солитонов огибающей»).

Предположим, в металле распространяется модулированная геликонная волна конечной амплитуды

$$\mathrm{H}_\perp(z, t) = (1/2)\{H(z, t)\exp[i(k_A z - \omega_A t)] + \text{к.с.}\}; \quad (1)$$

$$\mathrm{E}_\perp(z, t) = (1/2)\{E(z, t)\exp[i(k_A z - \omega_A t)] + \text{к.с.}\}, \quad (2)$$

где $E(z, t)$, $H(z, t)$ — медленно меняющиеся функции по сравнению с фазовым множителем, а k_A определяется дисперсионным уравнением

$$k_A = \sqrt{4\pi n e\omega_A/cH_0}\,. \quad (3)$$

В качестве исходной системы используем уравнения Максвелла и уравнение колебаний решетки

$$\rho(\partial^2 u/\partial t^2) = (\lambda + \mu)\nabla \operatorname{div} u + \mu\Delta u + (1/c)[j \times \mathrm{H}], \quad (4)$$

где λ, μ — коэффициенты Лямэ, j — полная плотность тока. Последний член в (4) учитывает силу, действующую на единичный объем решетки со стороны электронов и полей. «Деформационной» силой в сильном магнитном поле пренебрегаем [3]. Поскольку геликон — низкочастотная волна, то в уравнениях Максвелла можно пренебречь током смещения. Поэтому, исходя из уравнения для плотности тока

$$j = (c/4\pi)\operatorname{rot}\mathrm{H}_\perp, \quad (5)$$

можно переписать (4) для продольных колебаний решетки в следующем виде:

$$\partial^2 u_\parallel/\partial t^2 - s_\parallel^2 \Delta u_\parallel = -(1/8\pi\rho)\nabla |H_\perp|^2. \quad (6)$$

Отметим, что стоящий в правой части (6) член со средней по времени напряженностью магнитного поля волны обусловлен деформацией кристалла под действием давления электромагнитного поля.

Ограничимся квадратичным электронным спектром и низкочастотными волнами

$$\omega\tau \ll 1, \quad kl \ll 1, \quad \omega < \omega_H. \quad (7)$$

Тогда из кинетического уравнения Больцмана стандартным путем найдем выражение для полной плотности тока с учетом нелинейного индукционного взаимодействия

$$j_l = \sigma_{lk}(E_k + (1/c)\,[(\partial u_\parallel/\partial t)\,\mathrm{H}_\perp]_k), \quad (8)$$

где σ_{ik} — обычный тензор проводимости в сильном магнитном поле [6]. Из уравнений Максвелла и (8) находим второе уравнение, связывающее геликон малой (но конечной) амплитуды и продольный звук:

$$\frac{\partial \mathrm{H}_\perp}{\partial t} = -\frac{c^2}{4\pi}\,\mathrm{rot}\,[\hat{\rho}\,\mathrm{rot}\,\mathrm{H}_\perp] + \mathrm{rot}\left[\frac{\partial u_\parallel}{\partial t}\mathrm{H}_\perp\right], \quad (9)$$

где $\hat{\rho}$ — тензор магнетосопротивления.

Вообще говоря, тензоры $\hat{\rho}$ и $\hat{\sigma}$ зависят от концентрации. Поэтому в первом члене в правой части (9) следует дифференцировать не только $\mathrm{H}_\perp$, но и $\hat{\rho}$, что приведет к слагаемому $(c^2/4\pi)\,[\mathrm{rot}\,\mathrm{H}_\perp \nabla\hat{\rho}]$. Однако из уравнения непрерывности и (8) можно найти

$$e\frac{\partial n'}{\partial t} = \sigma_0\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{E}' + \frac{1}{c}\,\mathrm{div}\left[\frac{\partial u_\parallel}{\partial t}\boldsymbol{H}_0\right] = \frac{1}{c}\,[\boldsymbol{H}_0\,\mathrm{rot}\,u_\parallel] = 0.$$

Поэтому в первом порядке малости по u и $H_\perp$ возмущение концентрации n' равно нулю и члены второго порядка малости в слагаемом $(c^2/4\pi)\ [\mathrm{rot}\,\mathrm{H}_\perp \nabla\hat{\rho}]$ отсутствуют. Следовательно, в рассматриваемом выражении (9) будут присутствовать члены третьего и более высокого порядков малости, которые мы не учитываем, поскольку есть нелинейный член $\mathrm{rot}\,[(\partial u_\parallel/\partial t)\,H_\perp]$ второго порядка малости (см. также [5]).

Подставляя (1) в (9) и используя (3), получим следующее уравнение для медленно меняющейся амплитуды:

$$i\left(\frac{\partial H_\perp}{\partial t} + v\,\frac{\partial H_\perp}{\partial z}\right) + \frac{v}{2k_A}\frac{\partial^2 H_\perp}{\partial z^2} - k_A\frac{\partial u_\parallel}{\partial t}H_\perp = 0, \quad (10)$$

где $v = (\partial\omega/\partial k) = 2cH_0k_A/4\pi ne$ — групповая скорость геликонов. Можно показать, что учет возмущения концентрации приводит к учету членов более высоких порядков малости по $H_\perp/H_0$

Отметим, что подобное уравнение для электрозвуковых модуляционных волн в жидкости и плазме было получено в работе [7], причем член, пропорциональный $(1-k_Av')$, для геликонов тождественно равен нулю $(v' = \partial v/\partial\omega)$.

Запишем (10) в гидродинамической форме, для чего положим

$$H_\perp = ae^{i\varphi}, \quad (11)$$

где a — положительная величина.

Отделяя в (10) действительную и мнимую части, будем иметь

$$-\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}+v\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)+\frac{v}{2k_A}\left[\frac{1}{a}\frac{\partial^2 a}{\partial z^2}-\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right]-k_A\frac{\partial u_\parallel}{\partial t}=0; \quad (12)$$

$$\frac{\partial a^2}{\partial t}+v\frac{\partial a^2}{\partial z}+\frac{v}{k}\frac{\partial}{\partial z}\left(a^2\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)=0. \quad (13)$$

Рассмотрим теперь устойчивость нелинейной плоской волны, описываемой уравнениями (4), (12), (13). Положив $H_\perp=a_0+a'e^{i\varphi}$ и предполагая u, φ, a' пропорциональными $\exp\left[i(\varkappa z-\Omega t)\right]$, получим следующее дисперсионное уравнение:

$$\left[(\Omega-\varkappa v)^2-\frac{v^2\varkappa^4}{4k_A^2}\right](\Omega^2-s_\parallel^2\varkappa^2)=\frac{a_0^2\varkappa^3\Omega v}{32\pi\rho}. \quad (14)$$

При малых $\varkappa$, удовлетворяющих неравенству

$$\varkappa/k_A\ll 1, \quad (15)$$

которое является условием применимости уравнений (12) и (13), уравнение (14) имеет корни:

$$\Omega_{1,2}=\pm s_\parallel\varkappa\left(\frac{a_0^2 v}{64\pi\rho s_\parallel(v^2-s_\parallel^2)}\pm\sqrt{1+\frac{a_0^4 v^2}{(64\pi\rho s_\parallel)^2(v^2-s_\parallel^2)^2}}\right); \quad (16)$$

$$\Omega_{3,4}=\varkappa v\pm\frac{v\varkappa^2}{2k}\left(1+\frac{a_0^2 k^2}{8\pi\rho\varkappa^2(v^2-s_\parallel^2)}\right)^{1/2}. \quad (17)$$

Как видно из (16) и (17), они описывают возмущения, распространяющиеся со скоростями, близкими соответственно к звуковой ($\pm s_\parallel$) и групповой скорости геликонов v. Поэтому вслед за [7] будем называть указанные ветви квазиакустическими и квазиоптическими.

Из соотношения (16) видно, что в области применимости этой формулы неустойчивых корней нет. Для нахождения неустойчивых корней для квазиакустической ветви нужно воспользоваться исходным дисперсионным уравнением (14). Аналогично [7] область неустойчивости в этом случае определяется неравенствами

$$0\leqslant\left(1-\frac{s_\parallel}{v}\right)-\alpha\left(1-\frac{s_\parallel}{v}\right)^{-1/2}\leqslant\frac{\varkappa}{2k_A}\leqslant\left(1-\frac{s_\parallel}{v}\right)+\alpha\left(1-\frac{s_\parallel}{v}\right)^{-1/2}; \quad (18)$$

$$-\left(1-\frac{s_\parallel}{v}\right)-\alpha\left(1-\frac{s_\parallel}{v}\right)^{-1/2}\leqslant\frac{\varkappa}{2k_A}\leqslant-\left(1-\frac{s_\parallel}{v}\right)+\alpha\left(1-\frac{s_\parallel}{v}\right)^{-1/2}, \quad (19)$$

а выражения для комплексных корней имеют вид

$$\Omega_{1,3}=\varkappa s_\parallel+\left[\varkappa(v-s_\parallel)-\varkappa^2 v/2k_A\right]/2\mp$$
$$\mp\frac{1}{2}\left\{\left[\varkappa(v-s_\parallel)-\frac{\varkappa^2 v}{2k_A}\right]^2-\frac{\alpha^2\varkappa^2 v^2}{1-s_\parallel/v}\right\}^{1/2}; \quad (20)$$

$$\Omega_{2,4}=\varkappa s_\parallel+\frac{\varkappa(v-s_\parallel)+\varkappa^2 v/2k_A}{2}\mp$$
$$\mp\left\{\left[\varkappa(v-s_\parallel)+\frac{\varkappa^2 v}{2k_A}\right]^2-\frac{\alpha^2\varkappa^2 v^2}{1-s_\parallel/v}\right\}^{1/2}. \quad (21)$$

Здесь $\alpha^2=a_0^2/16\pi\rho v^2 \ll 1$ для реальных значений напряженностей магнитных полей в волне.

Максимальный инкремент неустойчивости достигается при

$$\varkappa_0 = \pm 2k(1 - s_{\parallel}/v), \tag{22}$$

и его величина равна

$$\operatorname{Im}\Omega(\varkappa_0) = 2kv\alpha(1 - s_{\parallel}/v)^{1/2}. \tag{23}$$

Для квазиоптической ветви (17) неустойчивость наблюдается лишь в случае $v<s_{\parallel}$ при

$$0 \leqslant \varkappa^2/k_A^2 \leqslant a_0^2/8\pi\rho(s_{\parallel}^2 - v^2). \tag{24}$$

Максимальный инкремент достигается при

$$\frac{\varkappa_0^2}{k_A^2} = \frac{a_0^2}{16\pi\rho(s_{\parallel}^2 - v^2)} \tag{25}$$

и равен

$$\operatorname{Im}\Omega(\varkappa_0) = vk_A a_0^2/32\pi\rho(s_{\parallel}^2 - v^2). \tag{26}$$

Отметим, что неустойчивости, возникающие при нелинейном геликон-фононном взаимодействии, могут развиваться, если указанные выше инкременты нарастания больше затухания как электромагнитных геликонных мод $\delta_{\text{эл}}=c^2k_A^2/\sigma$, так и акустической моды, связанной с вязкостью и теплопроводностью среды $\delta_{\text{ак}}=\nu\varkappa^2$. В соответствии с неравенством (15) основным является затухание электромагнитных волн $\delta_{\text{эл}}$.

Пользуясь (26), можно получить

$$\frac{s_{\parallel} - v}{s_{\parallel}} < \frac{a_0^2}{64\pi\rho s_{\parallel}^2}\,\frac{s_{\parallel}^2}{c^2}\,\frac{\sigma}{ks_{\parallel}}. \tag{27}$$

Для щелочных металлов $\sigma \simeq 10^{18}\ 1/c$, $s_{\parallel}=3\cdot 10^5$ *см/с*, $\omega_A=10^8\ 1/c$, $k_A=10^3\ 1/см$. Минимальная расстройка скоростей $(s_{\parallel}-v)/s_{\parallel}=10^{-6}$ [8], обнаруженная в металлах, приводит к напряженностям магнитного поля в геликоне $a_0=10^4$ *э*, что эквивалентно вводимой мощности $P_{\text{гел}}=10^5$ *Вт/см²*. Поскольку такие поля вводить в металл нельзя, то геликон-фононную неустойчивость вряд ли можно экспериментально зафиксировать. Для неустойчивости акустической ветви (23) условия на a_0 еще жестче. В полупроводниковой плазме проводимость и концентрация носителей меньше, чем в металле, поэтому пороговая мощность $P_{\text{гел}}$ еще больше, и геликон-фононную неустойчивость там также не удастся зарегистрировать.

Рассмотрим теперь стационарные нелинейные волны, являющиеся решениями (6), (12) и (13) и описываемые выражениями

$$a = a(z - Wt), \quad u_{\parallel} = u_{\parallel}(z - Wt), \quad \varphi = Ct + \varphi_1(z - Wt). \tag{28}$$

Подставляя (28) в (6), (12) и (13) в случае $v>s_{\parallel}$, получим

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial z} = -\frac{k}{v}\,\frac{(a^2 - a_0^2)(v - W)}{a^2}, \quad C = 0; \tag{29}$$

$$\frac{\partial u_{\parallel}}{\partial t} = \frac{W}{8\pi\rho}\,\frac{a^2 - a_0^2}{W^2 - s_{\parallel}^2}; \tag{30}$$

$$a^2 = a_0^2 - (a_0^2 - a_{\min}^2)\operatorname{sech}^2[(z - Wt)/\delta]; \tag{31}$$

$$\delta = \left(\frac{8\pi\rho (W^2 - s_{\parallel}^2) v}{W (a_0^2 - a_{\min}^2) k^2} \right)^{1/2}, \tag{32}$$

где a_0, $a_{\min}$ — соответственно максимальное и минимальное значения напряженности магнитного поля в волне. Таким образом, в металлах и полупроводниках возможно распространение солитоноподобных возмущений плоской волны ($a \to a_0$ при $x \to \pm\infty$) [7], причем амплитуда в таком возмущении всегда меньше соответствующих значений в плоской волне.

Скорость распространения подобных солитоноподобных возмущений определяется из уравнения

$$(W^2 - s_{\parallel}^2)(W - v)^2 = Wva_{\min}^2/16\pi\rho. \tag{33}$$

Соотношение (33) аналогично дисперсионному уравнению (14), и поэтому в области, далекой от частоты

$$\omega = \omega_p^2/\omega_H (s_{\parallel}^2/c^2),$$

где наблюдается сильная геликон-фононная связь, корни уравнения (33) вещественны. Соответственно будет иметься два типа солитонов — «акустические», скорость которых близка к $s_{\parallel}$,

$$W^2 = s_{\parallel}^2 + s_{\parallel} va_{\min}^2/[16\pi\rho(v^2 - s_{\parallel}^2)], \tag{34}$$

и «оптические», скорость которых близка к групповой скорости геликонов v,

$$W = v \pm \sqrt{a_{\min}^2/[16\pi\rho(1 - s_{\parallel}^2/v^2)]}. \tag{35}$$

Подставляя выражения (34) и (35) в формулу (32) для ширины солитона, получим следующие выражения для обратной ширины акустического и оптического солитонов:

$$\delta_{\text{ак}}^{-1} \simeq \left(\frac{a_0^2}{a_{\min}^2} - 1 \right)^{1/2} k \left(1 - \frac{s_{\parallel}^2}{v^2} \right)^{1/2}; \tag{36}$$

$$\delta_{\text{опт}}^{-1} \simeq k \left[\frac{a_0^2 - a_{\min}^2}{8\pi\rho (v^2 - s_{\parallel}^2)} \right]. \tag{37}$$

Солитоноподобное возмущение в данном случае представляет собой «яму», перемещающуюся на фоне стационарной волны с амплитудой a_0 [9, 10].

В случае $v < s_{\parallel}$ решение уравнений (6), (12) и (13) можно искать в виде солитонов огибающей [7, 10], когда солитон движется со скоростью, равной групповой скорости геликона.

В этом случае имеем

$$a = A \operatorname{sech} \left(\frac{x - vt}{\delta} \right), \quad \delta^2 = \frac{8\pi\rho (s_{\parallel}^2 - v^2)}{k^2 A^2}; \tag{38}$$

$$\frac{\partial u_{\parallel}}{\partial t} = -\frac{v}{8\pi\rho} \frac{a^2}{s_{\parallel}^2 - v^2}; \tag{39}$$

$$\varphi = -\frac{vk}{16\pi\rho} \frac{A^2 t}{s_{\parallel}^2 - v^2}. \tag{40}$$

В таком солитоне амплитуда волны максимальна в центре, а на бесконечности — при $x \to \pm\infty$, $a \to 0$, $\partial u_{\parallel}/\partial t \to 0$. Выше не учитывались эффекты затухания акустических и электромагнитных волн. Как показывает анализ, влияние акустического затухания несущественно, поскольку неравенство

$$\frac{\nu k}{W} \frac{a_0^2 - a_{\min}^2}{a_0^2} < 1 \tag{41}$$

легко выполнимо.

Затухание электромагнитных волн приводит к дополнительному слагаемому $c^2 \Delta H / 4\pi\sigma$ в уравнении (9) [5]. Пренебрежение им для акустических солитонов допустимо при

$$\frac{\mu H_0}{c} \frac{a_0^2 - a_{\min}^2}{a_0^2} > 1, \tag{42}$$

что выполнимо в полях $H_0 = 10^5$ *Гс* для PbTe и $H_0 = 10^3$ *Гс* для K, Bi. Здесь μ — подвижность носителей в твердотельной плазме. Для оптических солитонов условие пренебрежения электрическим затуханием более жесткое:

$$k_A < \sqrt{\frac{c}{\mu H_0} \frac{a_0^2}{\rho c^2} \frac{a_0^2 - a_{\min}^2}{a_0^2} \frac{4\pi\sigma}{c}}, \tag{43}$$

что приводит к значениям $k_A \simeq 10^{-1} \div 10^{-2}$ *см*$^{-1}$. Поскольку без существенного затухания могут распространяться в металлах и полупроводниках лишь длинноволновые «оптические» солитоны, то экспериментально можно наблюдать лишь «акустические солитоны и солитоны огибающей при $v < s_{\parallel}$.

ЛИТЕРАТУРА

1 Agrain P. Proc Intern Conf on Semiconductor Physics, Prague, 1960, p 224.
2 Константинов О. В, Перель В. И. — ЖЭТФ, 1960, **38**, с. 161.
3 Скобов В Г, Канер Э. А — ЖЭТФ. 1964, **46**, с 273
4 Grimes C., Buchsbaum S. — Phys. Rev. Lett., 1964, № 12, p. 357.
5. Булгаков А А, Ханкина С. И., Яковенко В. М.—ФТТ, 1969, **11**, с. 2749.
6. Блатт Ф. Физика электронной проводимости в твердых телах. — М.: Мир, 1971, гл. 7.
7 Гуревич В. У, Карпман В. И — ЖЭТФ, 1969, **56**, с. 1952.
8 Физическая акустика. / Под ред. Мэзона. — М · Мир, 1969, т. 4А, гл. 7.
9 Кадомцев Б. Б., Карпман В. И. — УФН, 1971, **103**, с. 193.
10. Карпман В. И. Нелинейные волны в диспергирующих средах. — М.: Наука, 1973, с. 111.

Ленинградский технологический институт

Поступила в редакцию 21 декабря 1982 г., в окончательном варианте 25 ноября 1983 г.

LONGITUDINAL SOUND GENERATION BY MODULATED HELICON WAVES

N. E. Vigdorchik

Propagation of finite amplitude helicons in a solid-state plasma is considered. It is shown that modulation of initial helicon wave results in the appearance of longitudinal sound wave. The possibility of existence of solitary helicon waves is proved