ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XXVII, № 7 РАДИОФИЗИКА 1984

УДК 538.56:539 12

О ПОЛЯХ И ИЗЛУЧЕНИИ «ИСТИННЫХ» И ТОКОВЫХ МАГНИТНЫХ ДИПОЛЕЙ, НАХОДЯЩИХСЯ В СРЕДЕ

В. Л. Гинзбург

Проводится сопоставление «истинных» и токовых магнитных диполей (в отношении создаваемых ими полей и излучаемой энергии), находящихся в среде с диэлектрической и магнитной проницаемостями ε и μ. При этом под «истинным» понимается диполь, образованный двумя магнитными полюсами (монополями) разных знаков. Токовый же диполь представляет собой миниатюрное кольцо (соленоид) с током или постоянный магнит. В качестве примера рассматривается энергия излучения Вавилова—Черенкова для точечных магнитных диполей обоих типов, а также для электрических диполей. Истинные и токовые магнитные диполи создают, вообще говоря, разные поля и, соответственно, по-разному излучают, в силу неодинаковой поляризации среды, которая в рамках макроскопической электродинамики для однородной среды считается находящейся и внутри диполей. Однако такое «заполнение» диполей средой в большинстве случаев нереально; в частности, точечные (микроскопические) истинные и токовые магнитные моменты, в отношении которых говорить о заключенной «внутри» них среде не приходится, будут и в среде создавать одинаковые поля и одинаково излучать. Вместе с тем для точечных диполей при нахождении создаваемых ими полей возникает вопрос об отличии действующих (эффективных) полей от макроскопических полей. Поскольку это отличие в общем случае не может быть найдено в рамках макроскопической электродинамики, задача о полях и излучении точечных диполей в среде также не имеет общего решения, зависящего только от проницаемости среды ε и μ

Магнитные монополи (заряды) еще не наблюдались, но они могли бы существовать [1]. При этом в последние годы широко обсуждается вопрос о сравнительно тяжелых магнитных монополях, отвечающих решениям ряда теорий «великого объединения» [2]. Если существуют магнитные монополи, то естественно рассматривать также «истинные» магнитные диполи (моменты), образованные двумя монополями разных знаков, находящихся на некотором расстоянии друг от друга, скажем, с двух сторон атомного ядра. Реальна ли подобная ситуация и окажется ли «истинный» диполь в каких-то условиях достаточно устойчивым (в частности, относительно аннигиляции) — остается совершенно неясным. Однако это совсем другая проблема, и здесь хотелось лишь подчеркнуть, что исследование поведения «истинных» магнитных диполей в настоящее время не должно считаться упражнением, полностью оторванным от действительности. Вместе с тем, независимо от возможности физических приложений, исследование свойств и, конкретно, излучения различных магнитных диполей представляет методический интерес. Относится это и к случаю, когда диполи находятся в среде. Именно в таком плане вопрос уже много лет обсуждается в литературе, в частности, в случае излучения Вавилова—Черенкова (ниже В.—Ч.), создаваемого в среде диполями различных типов (см. [3–8])*. Выбор в качестве примера излучения В —Ч. не случаен: в из-

* Поскольку настоящая статья является обзором методического типа, приводимые ссылки на литературу не претендуют на полноту. Ряд дополнительных ссылок можно найти в цитированных статьях и книгах [9, 10].

вестном отношении эффект В.—Ч. является простейшим процессом излучения (источник движется равномерно и прямолинейно)* и при этом имеет место только при наличии среды (отвлекаемся здесь от гипотетических тахионов или источников — сверхсветовых «зайчиков», см. [8], гл. 9). В связи с подготовкой к печати монографии [9], а также ознакомлением с рукописью статьи Франка [10], автор вернулся к сопоставлению черенковского излучения различных диполей и, как ему кажется, достиг здесь некоторой ясности. Целью настоящей статьи является попытка осветить поведение «истинных» и токовых магнитных диполей в рамках электродинамики сплошной среды, в частности, на примере создаваемого ими излучения Вавилова—Черенкова.

1. Электрические и магнитные заряды (монополи), а также диполи будем считать находящимися в неподвижной однородной и изотропной среде, характеризуемой диэлектрической проницаемостью ε и магнитной проницаемостью μ. Обе проницаемости полагаем, при записи уравнений, не зависящими от частоты ω, не говоря уже о пренебрежении пространственной дисперсией. Известно, однако, что результаты (речь идет об излучаемой энергии, скажем, для эффекта В.—Ч.) пригодны и при учете частотной дисперсии (см. [8], гл 6).

Электрическое и магнитное поля $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$, создаваемые в указанной среде электрическими зарядами с плотностью ρ, движущимися со скоростью $\boldsymbol{v}$, подчиняются уравнениям

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \varepsilon \boldsymbol{E}}{\partial t} + \frac{4\pi\rho\boldsymbol{v}}{c}, \qquad \operatorname{div} \varepsilon \boldsymbol{E} = 4\pi\rho; \tag{1}$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mu \boldsymbol{H}, \qquad \operatorname{div} \mu \boldsymbol{H} = 0. \tag{2}$$

Среду считаем линейной, т. е. ε и μ от полей не зависят. Если использовать также индукции $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{B}$ и поляризации $\boldsymbol{P}$ и $\boldsymbol{M}$, то

$$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{E} + 4\pi \boldsymbol{P} = \varepsilon \boldsymbol{E}; \tag{3}$$

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{H} + 4\pi \boldsymbol{M} = \mu \boldsymbol{H}. \tag{4}$$

Плотность заряда ρ и плотность тока $\rho\boldsymbol{v}$ в (1), (2) включают как «внешние» заряды и токи, так и заданную («внешнюю») поляризацию $\boldsymbol{P}_0$ и $\boldsymbol{M}_0$), о чем еще пойдет речь ниже. С помощью хорошо известных операций из (1), (2) получаем

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot} \boldsymbol{H} + \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \boldsymbol{H}}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{c} \operatorname{rot} (\rho\boldsymbol{v}); \tag{5}$$

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot} \boldsymbol{E} + \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c^2} \mu \frac{\partial (\rho\boldsymbol{v})}{\partial t}. \tag{6}$$

Если вместо электрических зарядов и токов в среде имеются магнитные заряды (полюса) с плотностью ρ_m, то уравнения поля таковы:

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \varepsilon \boldsymbol{E}}{\partial t}, \qquad \operatorname{div} \varepsilon \boldsymbol{E} = 0; \tag{7}$$

---

* Поэтому излучение В.—Ч. появляется уже в первом приближении теории возмущений, обычно используемой в квантовой теории излучения. В вакууме же для свободных частиц могут идти лишь процессы не ниже второго порядка (рассеяние), когда расчеты значительно сложнее. С этим и связана методическая ценность рассмотрения излучения В.—Ч, скажем, для частиц со спином 3/2 [11].

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mu \boldsymbol{H}}{\partial t} - \frac{4\pi\rho_m \boldsymbol{v}}{c}, \qquad \operatorname{div} \mu \boldsymbol{H} = 4\pi\rho_m. \tag{8}$$

Как хорошо известно, и легко проверить, из выписанных уравнений следуют уравнения непрерывности $\partial\rho/\partial t + \operatorname{div}\rho\boldsymbol{v} = 0$ или $\partial\rho_m/\partial t + \operatorname{div}\rho_m\boldsymbol{v} = 0$.

Вместо (5), (6) из (7), (8) имеем

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot} \boldsymbol{H} + \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{H}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi\varepsilon}{c^2}\frac{\partial \rho_m \boldsymbol{v}}{\partial t}; \tag{9}$$

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot} \boldsymbol{E} + \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c}\operatorname{rot}(\rho_m \boldsymbol{v}). \tag{10}$$

Из (1), (2) или (5), (6), с одной стороны, и (7), (8) или (9), (10), с другой стороны, следует, что уравнения для магнитных полюсов получаются из уравнений для электрических зарядов в результате замены

$$\boldsymbol{E} \to \boldsymbol{H}, \qquad \boldsymbol{H} \to -\boldsymbol{E}, \qquad \rho \to \rho_m, \qquad \varepsilon \rightleftarrows \mu. \tag{11}$$

Разумеется, если поменять здесь направление стрелок (замен), то это отвечает переходу от уравнений для магнитных полюсов к уравнениям для электрических зарядов. Отметим, что выражение для плотности энергии $(\varepsilon E^2 + \mu H^2)/8\pi$ при замене (11) остается в силе.

Отмеченное свойство (речь идет о замене (11)) называют иногда принципом перестановочной двойственности. Оно позволяет, естественно, не решать заново задачу о поле магнитных монополий, если известно решение соответствующей задачи для электрических зарядов. В силу инвариантности плотности энергии при замене (11) сказанное относится и к выражениям для излучаемой электромагнитной энергии*. Например, для электрического заряда e с плотностью $\rho = e\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{v}t)$ энергия излучения В. — Ч. в единицу времени равна

$$Q_e = \frac{e^2 v}{c^2} \int\limits_{v > c/\sqrt{\varepsilon\mu}} \mu\left(1 - \frac{c^2}{\varepsilon\mu v^2}\right)\omega\, d\omega. \tag{12}$$

Эта формула для среды с $\mu = 1$ была в 1937 году получена Таммом и Франком [12]. Обобщение на случай $\mu \neq 1$ легко получается**, а в литературе оно известно [14].

Заменяя в (12), в согласии с (11), μ на ε, получаем формулу для энергии, излучаемой магнитным зарядом (полюсом) (плотность магнитного заряда $\rho_m = g\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{v}t)$):

$$Q_g = \frac{g^2 v}{c^2} \int \varepsilon\left(1 - \frac{c^2}{\varepsilon\mu v^2}\right)\omega\, d\omega. \tag{13}$$

* Это справедливо, только если источники излучения также изменяются в соответствии с (11).

** Учет магнитной проницаемости (т. е. отличия μ от 1) часто излишен, а в области оптических и более высоких частот, вообще говоря, незаконен (см. [13], § 79). Тем не менее, целесообразно вести все расчеты, вводя с самого начала проницаемость μ, поскольку это позволяет перейти к решениям для магнитных полюсов, а также может быть полезно для обсуждения некоторых формул (см., в частности, ниже). Кроме того, $\mu \neq 1$ в случае вакуума, находящегося в сильном поле (см. [8], гл. 6 и [9, 15]). Автор сожалеет в этой связи о том, что в книге [8] обычно сразу полагал $\mu = 1$. Заметим, что при $\mu \neq 1$ в гл. 6 [8] в формулах (6.14), (6.15), (6.21), (6.22) нужно заменить n на $\sqrt{\varepsilon}$, а в (6.17) $\omega_\lambda^2 = \frac{c^2}{\varepsilon\mu}k_\lambda^2$. В формулах (6.28) и (6.35) для энергии излучения электрического и магнитного осцилляторов нужно добавить множитель μ (как и в (12)), а под n понимать $\sqrt{\varepsilon\mu}$.

Непосредственным расчстом эта формула была получена в [6], правда; для среды с $\mu=1$, хотя она верна и при $\mu\neq 1$.

2. В свете сказанного может показаться, что никакой проблемы при переходе от «истинных» к токовым магнитным диполям возникать не должно. И уже подавно кажется ясным, как переходить от электрических диполей к «истинным» магнитным диполям. Такие заключения, однако, были бы слишком поспешными по той причине, что как магнитные, так и электрические диполи могут быть разного типа. Именно сопоставление различных по типу диполей при наличии среды и приводит к недоразумениям.

Начнем с электрических диполей. Поле покоящегося точечного заряда e определяется уравнениями $\operatorname{rot}\boldsymbol{E}=0$, $\operatorname{div}\varepsilon\boldsymbol{E}=4\pi\rho=4\pi e\delta(\boldsymbol{r})$ и имеет вид $\boldsymbol{E}=\dfrac{e\boldsymbol{r}}{\varepsilon r^3}$, $\boldsymbol{D}=\varepsilon\boldsymbol{E}$. Электрический диполь в простейшем варианте состоит из разноименных зарядов, так что $\rho=e(\delta(\boldsymbol{r}_2)-\delta(\boldsymbol{r}_1))\to\operatorname{div}\{\boldsymbol{p}\delta(\boldsymbol{r})\}$, где для совершения предельного перехода к точечному диполю его момент $\boldsymbol{p}=e\boldsymbol{d}$ ($\boldsymbol{d}=\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2$, поскольку, по определению, векторы $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{d}$ считаются направленными от отрицательного заряда к положительному). Тот же результат получается, если ввести поляризацию $\boldsymbol{P}$ и положить $\boldsymbol{D}=\boldsymbol{E}+4\pi\boldsymbol{P}=\varepsilon\boldsymbol{E}+4\pi\boldsymbol{P}_0$, где $\boldsymbol{P}_0$ — некоторая заданная (не зависящая от поля) поляризация в небольшом объеме. Дипольный момент этого объема $\boldsymbol{p}=\int\boldsymbol{P}_0 dv$ и при переходе к точечному диполю $\boldsymbol{P}_0=\boldsymbol{p}\delta(\boldsymbol{r})$, а $\rho=-\operatorname{div}\boldsymbol{P}_0=-\operatorname{div}\{\boldsymbol{p}\delta(\boldsymbol{r})\}$. Решение уравнения $\operatorname{div}\varepsilon\boldsymbol{E}=-4\pi\operatorname{div}\{\boldsymbol{p}\delta(\boldsymbol{r})\}$ легко получается, например, из приведенного решения для заряда и имеет вид

$$\boldsymbol{E}=\frac{3(\boldsymbol{pr})\boldsymbol{r}-r^2\boldsymbol{p}}{\varepsilon r^5},\qquad \boldsymbol{D}=\varepsilon\boldsymbol{E}. \tag{14}$$

Здесь приведен вывод хорошо известного выражения (14) для того, чтобы подчеркнуть важное для дальнейшего предположение, использованное выше. Именно среда с диэлектрической проницаемостью ε считается заполняющей все пространство, в том числе и сам диполь, который не обязательно, конечно, считать строго точечным. При этом поляризация внутри диполя $\boldsymbol{P}=\dfrac{\varepsilon-1}{4\pi}\boldsymbol{E}+\boldsymbol{P}_0=\boldsymbol{P}_i+\boldsymbol{P}_0$. Такой подход вполне естествен для диполя, образованного из двух зарядов, находящихся в среде. Однако, если диполь — это поляризованное твердое тело (пироэлектрик, электрет) достаточно малых размеров, индуцированная поляризация вовсе не обязательно должна равняться $\boldsymbol{P}_i=\dfrac{\varepsilon-1}{4\pi}\boldsymbol{E}$. Пусть, например, по аналогии с одной из моделей ферромагнетиков (см. [16], § 74 и ниже) $\boldsymbol{P}_i=\dfrac{\varepsilon-1}{4\pi}\dfrac{\boldsymbol{D}}{\varepsilon}$. Тогда в области источника (диполя) $\boldsymbol{D}=\boldsymbol{E}+4\pi\boldsymbol{P}=\boldsymbol{E}+\dfrac{\varepsilon-1}{\varepsilon}\boldsymbol{D}+4\pi\boldsymbol{P}_0$ или $\boldsymbol{D}=\varepsilon\boldsymbol{E}+4\pi\varepsilon\boldsymbol{P}_0$. Решение уравнения $\operatorname{div}\boldsymbol{D}=0$ для этого случая (при $\boldsymbol{P}_0=\boldsymbol{p}\delta(\boldsymbol{r})$) есть выражение (14), умноженное на ε. Но такое отличие на самом деле обычно не реально, как это подчеркивал Тамм в своем известном учебнике [16] (см. § 74) в применении к магнитному случаю. Действительно, пока среда считается везде однородной и мы не можем изменять ε, фиксируя $\boldsymbol{P}_0$, наблюдаемые эффекты (силы и т. д.) не могут зависеть от того — обозначить разность $\boldsymbol{D}-\varepsilon\boldsymbol{E}$ через $4\pi\boldsymbol{P}_0$ или через $4\pi\varepsilon\boldsymbol{P}_0$. Иными словами, в случае невозможности отдельно изменять и измерять ε и $\boldsymbol{P}_0$ все сводится к переобозначению момента $\boldsymbol{p}$ (или, на более модном языке, к перенормировке $\boldsymbol{p}$). Нам представляется все же, что высказанное в [16], § 74, мнение слишком категорично. Логически мыслимо, для каких-то моделей, независимо изменять ε и $\boldsymbol{P}_0$ также и в условиях, когда ε имеет одинаковые значения во всем пространстве. Несомненно, однако, что роль среды, и, конкретно, зависимость поля от проницаемости ε во внешней по отношению к диполю среде, может быть в ясной физической постановке выяснена, если внутри диполя (т. е. в области, где $\boldsymbol{P}_0 \neq 0$) проницаемость ε иная, скажем, $\varepsilon=\varepsilon_1=1$. Но в таких условиях результаты зависят от формы диполя (формы области с $\boldsymbol{P}_0\neq 0$; подробнее см. [16], § 74, где обсуждается случай магнетиков). Другой родственный физический подход — рассмотрение точечного (достаточно малого) диполя в полости с $\varepsilon=1$ (или $\varepsilon=\varepsilon_1$) в среде с $\varepsilon=\varepsilon_2\neq\varepsilon_1$. Последняя постановка вопроса интересна, в частности, при вычислении излучения источников (в том числе диполей), движущихся в каналах и щелях (см. [5] и [8], гл. 7; см. также ниже разд. 8 и 9). Наконец, для точечных (микроскопических) диполей, при отсутствии макроскопических полостей, каналов или щелей, характер излучения при том или ином выборе источника (т. е. выборе выражений для плотностей $\rho\boldsymbol{v}$ или $\rho_m\boldsymbol{v}$ и ρ или ρ_m, фигурирующих в уравнениях поля в среде) нужно, вообще говоря, выяснять на основе микротеории. Об этом еще пойдет речь в конце настоящей статьи.

В дальнейшем, в отношении точечных электрических диполей, ограничимся простейшим и естественным как с макроскопической, так и с микроскопической точек зрения случаем: будем считать, что плотность заряда $\rho=-\operatorname{div}\{\boldsymbol{p}\delta(\boldsymbol{r})\}$. Чему отвечает такой выбор — ясно из сказанного выше*. Тогда плотность тока $\boldsymbol{j}=\rho\boldsymbol{v}=\dfrac{\partial \boldsymbol{p}\delta(\boldsymbol{r})}{\partial t}$, как это ясно уже из уравнения непрерывности $\partial\rho/\partial t+\operatorname{div}\boldsymbol{j}=0$. Вместе с тем ясно, что уравнение непрерывности соблюдается и при добавлении к выражению для $\boldsymbol{j}$ некоторого слагаемого типа $\operatorname{rot}\boldsymbol{a}$. Как известно, именно такое слагаемое вида $c\operatorname{rot}\boldsymbol{M}=c\operatorname{rot}\{\boldsymbol{m}\delta(\boldsymbol{r})\}$ отвечает учету тока, соответствующего токовому магнитному моменту $\boldsymbol{m}$. Иметь в виду это слагаемое необходимо. Достаточно сказать, что если в системе покоя диполя (т. е. в системе отсчета, в которой диполь покоится) он обладает только электрическим моментом $\boldsymbol{p}'$, то в лабораторной системе отсчета, в которой источник движется со скоростью $\boldsymbol{v}$, не только изменяется величина момента $\boldsymbol{p}$, но и, вообще говоря, появляется магнитный момент $\boldsymbol{m}$. Для простоты ограничимся ниже диполями (как электрическими, так и магнитными), параллельными ($\|$) или перпендикулярными ($\perp$) скорости $\boldsymbol{v}$. Тогда для электрического диполя в системе покоя ($\boldsymbol{p}'$, $\boldsymbol{m}'=0$) в лабораторной системе

$$p_{\|}=p'_{\|}\sqrt{1-v^2/c^2}, \qquad m_{\|}=m'_{\|}=0; \tag{15}$$

$$p_{\perp}=p'_{\perp}, \qquad m_{\perp}=-(1/c)\,[\boldsymbol{v}\boldsymbol{p}_{\perp}] \tag{16}$$

(см., например, [4, 6] или [17], где приведены формулы преобразования поляризации $\boldsymbol{P}$ и намагничения $\boldsymbol{M}$, из которых переход к моментам $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{m}$ осуществляется при интегрировании по объему или просто при умножении на объем $V=V'\sqrt{1-v^2/c^2}$, см. также ниже разд. 7).

---

* Другие возможности — это, например, отмеченный выбор плотности $\rho=-\varepsilon\operatorname{div}\{\boldsymbol{p}\delta(\boldsymbol{r})\}$ и рассмотрение электрического диполя создаваемого током магнитных зарядов (см. также ниже). Как мы увидим, рассмотрение точечных диполей в среде в рамках макроскопической электродинамики имеет ограниченное значение. Мы концентрируем внимание на точечных диполях просто потому, что только в этом случае можно получить легко обозримые решения для полей и излучаемой энергии,

3. Плотность тока, отвечающая дипольному моменту $\boldsymbol{m}$, равна $c\,\mathrm{rot}\,\{\boldsymbol{m}\delta(\boldsymbol{r})\}$, как это упоминалось и еще поясняется ниже. Таким образом, для движущихся точечных диполей можно положить

$$j = c\,\mathrm{rot}\,\{\boldsymbol{m}\delta(\boldsymbol{r})\} + \frac{\partial\{\boldsymbol{p}\delta(\boldsymbol{r})\}}{\partial t}, \tag{17}$$

где $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{m}$ измеряются в лабораторной системе отсчета (точнее, в (17) нужно писать не $\delta(\boldsymbol{r})$, а $\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0(t))$, где $\boldsymbol{r}_0(t)$ — положение диполя в момент t).

В случае равномерно движущихся диполей $\boldsymbol{r}_0=\boldsymbol{v}t$, и дальнейшие вычисления, необходимые для получения полей и энергии излучения В.—Ч., неоднократно проводились различными, хотя по сути дела и вполне эквивалентными способами [3–10]. Обычно, правда, полагают магнитную проницаемость $\mu=1$, но, например, в [9, 10] значение μ произвольно (кроме того, выше в примечании было указано, как легко обобщить расчеты, приведенные в [8], на случай $\mu\neq 1$).

Результаты для энергии, излучаемой в единицу времени, таковы:

$$Q_{p_\parallel} = \frac{p^2}{c^2 v}\int \mu\left(1-\frac{c^2}{\varepsilon\mu v^2}\right)\omega^3\,d\omega; \tag{18}$$

$$Q_{p_\perp} = \frac{p^2 v}{2c^4}\int \varepsilon\mu^2\left(1-\frac{c^2}{\varepsilon\mu v^2}\right)^2\omega^3\,d\omega, \tag{19}$$

где, как и в (12), (13) и нижеследующих выражениях для Q в случае излучения В.—Ч., интегрирование ведется по области частот, для которых $v\geqslant c/\sqrt{\varepsilon\mu}$. В (18) и (19) значения p измеряются в лабораторной (неподвижной) системе отсчета. В случае (18), т. е. при $\boldsymbol{p}=p(\boldsymbol{v}/v)$, можно заменить $p=p'\sqrt{1-v^2/c^2}$, как это ясно из (15). В случае (19) $p=p'$, причем рассматривается диполь чисто электрический в системе покоя, но обладающий магнитным моментом в лабораторной системе (см. (16)).

В согласии со сказанным выше учет роли магнитной проницаемости μ сводится к появлению в (18) и (19) множителя μ (не считая замены ε на $n^2=\varepsilon\mu$). При $\mu=1$ формулы (18) и (19) были получены еще в [4].

Приведем также формулу (она отличается от формулы (7.45) в [1] добавлением множителя μ) для излучения В.—Ч. в случае произвольных электрического и магнитного моментов $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{m}$:

$$Q = \frac{1}{2\pi v c^2}\sum_{j=1,2}\int d\omega\int_0^{2\pi}\mu n^2\omega^3\left\{\boldsymbol{m}\,[\boldsymbol{s}\boldsymbol{a}_j] + \frac{1}{n}(\boldsymbol{p}\boldsymbol{a}_j)\right\}^2 d\varphi, \tag{20}$$

где $n^2=\varepsilon\mu$, $a_1=a_2=1$, $\boldsymbol{s}=\boldsymbol{k}/k$, векторы поляризации $\boldsymbol{a}_j$ взаимно ортогональны и ортогональны волновому вектору $\boldsymbol{k}$; для излучения В.—Ч. $\cos\theta=\cos\theta_0=c/nv$, где θ и φ — полярный и азимутальный углы для вектора $\boldsymbol{k}$ в системе координат с осью z, направленной по скорости $\boldsymbol{v}$.

Разумеется, из (20) легко получить формулы (18) и (19), подставляя $\boldsymbol{m}=-(1/c)\,[\boldsymbol{v}\boldsymbol{p}]$. Для диполя $\boldsymbol{p}\perp\boldsymbol{v}$, чисто электрического в лабораторной системе, когда в (20) $\boldsymbol{m}=0$,

$$Q_{p_\perp, m=0} = \frac{p^2}{2vc^2}\int\mu\left(1+\frac{c^2}{\varepsilon\mu v^2}\right)\omega^3 d\omega. \tag{21}$$

4. Для известной полноты картины и имея в виду переход к случаю «истинных» магнитных моментов, остановимся также на вычисле-

нии полей равномерно движущегося электрического диполя в $\boldsymbol{k}$-представлении, т. е. для фурье-компонент:

$$E(r, t) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int E_{\boldsymbol{k},\omega} e^{i(\boldsymbol{kr}-\omega t)} d\boldsymbol{k} d\omega, \tag{22}$$

$$E_{\boldsymbol{k},\omega} = \int E(\boldsymbol{r}, t) e^{-i(\boldsymbol{kr}-\omega t)} d\boldsymbol{r}\, dt,$$

и аналогично для других полей*. Тогда, например, уравнения (1) и (2) принимают вид

$$\begin{gathered} i\,[\boldsymbol{k}H_{\boldsymbol{k},\omega}] = \frac{4\pi}{c} j_{\boldsymbol{k},\omega} - \frac{i\omega\varepsilon}{c} E_{\boldsymbol{k}\,\omega}, \qquad i(\boldsymbol{k}E_{\boldsymbol{k},\omega}) = 4\pi\rho_{\boldsymbol{k},\omega}, \\ [\boldsymbol{k}E_{\boldsymbol{k},\omega}] = \frac{\mu\omega}{c} H_{\boldsymbol{k},\omega}, \qquad (\boldsymbol{k}H_{\boldsymbol{k},\omega}) = 0, \qquad j_{\boldsymbol{k},\omega} = (\rho\boldsymbol{v})_{\boldsymbol{k},\omega}. \end{gathered} \tag{23}$$

Конечно, для перехода от (1), (2) к (23) достаточно подставить в уравнения все поля в виде $E = E_{\boldsymbol{k},\omega} e^{(\boldsymbol{kr}-\omega t)}$ и т. д. Это эквивалентно использованию выражений (22) и вытекающей из них формулы

$$\delta(\boldsymbol{k} - \boldsymbol{k}')\,\delta(\omega - \omega') = \frac{1}{(2\pi)^4} \int e^{i\{(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')\boldsymbol{r} - (\omega-\omega')t\}} d\boldsymbol{r} dt.$$

Из (23) имеем

$$[\boldsymbol{k}\,[\boldsymbol{k}E_{\boldsymbol{k},\omega}]] + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon\mu E^2_{\boldsymbol{k},\omega} = -\frac{4\pi i\mu\omega}{c^2} j_{\boldsymbol{k},\omega}, \tag{24}$$

откуда

$$E_{\boldsymbol{k},\omega,e} = \frac{4\pi i\mu\omega}{c^2 (k^2 - (\varepsilon\mu/c^2)\omega^2)} j_{\boldsymbol{k},\omega,m} \left(\delta_{em} - \frac{k_e k_m c^2}{\varepsilon\mu\omega^2}\right). \tag{25}$$

Подобно тому, как для электрического диполя получается (см. выше) выражение $\rho = -\operatorname{div}\{\boldsymbol{p}\delta(\boldsymbol{r})\}$, для такого диполя имеем $\rho\boldsymbol{v} = -(\boldsymbol{p}\nabla)\times \times\delta(\boldsymbol{r})\boldsymbol{v}$. Но при $\boldsymbol{p} = \text{const}$, по формулам векторного анализа

$$\rho\boldsymbol{v} = -(\boldsymbol{p}\nabla)\delta\boldsymbol{v} = \operatorname{rot}[\boldsymbol{p}\delta\boldsymbol{v}] - \boldsymbol{p}\operatorname{div}\{\delta\boldsymbol{v}\},$$

$$\boldsymbol{p}\operatorname{div}\{\delta\boldsymbol{v}\} = \boldsymbol{p}(\boldsymbol{v}\nabla\delta) + \boldsymbol{p}\,\delta\operatorname{div}\boldsymbol{v}.$$

Далее, для постоянного диполя

$$\frac{d\boldsymbol{p}\delta}{dt} = \frac{\partial\boldsymbol{p}\delta}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\nabla)\,\boldsymbol{p}\delta = \frac{\partial\boldsymbol{p}\delta}{\partial t} + \boldsymbol{p}(\boldsymbol{v}\nabla\delta) = 0.$$

Следовательно, при $\operatorname{div}\boldsymbol{v} = 0$ и подавно при $\boldsymbol{v} = \text{const}$ можем написать (см. также (16))

$$\rho\boldsymbol{v} = \operatorname{rot}[\boldsymbol{p}\delta\boldsymbol{v}] + \frac{\partial\boldsymbol{p}\delta}{\partial t} = c\operatorname{rot}\{\boldsymbol{m}\delta\} + \frac{\partial\{\boldsymbol{p}\delta\}}{\partial t}. \tag{26}$$

Разумеется, мы получили для данного случая результат (17), который хорошо известен, но в учебниках обычно выводится косвенным путем. Нужно еще заметить, что выше диполь помещался в точке $\boldsymbol{r} = 0$, по-

* Употребляются и другие обозначения, в которых $E(\boldsymbol{r}, t) = \int E_{\boldsymbol{k},\omega} e^{i(\boldsymbol{kr}-\omega t)} d\boldsymbol{k} d\omega$ и т. д.

скольку δ-функция записывалась в виде $\delta(\boldsymbol{r})$. Для движущегося диполя нужно писать $\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0(t))$ и, конкретно, при движении с постоянной скоростью $\boldsymbol{v}$ употреблять функцию $\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{v}t)$. Поэтому для заряда $\rho\boldsymbol{v}=e\boldsymbol{v}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{v}t)$, а для диполей в (17) или (26) также под $\boldsymbol{r}$ понимается $\boldsymbol{r}-\boldsymbol{v}t$. Используя (16) или сразу (17) с $\boldsymbol{m}=-(1/c)[\boldsymbol{vp}]$, а также формулу $\delta(\boldsymbol{r})=(2\pi)^{-3}\int e^{i\boldsymbol{kr}}d\boldsymbol{k}$, получаем

$$j_{\boldsymbol{k},\omega}=-i\{[\boldsymbol{k}[\boldsymbol{vp}]]+(\boldsymbol{kv})\boldsymbol{p}\}2\pi\delta(\omega-\boldsymbol{kv}). \tag{27}$$

Направляя ось z по $\boldsymbol{v}$ и $\boldsymbol{p}$ по оси x, из (25) и (26) находим $(\omega=k_zv)$

$$E_{\boldsymbol{k},\omega,x}=-\frac{4\pi k_x(k_xp_x)}{\varepsilon(k^2-k_z^2\varepsilon\mu v^2/c^2)}2\pi\delta(\omega-k_zv),$$

$$E_{\boldsymbol{k},\omega,y}=-\frac{4\pi k_y(k_xp_x)}{\varepsilon(k^2-k_z^2\varepsilon\mu v^2/c^2)}2\pi\delta(\omega-k_zv), \tag{28}$$

$$E_{\boldsymbol{k},\omega,z}=-\frac{4\pi k_z(k_xp_x)(1-\varepsilon\mu v^2/c^2)}{\varepsilon(k^2-k_z^2\varepsilon\mu v^2/c^2)}2\pi\delta(\omega-k_zv);$$

$$\boldsymbol{H}_{\boldsymbol{k},\omega}=(c/\mu k_zv)[\boldsymbol{k}\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{k},\omega}],$$

$$H_{\boldsymbol{k},\omega,x}=\frac{v}{c}\frac{4\pi k_y(k_xp_x)}{(k^2-k_z^2\varepsilon\mu v^2/c^2)}2\pi\delta(\omega-k_zv), \tag{29}$$

$$H_{\boldsymbol{k},\omega,y}=-\frac{v}{c}\frac{4\pi k_x(k_xp_x)}{(k^2-k_z^2\varepsilon\mu v^2/c^2)}2\pi\delta(\omega-k_zv),\qquad H_{\boldsymbol{k},\omega,z}=0.$$

В более общем случае, когда $p_y\neq0$ (но $p_z=0$), в (28), (29) нужно заменить k_xp_x на $k_xp_x+k_yp_y$. При этом $j_{\boldsymbol{k},\omega,x}=j_{\boldsymbol{k},\omega,y}=0$ и $j_{\boldsymbol{k},\omega,z}=-iv(k_xp_x+k_yp_y)2\pi\delta(\omega-k_xv)$. В частном случае покоящегося диполя

$$\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{k},\omega}=-\frac{4\pi(\boldsymbol{kp})\boldsymbol{k}}{\varepsilon k^2}2\pi\delta(\omega). \tag{30}$$

Часто удобно использовать представления

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)=\frac{1}{2\pi}\int\boldsymbol{E}_\omega(\boldsymbol{r})e^{-i\omega t}d\omega=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{k}}(t)e^{i\boldsymbol{kr}}d\boldsymbol{k},$$

$$\boldsymbol{E}_\omega(\boldsymbol{r})=\int\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)e^{i\omega t}dt=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{k},\omega}e^{i\boldsymbol{kr}}d\boldsymbol{k},$$

$$\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{k}}(t)=\int\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)e^{-i\boldsymbol{kr}}d\boldsymbol{r}=\frac{1}{2\pi}\int\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{k},\omega}e^{-i\omega t}d\omega.$$

В случае (30), таким образом, $\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{k}}=-\dfrac{4\pi(\boldsymbol{kp})\boldsymbol{k}}{\varepsilon k^2}$, в то время как поле $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ определяется формулой (14). Как известно, для заряда $\boldsymbol{E}=\dfrac{e\boldsymbol{r}}{\varepsilon r^3}$ и $\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{k}}=-i\dfrac{4\pi e\boldsymbol{k}}{\varepsilon k^2}$ (см., например, [18], § 51). Кстати, на первый взгляд кажется, что при $\boldsymbol{v}=0$, когда $\boldsymbol{j}=\rho\boldsymbol{v}=0$ (см. также (27)), и поле $\boldsymbol{E}$, согласно (25), должно равняться нулю. Но это не так, поскольку в (25) в знаменателе второго члена справа фигурирует $\omega^2 = (\boldsymbol{k}\boldsymbol{v})^2$. Разумеется, поле при $\boldsymbol{v} = 0$ сразу получается из уравнения $\operatorname{div} \varepsilon \boldsymbol{E} = 4\pi\rho$, откуда $(\boldsymbol{k}\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{k}}) = -\frac{4\pi(\boldsymbol{k}\boldsymbol{p})}{\varepsilon}$ при $\rho = -\operatorname{div}\{\boldsymbol{p}\delta(\boldsymbol{r})\}$ (в силу $\operatorname{rot}\boldsymbol{E} = 0$, кроме того, $[\boldsymbol{k}\boldsymbol{E}] = 0$).

Уместно также отметить, что поле электрического диполя (28), (29) поляризовано (в смысле направления вектора $\boldsymbol{E}$) в плоскости векторов $\boldsymbol{k}$ и $\boldsymbol{v}$, т. е. $\boldsymbol{E}[\boldsymbol{k}\boldsymbol{v}] = 0$; магнитное поле перпендикулярно $\boldsymbol{v}$.

5. В случае «истинного» магнитного диполя, по сути дела по определению, плотность магнитного заряда $\rho_m = -\operatorname{div}\{\boldsymbol{m}\delta(\boldsymbol{r})\}$. Если чисто магнитный (в системе покоя) диполь движется со скоростью $\boldsymbol{v}$, то в лабораторной системе он обладает также электрическим моментом

$$\boldsymbol{p} = (1/c)[\boldsymbol{v}\boldsymbol{m}]. \tag{31}$$

Эта формула не связана с природой диполя и следует просто из закона преобразования полей и поляризаций (см. [4, 6, 17] и разд. 7 ниже). Подобно тому, как это было сделано выше, для электрического диполя легко показать, что $\rho_m\boldsymbol{v} = \operatorname{rot}[\boldsymbol{m}\delta\boldsymbol{v}] + \frac{\partial\{\boldsymbol{m}\delta\}}{\partial t} = -\operatorname{rot}\{\boldsymbol{p}\delta(\boldsymbol{r})\} + \frac{\partial\{\boldsymbol{m}\delta(\boldsymbol{r})\}}{\partial t}$.

Однако нет оснований повторять вычисления для «истинного» магнитного диполя на основе выписанных выражений для ρ_m и $\rho_m\boldsymbol{v}$ и уравнений (7) и (8), поскольку достаточно воспользоваться решением для электрического диполя и преобразованиями (11). Если фигурируют также моменты $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{m}$, то переход от формул для электрического диполя к истинному магнитному диполю осуществляется также путем замены $\boldsymbol{m} \to -\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{p} \to \boldsymbol{m}$. В выражениях же для излучаемой энергии нужна замена $\varepsilon \rightleftarrows \mu$.

Поступая таким образом, из (18) и (19) получаем формулы для излучения В.—Ч. истинного магнитного диполя (с учетом (31)):

$$Q_{m\parallel} = \frac{m^2}{c^2 v}\int \varepsilon\left(1 - \frac{c^2}{\varepsilon\mu v^2}\right)\omega^3 d\omega; \tag{32}$$

$$Q_{m\perp} = \frac{m^2 v}{2c^4}\int \varepsilon^2\mu\left(1 - \frac{c^2}{\varepsilon\mu v^2}\right)^2\omega^3 d\omega. \tag{33}$$

Выражения (32), (33) совпадают с полученными ранее (см. [9, 10]; при $\mu = 1$ см. [6]).

Поля истинного магнитного диполя получаются из (28), (29) путем замены (11). Для покоящегося диполя (см. (14) и (30))

$$\boldsymbol{H} = \frac{3(\boldsymbol{m}\boldsymbol{r})\boldsymbol{r} - r^2\boldsymbol{m}}{\mu r^5}, \qquad \boldsymbol{B} = \mu\boldsymbol{H}, \qquad \boldsymbol{E} = 0, \tag{34 а}$$

$$\boldsymbol{H}_{\boldsymbol{k}} = -\frac{4\pi(\boldsymbol{k}\boldsymbol{m})\boldsymbol{k}}{\mu k^2}.$$

Для движущегося «истинного» магнитного диполя (скорость $\boldsymbol{v}$ направлена по оси z, а сам диполь $\boldsymbol{m}$ направлен по оси x)

$$H_{\boldsymbol{k},x} = -\frac{4\pi m_x k_x^2}{\mu(k^2 - k_z^2\varepsilon\mu v^2/c^2)}, \qquad H_{\boldsymbol{k},y} = -\frac{4\pi m_x k_x k_y}{\mu(k^2 - k_z^2\varepsilon\mu v^2/c^2)}, \tag{34б}$$

$$H_{k,z} = -\frac{4\pi m_x k_x k_z (1 - v^2 \varepsilon\mu/c^2)}{\mu (k^2 - k_z^2 \varepsilon\mu v^2/c^2)};$$

$$E_{k,x} = -\frac{4\pi m_x k_x k_y}{c (k^2 - k_z^2 \varepsilon\mu v^2/c^2)}, \qquad E_{k,y} = \frac{4\pi m_x k_x^2 v}{c (k^2 - k_z^2 \varepsilon\mu v^2/c^2)}, \tag{34в}$$

$$E_{k,z} = 0.$$

Здесь и ниже в аналогичных выражениях опущен множитель $e^{-ik_z vt}$, фигурирующий во всех выражениях для E_k и H_k в случае равномерного движения (см. 28), (29) и определение E_k, имеющееся после формулы (30)).

6. Перейдем, наконец, к рассмотрению токового магнитного диполя, поле которого создается токами, в том числе так называемыми молекулярными токами. В вакууме последние отсутствуют, и поле статического точечного магнитного момента определяется уравнениями

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{B} = \frac{4\pi}{c} \boldsymbol{j} = 4\pi \operatorname{rot} \{\boldsymbol{m}\delta(\boldsymbol{r})\}, \qquad \operatorname{div} \boldsymbol{B} = 0, \qquad \boldsymbol{B} = \boldsymbol{H}, \tag{35}$$

отсюда

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{H} = \frac{3(\boldsymbol{m}\boldsymbol{r})\boldsymbol{r} - r^2\boldsymbol{m}}{r^5} + 4\pi\boldsymbol{m}\delta(\boldsymbol{r}). \tag{36}$$

Последний член в (36) часто опускают, либо имея в виду поле вдали от диполя (или, строго говоря, вне его), либо по недоразумению. Но этот член существен, если, например, рассматривается рассеяние волн на магнитном диполе с учетом нелинейности уравнений поля (см. [2, 15]). Как мы увидим, член $4\pi\boldsymbol{m}\delta(\boldsymbol{r})$ играет также существенную роль для диполя, движущегося в среде. Появление члена $4\pi\boldsymbol{m}\delta(\boldsymbol{r})$ отражает тот факт, что в отсутствие магнитных зарядов (полюсов) магнитные силовые линии должны быть замкнуты. Добавим, что, рассматривая точечный магнитный диполь как предел достаточно маленького диполя-соленоида, сразу же видим, что поле внутри диполя (соленоида) направлено так же, как вблизи его полюсов, но вне диполя. В случае же «истинного» магнитного диполя наоборот — поле внутри направлено от полюса (+) к полюсу (—), а непосредственно вне диполя — в противоположном направлении. Что касается формальной стороны дела, то, как ясно из рассмотрения электрического диполя или истинного магнитного диполя, поле (34) с $\mu = 1$ удовлетворяет уравнению $\operatorname{div} \boldsymbol{H} = -4\pi \operatorname{div} \{\boldsymbol{m}\delta(\boldsymbol{r})\}$. Отсюда следует, что именно поле (36) удовлетворяет уравнению $\operatorname{div} \boldsymbol{H} = 0$.

При наличии среды с проницаемостями ε и μ обычно вместо (35) пишут

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{H} = 4\pi \operatorname{rot} \{\boldsymbol{m}\delta(\boldsymbol{r})\}, \qquad \operatorname{div} \boldsymbol{B} = 0, \qquad \boldsymbol{B} = \mu\boldsymbol{H}. \tag{37}$$

В таком случае в везде однородной среде, как очевидно из (35) и (36),

$$\boldsymbol{H} = \frac{3(\boldsymbol{m}\boldsymbol{r})\boldsymbol{r} - r^2\boldsymbol{m}}{r^5} + 4\pi\boldsymbol{m}\delta(\boldsymbol{r}) = \frac{\boldsymbol{B}}{\mu}. \tag{38 а}$$

Эти значения $\boldsymbol{H}$ и $\boldsymbol{B}$ в μ раз больше, чем поля (34 а) для истинного магнитного диполя (от δ-члена сейчас отвлекаемся). Такое различие, однако, в значительной мере является фиктивным, как это уже было пояснено выше (см. разд. 2) для электрического диполя. Действительно, будем рассматривать магнитный диполь как небольшой ферромагнитный стерженек объема V со спонтанным намагничением $\boldsymbol{M}_0$ и моментом $\boldsymbol{m} = \boldsymbol{M}_0 V$. Если стерженек заполнен средой, для которой индуцированное намагничение $\boldsymbol{M}_i = [(\mu - 1)/4\pi]\,\boldsymbol{H}$, то полное намагничение в стерженьке $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}_i + \boldsymbol{M}_0 = \frac{\boldsymbol{B} - \boldsymbol{H}}{4\pi} = \frac{\mu - 1}{4\pi}\boldsymbol{H} + \boldsymbol{M}_0$, $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{H} + 4\pi\boldsymbol{M} = \mu\boldsymbol{H} + 4\pi\boldsymbol{M}_0$. При этом, по смыслу уравнений поля в сплошной среде, в (37) можно положить $\boldsymbol{m}=0$ (в (37) $\boldsymbol{m}$ — момент, не связанный с намагничением) и для точечного диполя $\operatorname{div}\mu\boldsymbol{H} = -4\pi \operatorname{div}\boldsymbol{M}_0 = -4\pi \operatorname{div}\{\boldsymbol{m}\delta(\boldsymbol{r})\}$, $\boldsymbol{m} = \int \boldsymbol{M}_0 dV$. Таким образом получаем поле истинного магнитного диполя (34). Вместе с тем, постоянный магнит ближе к токовому моменту и, во всяком случае, не предполагает существования каких-то магнитных монополей.

Положим теперь $\boldsymbol{M}_i = [(\mu - 1)/4\pi](\boldsymbol{B}/\mu)$, откуда $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{H} + 4\pi\boldsymbol{M} = \boldsymbol{H} + [(\mu - 1)/\mu]\,\boldsymbol{B} + 4\pi\boldsymbol{M}_0$ или $\boldsymbol{B} = \mu\boldsymbol{H} + 4\pi\mu\boldsymbol{M}_0$. Тогда, очевидно, если понимать под $\boldsymbol{m}$ момент $\boldsymbol{m} = \int \boldsymbol{M}_0 dV$, получим поля (38 а). В этом варианте $\operatorname{div}\mu\boldsymbol{H} = -4\pi \operatorname{div}\{\mu\boldsymbol{M}_0\}$, что эквивалентно существованию истинного магнитного диполя с моментом $\mu\int \boldsymbol{M}_0 dV$. Как подчеркивал Тамм (см. [16], § 74), именно второй вариант более естествен для токовых магнитных моментов, ибо в этом случае $\operatorname{rot}(\boldsymbol{B}/\mu) = \operatorname{rot}\boldsymbol{H} + 4\pi \operatorname{rot}\boldsymbol{M}_0 = (4\pi/c)(\boldsymbol{j} + \boldsymbol{j}_{\text{мол}})$ и плотность молекулярных токов $\boldsymbol{j}_{\text{мол}} = c \operatorname{rot}\boldsymbol{M}_0$ входит в уравнения равноправным образом с плотностью других токов (например, токов проводимости). Если вместо стерженька — постоянного магнита — рассмотреть соленоид такой же формы, заполненный линейной средой (в ней $\boldsymbol{B} = \mu\boldsymbol{H}$), то при заданном токе $\boldsymbol{j}$ в катушке реализуется как раз такой вариант (в этом случае $\operatorname{rot}(\boldsymbol{B}/\mu) = \operatorname{rot}\boldsymbol{H} = 4\pi\boldsymbol{j}/c$). При заданном токе $\boldsymbol{j}$ магнитная индукция в сердечнике (среде) повышается по сравнению со случаем вакуума в μ раз, что как раз и обеспечивает переход от (34 а) к (38 а).

Так или иначе, когда используют уравнения (37) или их обобщающие (см. (1), (2)), например, с $\rho\boldsymbol{v} = \boldsymbol{j} = c \operatorname{rot}\{\boldsymbol{m}\delta\} + \partial\{\boldsymbol{p}\delta\}/\partial t$, то источники — в интересующих нас здесь случаях моменты $\boldsymbol{m}$ и $\boldsymbol{p}$ — задаются. Кроме того, для однородной среды во всем пространстве полагают $\boldsymbol{B} = \mu\boldsymbol{H}$ и, следовательно, $\operatorname{rot}\boldsymbol{H} = \operatorname{rot}(\boldsymbol{B}/\mu)$. Но это как раз отвечает второму из рассмотренных выше вариантов, а в частном случае покоящегося диполя — использованию уравнений (37) и их решения (38 а).

Итак, уже в статическом случае «истинные» и токовые магнитные диполи не эквивалентны (не говоря уже о множителе $1/\mu$, решение (34 а) не содержит члена с δ-функцией). Для движущегося токового магнитного момента, когда появляется, вообще говоря, и электрический диполь, такая неэквивалентность усугубляется. Последнее ясно, в частности, на примере излучения В.—Ч.

Для токового магнитного момента, параллельного скорости,

$$Q^{T}_{m\,\parallel} = \frac{m^2}{c^2 v}\int \varepsilon\mu^2\left(1 - \frac{c^2}{\varepsilon\mu v^2}\right)\omega^3 d\omega. \tag{39}$$

При $\mu=1$ это выражение было получено еще в [3]. Обобщение на среду с $\mu\neq 1$ особенно легко достигается путем использования формулы (20) или, совсем просто, путем умножения на μ результата (при $\mu=1$), выраженного через $n^2=\varepsilon\mu$. Тот факт, что мощность излучения (39) в μ^2 раз больше мощности (32) для истинного магнитного диполя, объясняется просто тем, что при одинаковых m поле токового момента (38) в μ раз больше поля истинного момента (34). Если же определять моменты m так, чтобы их статические магнитные поля в среде совпадали, что представляется естественным, то отличие между формулами (32) и (39) исчезает.

Для токового диполя, перпендикулярного скорости (и, как и ранее, являющегося чисто магнитным лишь в системе покоя),

$$Q^T_{m_\perp} = \frac{m^2}{2c^2 v} \int \varepsilon\mu^2 \left[2\left(1 - \frac{1}{\varepsilon\mu}\right)^2 - \left(1 - \frac{v^2}{\varepsilon\mu c^2}\right)\left(1 - \frac{c^2}{\varepsilon\mu v^2}\right)\right] \omega^3 d\omega. \quad (40)$$

Впервые этот результат при $\mu=1$ был получен в [4, 6], обобщение см. в [9, 10]; из формулы (7.47) в [8] мощность (40) получается умножением на μ и подставкой $n^2=\varepsilon\mu$.

7. В среде поле рассматриваемого движущегося токового диполя с $\boldsymbol{m}_\perp \perp \boldsymbol{v}_\perp$ не только количественно, но и в качественном отношении отличается от поля «истинного» магнитного диполя (34). Для вычисления поля токового диполя нужно в уравнение (24) подставить соответствующее выражение для плотности тока $\boldsymbol{j}_{\boldsymbol{k},\omega}$ или $\boldsymbol{j}_{\boldsymbol{k}} = \frac{1}{2\pi}\int \boldsymbol{j}_{\boldsymbol{k},\omega} \times$ $\times\, e^{-i\omega t} d\omega$ (ниже положено $v_x = v_y = 0$, $v_z = v$; $m_x \neq 0$, $m_y = m_z = 0$; напомним также, что множитель $e^{-ik_z v}$ мы опускаем):

$$\boldsymbol{j} = c \operatorname{rot} \{\boldsymbol{m}\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{v}t)\} + \frac{\partial}{c\partial t}[\boldsymbol{v}\boldsymbol{m}\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{v}t)].$$

$$\boldsymbol{j}_{\boldsymbol{k}} = i\left\{c[\boldsymbol{k}\boldsymbol{m}] - \frac{(\boldsymbol{k}\boldsymbol{v})}{c}[\boldsymbol{v}\boldsymbol{m}]\right\}, \quad j_{\boldsymbol{k},x} = 0, \quad (41)$$

$$j_{\boldsymbol{k},y} = icm_x k_z(1 - v^2/c^2), \quad j_{\boldsymbol{k},z} = -icm_x k_y.$$

Заметим, что выражение (41) можно получить, конечно, с помощью преобразования Лоренца, из системы покоя, в которой $\boldsymbol{j}' = c\operatorname{rot}(\boldsymbol{m}'\delta(\boldsymbol{r}))$, $\rho'=0$. В данном случае поступать так нет оснований, поскольку результат уже отражен в выражении (17), использованном в (41). Но для других источников (в частности, для рассматриваемого ниже тороидного диполя) нужно использовать именно преобразование для четырехмерной плотности тока (см. [19], где рассматривается тороидный диполь).

Подставляя (41) в (24), получаем

$$H_{\boldsymbol{k},x} = -\frac{4\pi m_x\{k_x^2 - (\varepsilon\mu - 1)(v^2/c^2)k_z^2\}}{k^2 - k_z^2\varepsilon\mu v^2/c^2} + 4\pi m_x,$$

$$H_{\boldsymbol{k},y} = -4\pi m_x k_x k_y (k^2 - k_z \varepsilon\mu v^2/c^2)^{-1}, \quad (38\text{б})$$

$$H_{\boldsymbol{k},z} = -\frac{4\pi m_x k_x k_z (1 - v^2/c^2)}{k^2 - k_z^2\varepsilon\mu v^2/c^2}, \quad \boldsymbol{H}_{\boldsymbol{k}} = \frac{c}{\mu k_z v}[\boldsymbol{k}\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{k}}];$$

$$E_{\boldsymbol{k},x} = -\frac{4\pi v m_x k_x k_y}{c\varepsilon(k^2 - k_z^2\varepsilon\mu v^2/c^2)},$$

$$E_{\boldsymbol{k},y} = -\frac{4\pi v m_x\{(\varepsilon\mu - 1)k_z^2 - k_x^2\}}{c\varepsilon(k^2 - k_z^2\varepsilon\mu v^2/c^2)} - \frac{4\pi v m_x}{c\varepsilon} = \quad (38\text{в})$$

$$= \frac{4\pi v m_x\{k_y^2 + \varepsilon\mu(1 - v^2/c^2)k_z^2\}}{c\varepsilon(k^2 - k_z^2\varepsilon\mu v^2/c^2)},$$

$$E_{\boldsymbol{k},z} = \frac{4\pi v m_x(\varepsilon\mu - 1)k_y k_z}{c\varepsilon(k^2 - k_z^2\varepsilon\mu v^2/c^2)}.$$

В вакууме поля (34б), (34в) и (38б), (38в), разумеется, совпадают. Но в среде различия, как сказано, носят качественный характер — достаточно сказать, что для токового диполя в среде поле $E_{k,z} \neq 0$, а для «истинного» диполя $E_{k,z} = 0$.

Поэтому не приходится удивляться и различию в мощности излучения В.—Ч. Так, мощность (40) существенно отличается от мощности (33), отвечающей также перпендикулярному скорости, но «истинному» магнитному диполю. Именно это обстоятельство казалось странным, но в свете изложенного вполне естественно. Вместе с тем, хотелось бы глубже, детальнее понять, в чем же отличаются токовые и «истинные» диполи при движении в среде.

Сделаем в этой связи несколько замечаний. Отметим прежде всего, что для получения для токового диполя формулы (33) нужно считать, что электрический диполь, отвечающий движущемуся магнитному диполю, имеет вместо (31) момент

$$p_{\text{eff}} = (\varepsilon\mu/c)[\boldsymbol{vm}]. \tag{42}$$

На этот факт уже давно обратил внимание Франк [6] для случая $\mu = 1$.

Действительно, если подставить (42) в (20), то

$$Q_{m_\perp} = \frac{m^2 v}{2c^4} \int (\varepsilon\mu)^2 \mu \left(1 - \frac{c^2}{\varepsilon\mu\, v^2}\right)^2 \omega^3 d\omega, \tag{43}$$

что отличается от (33) лишь множителем μ^2, происхождение которого выяснено выше на примере излучения параллельного скорости момента $\boldsymbol{m}$.

В согласии со сказанным, если заменить плотность тока (41) на плотность $\boldsymbol{j} = c \operatorname{rot}\{\boldsymbol{m}\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{v}t)\} + \frac{\varepsilon\mu}{c}\frac{\partial}{\partial t}[\boldsymbol{vm}\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{v}t)]$, то вместо полей (38б), (38в) получается умноженные на μ поля (34б), (34в) плюс не зависящий от $\boldsymbol{k}$ член, соответствующий δ-функции в (38а).

Появление момента (42) можно понять и на другом пути, как это было сделано в заметке [7]. Именно в [7] было показано (при этом, как и в [6], было положено $\mu = 1$), что момент (42) получается для движущихся токовый диполей, если поляризующаяся среда, заполняющая диполь, движется вместе с диполем. Приведем здесь соответствующий вывод несколько подробнее.

Образом или моделью электрических и магнитных моментов являются области с постоянной поляризацией — идеализированные электреты и ферромагнетики. Выше такие модели рассматривались лишь в случае покоящихся диполей. Если же поляризованная область движется, то нужно опираться на электродинамику движущихся сплошных сред. Правда, при этом приходится делать далеко идущие предположения нереалистического характера, но для понимания роли поляризации среды такой подход вряд ли может вызвать возражения. Конкретно, рассмотрим поляризованную «область» объема V, движущуюся с постоянной скоростью $\boldsymbol{v}$ в неподвижной среде. Область считается движущейся как целое, причем в ней (в ее системе покоя) проницаемости ε и μ такие же, как в окружающей неподвижной среде. Магнитную и электрическую поляризации области в системе покоя запишем в виде

$$\boldsymbol{M}' = \frac{\mu - 1}{4\pi}\boldsymbol{H}' + \boldsymbol{M}_0', \quad \boldsymbol{P} = \frac{\varepsilon - 1}{4\pi}\boldsymbol{E} + \boldsymbol{P}_0',$$
$$\boldsymbol{B}' = \boldsymbol{H}' + 4\pi\boldsymbol{M}' = \mu\boldsymbol{H}' + 4\pi\boldsymbol{M}_0', \quad \boldsymbol{D}' = \boldsymbol{E}' + 4\pi\boldsymbol{P}' = \varepsilon\boldsymbol{E}' + 4\pi\boldsymbol{P}_0'. \tag{44}$$

Уравнения поля в движущейся среде в переменных $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{B}$ и $\boldsymbol{H}$ имеют обычный вид (внешние заряды и токи считаем отсутствующими):

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \boldsymbol{D} = 0; \tag{45}$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \boldsymbol{B} = 0. \tag{46}$$

При этом поля связаны между собой так (ε и μ — проницаемости в системе покоя; см. [15])*:

$$\boldsymbol{D} + \frac{1}{c}[\boldsymbol{v}\boldsymbol{H}] = \varepsilon\left(\boldsymbol{E} + \frac{1}{c}[\boldsymbol{v}\boldsymbol{B}]\right) + 4\pi \boldsymbol{R}; \tag{47}$$

$$\boldsymbol{B} - \frac{1}{c}[\boldsymbol{v}\boldsymbol{E}] = \mu\left(\boldsymbol{H} - \frac{1}{c}[\boldsymbol{v}\boldsymbol{D}]\right) + 4\pi \boldsymbol{S}, \tag{48}$$

где

$$\boldsymbol{R}_\perp = \boldsymbol{P}'_{0,\perp}\sqrt{1 - v^2/c^2}, \quad \boldsymbol{R}_\parallel = \boldsymbol{P}'_{0,\parallel},$$

$$\boldsymbol{S}_\perp = \boldsymbol{M}'_{0,\perp}\sqrt{1 - v^2/c^2}, \quad \boldsymbol{S}_\parallel = \boldsymbol{M}'_{0,\parallel}$$

(значки $\parallel$ и $\perp$ отвечают компонентам по $\boldsymbol{v}$ и перпендикулярным скорости $\boldsymbol{v}$).

Используя (47) и (48), уравнения (45) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \boldsymbol{H} &= \operatorname{rot} \frac{\boldsymbol{B}}{\mu} - \operatorname{rot}\left\{\frac{1}{\mu c}[\boldsymbol{v}\boldsymbol{E}] - \frac{1}{c}[\boldsymbol{v}\boldsymbol{D}] + \frac{4\pi \boldsymbol{S}}{\mu}\right\} = \\ &= \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} + \frac{\varepsilon}{c}\left[\boldsymbol{v}\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\right] - \frac{1}{c^2}\left[\boldsymbol{v}\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}\right] + \frac{4\pi}{c}\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial t}; \end{aligned} \tag{49}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \boldsymbol{D} &= \operatorname{div}(\boldsymbol{E} + 4\pi \boldsymbol{P}) = \operatorname{div} \varepsilon \boldsymbol{E} + \\ &+ \operatorname{div}\left\{\frac{\varepsilon}{c}[\boldsymbol{v}\boldsymbol{B}] - \frac{1}{c}[\boldsymbol{v}\boldsymbol{H}] + 4\pi \boldsymbol{R}\right\} = 0. \end{aligned} \tag{50}$$

Уже из этих уравнений ясно появление в областях, где $\boldsymbol{v} \neq 0$, дополнительных источников поля по сравнению со случаем, когда среда везде покоится, в том числе и внутри диполей (см. ниже). Однако вид этих источников сразу недостаточно ясен. Поскольку в [6] вводились векторы Герца $\vec{\boldsymbol{P}}$ и $\vec{\boldsymbol{M}}$, то и в [7] был использован такой же прием.

---

* Исходными являются связи $\boldsymbol{E}'_\perp = \dfrac{\{\boldsymbol{E} + (1/c)[\boldsymbol{v}\boldsymbol{B}]\}_\perp}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad \boldsymbol{E}'_\parallel = \boldsymbol{E}_\parallel,$

$$\boldsymbol{D}'_\perp = \varepsilon \boldsymbol{E}'_\perp + 4\pi \boldsymbol{P}'_{0,\perp} = \frac{\{\boldsymbol{D} + (1/c)[\boldsymbol{v}\boldsymbol{H}]\}_\perp}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad \boldsymbol{D}'_\parallel = \varepsilon \boldsymbol{E}'_\parallel + 4\pi \boldsymbol{P}'_{0,\parallel} = \boldsymbol{D}_\parallel; \tag{47a}$$

$$\boldsymbol{H}'_\perp = \frac{\{\boldsymbol{H} - (1/c)[\boldsymbol{v}\boldsymbol{D}]\}_\perp}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad \boldsymbol{H}'_\parallel = \boldsymbol{H}_\parallel,$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{B}'_\perp &= \mu \boldsymbol{H}'_\perp + 4\pi \boldsymbol{M}'_{0,\perp} = \frac{\{\boldsymbol{B} - (1/c)[\boldsymbol{v}\boldsymbol{E}]\}_\perp}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \\ \boldsymbol{B}'_\parallel &= \mu \boldsymbol{H}'_\parallel + 4\pi \boldsymbol{M}'_{0,\parallel} = \boldsymbol{B}_\parallel. \end{aligned} \tag{48a}$$

Положим

$$E = \frac{1}{\varepsilon\mu} \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{P} - \frac{1}{c} \frac{\partial^2 \vec{P}}{\partial t^2} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \vec{M},$$
$$B = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \vec{P} + \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{M}. \tag{51}$$

Тогда уравнения (46) удовлетворяются автоматически, а уравнения (45) удовлетворяются, если подчинить $\vec{P}$ и $\vec{M}$ уравнениям

$$\Delta \vec{P} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{P}}{\partial t^2} = -\frac{\varepsilon\mu}{c} [vB] + \frac{\mu}{c} [vH] - 4\pi\mu R =$$
$$= -\mu (D - \varepsilon E) = -4\pi\mu P + \mu(\varepsilon - 1) E; \tag{52}$$

$$\Delta \vec{M} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{M}}{\partial t^2} = -\frac{1}{c} [vE] + \frac{\mu}{c} [vD] - 4\pi S =$$
$$= -(B - \mu H) = -4\pi M + (\mu - 1) H, \tag{53}$$

где в правых частях переход от одних выражений к другим совершается с помощью соотношений (48), (49); разумеется, использованы также определения $D = E + 4\pi P$ и $B = H + 4\pi M$.

В везде неподвижной среде без источников (т. е. при $P_0 = M_0 = 0$) правые части в (51) и (52) равны нулю. Если имеются покоящиеся источники, то справа в (52), (53) фигурируют соответствующие выражения $4\pi\mu P_0$ и $-4\pi M_0$. Рассмотрим теперь перпендикулярный скорости v движущийся чисто магнитный в его системе покоя диполь—стерженек со спонтанным намагничением M_0'. Тогда $D' = E' = P_0' = 0$ и для достаточно тонкого и длинного стерженька можно положить $H' = 0$, $B' = 4\pi M_0'$ (поле вне стерженька, если не говорить об его концах, равно нулю, и в силу непрерывности тангенциальных составляющих H как раз и получаем $H' = 0$ и в самом стерженьке). В лабораторной системе тогда (см. (47 а), (48 а)) $B = \frac{B'_\perp}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$, $H_\perp = \frac{H'_\perp}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = 0$, $D = 0$, $E_\perp = -\frac{[vB]}{c\sqrt{1 - v^2/c^2}} = -\frac{4\pi [vM_0]}{c\sqrt{1 - v^2/c^2}}$, и подстановка в (52), (53) показывает, что в правых частях фигурируют соответственно выражения $\frac{4\pi\varepsilon\mu [vM_0']}{c\sqrt{1 - v^2/c^2}}$ и $-\frac{4\pi M_0'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$.

Магнитный момент диполя в системе покоя $m' = M_0'V'$, где V' — объем диполя. В лабораторной системе этот объем $V = V'\sqrt{1 - v^2/c^2}$. Отсюда следует, что источники поля в (52) отвечают электрическому диполю с моментом $p_{\text{eff}} = (\varepsilon/c)[vm']$, а в (53) источники отвечают магнитному моменту $m = m'$. Момент диполя p_{eff} содержит именно множитель ε, а не $\varepsilon\mu$, ибо в (52) в правую часть входит не поляризация P_0, а μP_0 (напомним, что для статистического случая $R = P_0$). Тот же результат можно усмотреть уже из (49) и (50).

Полученные уравнения (52) и (53) отличаются от использованных в [6] уравнений для $\vec{P}$ и $\vec{M}$ без учета поляризации среды в движущемся диполе. В рассмотренном примере отличие сводится к замене момента p на $p_{\text{eff}} = (\varepsilon/c)[vm']$. Но именно такая замена при $\mu = 1$ приводит к переходу от формулы (40) к (43). При $\mu \neq 1$ для выбранной модели — ферромагнитного стерженька — полученный момент p_{eff} отличается от (42) отсутствием множителя μ. Но дело здесь в отличии разных моделей идеализированных ферромагнетиков или различии между ферромагнетиком и соленоидом со средой (см. выше). Действительно, заменим намагниченный стерженек соленоидом такой же формы, в котором в вакууме в системе покоя создается некоторое поле $B'_{\text{ext}} = H'_{\text{ext}}$. Заполнение соленоида средой с проницаемостями ε и μ приводит к тому, что в системе покоя в соленоиде $H' = H_{\text{ext}}$, $B' = \mu H_{\text{ext}}$ и, разумеется, $D' = E' = 0$. Поступая далее как и ранее, видим, что в этом случае в правой части уравнения (52) стоит «источник» $-\frac{\mu(\varepsilon\mu - 1)}{c\sqrt{1-v^2/c^2}}[vH'_{\text{ext}}]$, а в (52) источник отсутствует (так и должно быть, ибо в данном случае $B' - \mu H' = B - \mu H = 0$). Нужно также учесть, что мы исходили из уравнений (45) и (46), в которых «внешние» токи, создающие поле B'_{ext}, считались отсутствующими. Поэтому полученный результат означает, что наличие среды в данном примере не порождает дополнительной магнитной поляризации, но возникает электрическая поляризация с плотностью $\frac{(\varepsilon\mu - 1)}{4\pi c\sqrt{1-v^2/c^2}}[vH'_{\text{ext}}]$. Здесь опущен множитель μ по уже указанной выше причине. Для соленоида в вакууме эффективная намагниченность равна, очевидно, $\frac{H'_{\text{ext}}}{4\pi}$. При движении ей отвечает электрическая поляризация $\frac{[vH'_{\text{ext}}]}{4\pi c\sqrt{1-v^2/c^2}}$, не учитывающаяся выше. Прибавляя эту поляризацию, приходим в точности к выражению (42) для электрического момента, возникающего для движущегося, заполненного средой магнитного момента.

8. Итак, разница между токовыми и «истинными» магнитными диполями связана с разной поляризацией среды, находящейся внутри диполей (как мы уже подчеркивали в разд. 2, в рассматриваемой электродинамике однородной сплошной среды эта среда равномерно заполняет все пространство, в том числе области с токами, отвечающими диполям, которые здесь считаются, конечно, протяженными). В обычной постановке эта среда внутри диполей в выбранной системе отсчета неподвижна, как и вне диполей (повторяем, рассматривается именно такая задача). Если среду внутри диполей считать движущейся вместе с ними, как мы считали в предыдущем разделе, то различие между «истинными» и токовыми диполями исчезает (здесь и ниже не будем обращать внимание на возможное появление множителя μ; почему такой множитель может появиться, уже обсуждалось). Но это значит, что для везде неподвижной среды разница между диполями обоих типов обусловлена прохождением среды через диполь или, пользуясь образной терминологией М. А. Миллера, «выдуванием» среды и связанного с ней поля из движущегося диполя (этот образ «выдувания» особенно нагляден, разумеется, в системе отсчета, в которой диполь неподвижен, а среда движется и уносит связанное с ее поляризацией поле). Важно при этом разное «строение» «истинных» и токовых диполей и, конкретно, наличие у поля токового диполя дополнительного члена $4\pi m\delta(r)$ (см. (36) и (38 а); для протяженного диполя δ-функция заменяется на некоторый формфактор). Для покоящегося диполя или диполя, движущегося в вакууме, этот дополнительный член (по сравнению с «истинным» диполем) локализован в области самого диполя. Но при движении диполя в среде поле, как сказано, «выдувается» из диполя,

и поля токового и «истинного» диполей различны и вне диполей, в частности, и на больших расстояниях; при наличии излучения и оно оказывается различным.

Сказанное оставалось неясным автору (и, насколько известно, нигде не разъяснено в литературе) до последнего времени и выяснилось при рассмотрении излучения тороидных дипольных моментов [19]. Кратко поясним и здесь, о чем идет речь, ибо лишь сравнительно недавно было в полной мере осознано, что помимо электрического и магнитного дипольных моментов существует независимый от них тороидный дипольный момент $\boldsymbol{T}$ [20] (см. также [19, 21]). Таким моментом обладает, например, тороидальный постоянный ток (его можно реализовать, согнув в тор соленоид с обмоткой, обеспечивающей отсутствие составляющей тока «вдоль» по тору, что приводило бы к появлению у тора также и магнитного момента). Покоящемуся точечному тороидному дипольному моменту отвечает плотность тока

$$\boldsymbol{j} = c \operatorname{rot} \operatorname{rot} \{\boldsymbol{T}\delta(\boldsymbol{r})\}. \tag{54}$$

Допустим, что тороидный диполь $\boldsymbol{T}'$ (причем только он один) имеется в системе покоя K'. Тогда в этой системе K' магнитное поле сосредоточено в самом тороидном диполе (для ясности, будем считать его не точечным, хотя и с достаточно малыми размерами), а электрическое поле везде равно нулю (аналогичная ситуация имеет место, конечно, в случае бесконечно длинного соленоида, но мы здесь ограничимся рассмотрением диполя). Из преобразований для полей ясно, что в вакууме в лабораторной системе K, относительно которой система K' имеет скорость $\boldsymbol{v}$, поле такого диполя $\boldsymbol{T}'$ остается локализованным внутри диполя (при этом поле $\boldsymbol{E} = -(1/c)[\boldsymbol{vH}]$, где $\boldsymbol{H}$ — магнитное поле в системе K; поскольку речь идет о вакууме, здесь $\varepsilon=\mu=1$). Таким образом, чисто тороидный диполь $\boldsymbol{T}'$ при движении в вакууме со скоростью $\boldsymbol{v}$ не имеет никакого внешнего поля. На первый взгляд может показаться, что это заключение справедливо и при движении тороидного диполя $\boldsymbol{T}'$ в среде. Однако такой вывод несправедлив. Дело в том, что в упомянутой системе K со скоростью $\boldsymbol{v}$ движется не только сам диполь, но и среда; в этом случае, конечно, поле вне тороидного диполя отсутствует. Но нас интересует, в первую очередь, случай, когда в лабораторной системе K среда покоится, а диполь имеет скорость $\boldsymbol{v} = \text{const}$. В такой системе K вне тороидного диполя поле уже имеется (при наличии среды), в частности, появляется некоторый электрический квадрупольный момент. Здесь мы сталкиваемся с «выдуванием» поля из источника, так сказать, в чистом виде. Задача подробно рассматривается в [19]. Приведем лишь результат для более простого в некотором смысле случая, когда в системе K плотность тока имеет вид (54) с обычной заменой $\delta(\boldsymbol{r}) \to \delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{v}t)$. Тогда для излучения В.—Ч. приходим к формуле (20), в которой $\{\ \}^2$ нужно заменить на $(\boldsymbol{T}\boldsymbol{a}_j)^2(k^2/c^2)$. Поэтому, например, для такого тороидного диполя, направленного по скорости $\boldsymbol{v}$,

$$Q_T = \frac{T^2}{c^4 v} \int \mu n^4 \left(1 - \frac{c^2}{n^2 v^2}\right) \omega^5 d\omega. \tag{55}$$

Выражение (55) по своему типу отвечает излучению В.—Ч. для электрического квадруполя (см. [6, 10, 19]). Однако рассмотренный источник с плотностью тока $\boldsymbol{j} = c \operatorname{rot} \operatorname{rot} \{\boldsymbol{T}\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{v}t)\}$ отвечает наличию в системе покоя K' не только некоторого тороидного диполя с током типа (54), но и электрического квадруполя. Если же в системе K' имеется только тороидный момент (плотность тока есть (54)), то мощность излучения В.—Ч. содержит вместо

$n^4 = (\varepsilon\mu)^2$ в (55) множитель $(\varepsilon\mu - 1)^2$. Поэтому в вакууме (или в своеобразной среде с $\varepsilon\mu = 1$, см. [22]) излучение В.—Ч. исчезает. Это находится, конечно, в полном соответствии со сказанным выше — в вакууме поле остается локализованным внутри и движущегося тороидного диполя. Естественно, такой же результат получается [19], если тороидный диполь движется даже в очень узкой вакуумной щели или канале в сплошной среде.

Для токового магнитного момента, обладающего также нелокализованным (выходящим за пределы источника) полем уже в покоящейся системе отсчета K', эффект «выдувания» локализованного поля при движении диполя в среде выступает менее явно, в силу чего и не был ранее выявлен. Но, как нам кажется, сейчас картина достаточно ясна.

9. Предпринятое выше рассмотрение, основанное на уравнениях макроскопической электродинамики (1) и (2) в предположении об однородности и неподвижности среды везде, в том числе и внутри диполей, сильно ограничивает область применимости полученных результатов. Если иметь в виду токовые магнитные диполи, то, по-видимому, лишь в случае плазмы можно реально представить себе заполнение диполей окружающей их средой. Впрочем и в этом случае в связи с зависимостью проницаемости ε или, точнее, тензора $\varepsilon_{ij}(\omega, \boldsymbol{H})$ от напряженности поля $\boldsymbol{H}$ приближение однородной среды сильно ограничено. В рамках макроскопической электродинамики можно, конечно, рассматривать диполи и другие источники достаточно больших размеров, заполненные средой с иными параметрами по сравнению с окружающей средой, а также решать задачи о движении источников в макроскопических каналах и щелях (в частности, пустых каналах и щелях), «проделанных» в сплошной среде. Об этом уже упоминалось (соответствующие расчеты см. в [23–25], а также в [5] и [8] гл. 7).

Но какова ситуация для, особенно интересных при возможном, в принципе, сравнении с экспериментом, точечных или, во всяком случае, микроскопических диполей?

Здесь нужно разделить две проблемы. Первая из них касается различия между токовыми и «истинными» магнитными моментами. Автор должен, к сожалению, констатировать, что длительное время проявлял недостаточное понимание этого вопроса (см. [5, 8, 9]). Но после сказанного в предыдущем разделе настоящей статьи совершенно ясно, что для микроскопических магнитных диполей обоих типов в отношении создаваемых вдали от диполей полей излучения никаких различий нет, поскольку ни о каком заполнении микродиполей внешней сплошной средой не может быть речи. Этот общий вывод, интуитивно казавшийся вероятным с самого начала, находится в полном согласии с решением задачи о магнитных диполях, движущихся в пустом канале [25], — для диполей обоих типов излучение В.—Ч. при этом совершенно одинаково.

Вторая проблема такова: а как же излучают точечные диполи, движущиеся в среде? Или родственный вопрос: в какой мере справедливы результаты, приведенные выше в настоящей статье и полученные в рамках макроскопической электродинамики для точечных источников, движущихся в сплошной среде (без каналов или щелей)? Как сказано, для точечных тороидных диполей и токовых магнитных диполей (в случае результата, отличного от имеющего место для «истинных» диполей) пользоваться теорией, пригодной для сплошной однородной среды, нельзя. В случае электрического заряда (и магнитного монополя), напротив, имеются все основания считать полученные формулы (в частности, формулу (12)) полностью справедливыми. В самом деле, при равномерном движении заряда в достаточно тонких пустых каналах и щелях наличие этих каналов и щелей на интенсивности излучения заряда не сказывается (см. [23, 24], а также [5, 8]; несколько упрощая, можно утверждать, что канал или щель не влияют на излучение, если их наименьший размер $d \ll \lambda$, где λ — длина волны излучения). Отсюда следует, что область среды, непосредственно примыкающая к заряду, не сказывается на излучении, которое в данном случае формируется в области с размерами порядка длины волны λ. Сделанное заключение находится в согласии с подходом, основанным на учете отличия среднего макроскопического поля $\boldsymbol{E}$ и действующего или эффективного поля $\boldsymbol{E}_{\text{eff}}$.

Как известно, в общем случае поле $\boldsymbol{E}_{\text{eff}}$, действующее на точечный заряд, диполь и т. д., находящиеся в среде, отлично от среднего поля $\boldsymbol{E}$ (тоже относится к необходимости различать поля $\boldsymbol{H}$ и $\boldsymbol{H}_{\text{eff}}$ или $\boldsymbol{B}$ и $\boldsymbol{B}_{\text{eff}}$; для определенности и простоты мы ниже считаем среду немагнитной — полагаем $\mu=1$ и не касаемся вопроса об отличии $\boldsymbol{B}_{\text{eff}}$ от $\boldsymbol{B}$). В изотропной среде $\boldsymbol{E}_{\text{eff}} = \boldsymbol{E} + b\boldsymbol{P} = a\boldsymbol{E}$, $a = 1 + (\varepsilon - 1) \times b(4\pi)^{-1}$, где коэффициент b зависит от типа среды, характеризующих ее параметров и т. п. В некоторых моделях среды, состоящей из диполей, $b=4\pi/3$ и $a=(\varepsilon+2)/3$ (см., например, [16], § 28). Для газовой (разреженной) плазмы $a = 1$, т. е. $\boldsymbol{E}_{\text{eff}} = \boldsymbol{E}$ (см. [26], § 3). Проблема действующего поля не имеет общего макроскопического решения (т. е. в общем случае фактор a не выражается только через ε) и продолжает обсуждаться до настоящего времени даже для относительно простых сред [27, 28].

Если в точке нахождения, скажем, покоящегося точечного переменного электрического диполя (осциллятора) $\boldsymbol{E}_{\text{eff}} \neq \boldsymbol{E}$, то и излучать этот диполь будет иначе — не так, как при $\boldsymbol{E}_{\text{eff}}=\boldsymbol{E}$. Последнее особенно ясно при использовании теоремы взаимности. Если воспользоваться приведенным выражением для $\boldsymbol{E}_{\text{eff}}$, то излучаемая мощность повышается в a^2 раз, т. е. при $a = \dfrac{\varepsilon+2}{3}$ в $\left(\dfrac{\varepsilon+2}{3}\right)^2$ раз. Такой множитель в некоторых условиях очень существен (см. [8], гл. 6). В силу сказанного ясно, что при использовании макроскопических уравнений (1), (2) и им подобных для точечных источников (и, впрочем, не только для них) плотность тока $\rho\boldsymbol{v}$, вообще говоря, не та же самая, как для тех же источников в вакууме.

Таким образом, для точечных зарядов и диполей макроскопические результаты, полученные для однородной среды, справедливы, если для этих источников в данной среде $\boldsymbol{E}_{\text{eff}} = \boldsymbol{E}$. Автор не знает, освещен ли в литературе вопрос о вычислении поля $\boldsymbol{E}_{\text{eff}}$ для заряда, быстро движущегося в среде. Но из общих соображений представляется, что в этом случае $\boldsymbol{E}_{\text{eff}} = \boldsymbol{E}$. Действительно, в пользу такого заключения свидетельствует справедливость равенства $\boldsymbol{E}_{\text{eff}} = \boldsymbol{E}$ для свободных частиц в плазме. Далее, быстрый заряд проходит практически через все точки в среде, т. е. на его траектории происходит как раз такое усреднение, которое отвечает переходу от микрополя к среднему полю $\boldsymbol{E}$. Итак, для заряда мы не видим оснований сомневаться в справедливости формулы (12).

Для электрического диполя $\boldsymbol{p}$, параллельного оси канала или плоскости щели, в которых он движется, наличие достаточно тонких канала или щели на излучении В.—Ч. не сказывается. Но если диполь $\boldsymbol{p}$ перпендикулярен оси канала (плоскости щели), то на интенсивности излучения сказываются даже сколь угодно тонкие (но еще макроскопические) канал или щель [5, 8]. Конкретно, для тонкой пустой щели в среде с проницаемостью ε интенсивность излучения В.—Ч. возрастает в ε^2 раз; для пустого круглого канала интенсивность возрастает в $[2\varepsilon/(\varepsilon+1)]^2$ раз по сравнению с интенсивностью, вычисляемой для сплошной среды (см. (21); имеем сейчас в виду движение в лабораторной системе отсчета только одного электрического диполя, когда магнитный момент $m=0$). Физически отмеченное изменение интенсивности связано с появлением на стенках канала или щели движущегося вместе с диполем p индуцированного диполя. Но как будет обстоять дело, если размер канала или щели d стремится к нулю уже на микроскопическом уровне, т. е. происходит переход к движению в среде вообще без канала или щели? Экстраполировать на этот случай приведенные выше макроскопические результаты нет оснований (другое дело, если бы задача об излучении в канале или щели решалась с учетом пространственной дисперсии; тогда переход к пределу $d\to 0$ был бы возможен [29])*. С другой стороны, электрический диполь, до перехода к пределу точечного диполя, эквивалентен двум разноименным зарядам. Поэтому, если при движении одного заряда можно считать, что $\boldsymbol{E}_{\text{eff}}=\boldsymbol{E}$, то в некоторых пределах это может оказаться справедливым и для электрических диполей. В последнем случае для сплошной среды будут применимы формулы (18), (19) и (21). При этом в (19) предполагается, что имеется и магнитный момент $\boldsymbol{m}=-(1/c)[\boldsymbol{v}\boldsymbol{p}]$. Однако соответствующие поля (28), (29) не содержат члена $\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{v}t)$, появляющегося для магнитного диполя, имеющегося уже в системе покоя (см. (38)). Если формулы (18) и (19) справедливы, то для точечных токовых и «истинных» магнитных диполей, движущихся в сплошной среде, можно ожидать пригодности формул (32) и (33), полученных для «истинных» магнитных диполей (здесь полагаем $\mu=1$). Но это не более, чем гипотеза, поскольку равенство $\boldsymbol{E}_{\text{eff}}=\boldsymbol{E}$ для движущихся электрических диполей не доказано. Здесь, очевидно, нужно дополнительное исследование. К счастью, сохраняющаяся неясность не имеет особого физического значения, поскольку с диполями, движущимися в среде, в реальных задачах обычно сталкиваться не приходится (см., однако, [30]).

В заключение пользуюсь возможностью поблагодарить за обсуждение затронутых вопросов М. А. Миллера, И. М. Франка и В. Н. Цытовича.

ЛИТЕРАТУРА

1. Dirac P. A. M — Proc. Roy. Soc., 1931, **A 133**, p. 60, — Сб. Монополь Дирака. / Под ред. Б. М. Болотовского и Ю. Д. Усачева. — М: Мир, 1970, Дирак П. А. М. Пути в физике. — М.: Энергоатомиздат, 1983.
2. Коулмен С. — УФН, 1984, **144**, № 2.
3. Гинзбург В. Л. — ЖЭТФ, 1940, **10**, с 589.
4. Франк И. М. — Изв. АН СССР. Сер. физ, 1942, **6**, с. 3, УФН, 1946, **30**, с 149.
5. Гинзбург В. Л. — УФН, 1959, **69**, с. 537, Гинзбург В. Л., Эйдман В Я — ЖЭТФ, 1958, **35**, с. 1508.
6. Франк И. М. — В сб.: Памяти С. И. Вавилова — М.—Л.: Изд. АН СССР, 1952, с. 173.
7. Гинзбург В Л. Там же, с 193.
8. Гинзбург В. Л. Теоретическая физика и астрофизика. — М: Наука, 1981
9. Гинзбург В. Л, Цытович В. Н. Переходное излучение и переходное рассеяние (некоторые вопросы теории). — М.: Наука, 1984.
10. Франк И. М. — УФН, 1984, **144**, № 2
11. Гинзбург В. Л. — ЖЭТФ, 1942, **12**, с 425; J Phys. USSR, 1943, **7**, p. 115.
12. Тамм И. Е, Франк И. М. — ДАН СССР, 1937, **14**, с 107.
13. Ландау Л., Лифшиц Е. Электродинамика сплошных сред. — М.: Наука, 1982.
14. Ситенко А Г. — ДАН СССР, 1954, **98**, с 377.
15. Гинзбург В. Л., Цытович В Н. — УФН, 1978, **126**, с. 553; 1980, **131**, с 83; Phys Rep, 1979, **49**, № 1, p. 1; Phys. Lett, 1980, **79A**, p. 16.
16. Тамм И. Е Основы теории электричества — М: Наука, 1976
17. Паули В Теория относительности — М.: Наука, 1983; Беккер Р. Электронная теория. — М. ОНТИ, 1936

* Рассмотрение излучения в узком канале с учетом пространственной дисперсии представляет интерес при движении источника (в частности, осциллятора) в кристалле при наличии каналирования. Мы не видим оснований считать, что возникающее излучение [30] будет таким же, как для сплошной среды без всякого канала.

18. Ландау Л. Д, Лифшиц Е. М. Теория поля. — М.: Наука, 1973.
19. Гинзбург В. Л., Цытович В. Н. — ЖЭТФ, 1984, **87**, № 12.
20. Дубовик В. М, Тосунян Л. А. Физика элем. частиц и атомного ядра (ЭЧАЯ), 1983, **14**, с. 1193.
21 Миллер М. А. — УФН, 1984, **142**, с 147.
22. Brevik I. — Canad. J. Phys, 1983, **61**, p. 493.
23. Гинзбург В. Л., Франк И. М. — ДАН СССР, 1947, **56**, с. 699.
24. Богданкевич Л. С., Болотовский Б. М. — ЖЭТФ, 1957, **32**, с. 1421.
25 Богданкевич Л. С. — ЖТФ, 1959, **29**, с. 1086.
26. Гинзбург В. Л. Распространение электромагнитных волн в плазме. — М.: Наука, 1967.
27. Бараш Ю. С. — ЖЭТФ, 1980, **79**, с. 2271.
28. Hynne F. — Amer. J. Phys, 1983, **51**, p. 837.
29. Агранович В. М., Гинзбург В. Л. Кристаллооптика с учетом пространственной дисперсии и теория экситонов.— М.: Наука, 1979
30. Барышевский В. Г., Франк И. М. Ядерная физика, 1982, **36**, с. 1442.

Физический институт им. П. Н. Лебедева АН СССР

Поступила в редакцию 2 января 1984 г.

ON FIELDS AND RADIATION OF «TRUE» AND CURRENT MAGNETIC DIPOLES IN A MEDIUM

V. L. Ginzburg

«True» and current magnetic dipoles in a medium with dielectric permittivity ε and magnetic permeability μ are compared in what concerns their fields and radiated energy. A dipole is called «true» if it formed of two magnetic poles (monopoles) of opposite signes. A current dipole can be visualized as a small ring (solenoid) with current or as a small constant magnet. The energy of Vavilov — Cherenkov radiation for point magnetic dipoles of both types and also for electric dipoles is considered as an example. True and current magnetic dipoles create, generally speaking, different fields and, accordingly, radiate differently due to different polarizations of the medium which, in the framework of macroscopic electrodynamics for homogeneous medium, is considered to be located also inside dipoles. Such «filling» of dipoles with a medium is however not realized in most cases; in particular, point (microscopic) true and current magnetic moments, «inside» which the presence of medium is excluded, will create similar fields and radiate similarly in the medium too. At the same time, in obtaining fields created by point dipoles, there arises the question about the difference between the acting (effective) fields and the macroscopic ones. Since in the general case this difference cannot be found within macroscopic electrodynamics, the problem of the fields and radiation of point dipoles in a medium does not have a general solution which depends only on the permittivity ε and permeability μ of the medium.

IV ВСЕСОЮЗНЫЙ СЕМИНАР ПО ВЫСОКОЧАСТОТНОЙ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ЭЛЕКТРОНИКЕ

(Продолжение)

Главные проблемы релятивистской СВЧ электроники можно сгруппировать по четырем направлениям.

1. Повышение энергетики релятивистских СВЧ приборов, т. е. их мощности и длительности импульсов, а также частоты следования.

2. Повышение частоты генерируемого когерентного или квазикогерентного излучения релятивистских электронных пучков.

3. Расширение области применения релятивистских СВЧ приборов, что связано как с результатами работ в двух первых направлениях, так и, в первую очередь, с проблемой управления излучением, т. е. созданием усилителей и перестраиваемых генераторов. Существенную роль здесь также играют повышение стабильности импульсов тока и напряжения, совершенствование технологичности и массогабаритных показателей и т. д.

4. Специфические проблемы релятивистской электроники, к которым относятся электронная оптика релятивистских электронных пучков, образование и диффузия катодной и коллекторной плазм, управляемые катоды (термоэмиссионные или многострийные),

(Продолжение см. с. 879)