ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XXVII, № 6 РАДИОФИЗИКА 1984

УДК 621 382 3

НЕЛИНЕЙНАЯ ТЕОРИЯ ПЛАЗМЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ В ПОЛУПРОВОДНИКЕ СО СВЕРХРЕШЕТКОЙ

А. П. Тетервов

Исследована эволюция электрического поля плазменных колебаний в полупроводнике со сверхрешеткой. Узость зоны проводимости в таких материалах приводит к тому, что электрическое поле описывается нелинейным уравнением третьего порядка. Полученное уравнение решено в предположении слабой диссипации Показано, в частности, что плазменное колебание с большим начальным значением амплитуды затухает неэкспоненциальным образом.

1. Узость разрешенной зоны в полупроводнике со сверхрешеткой (СР) обусловливает целый ряд новых эффектов, не имеющих места в изотропных полупроводниках. Так, при наличии постоянного электрического поля электрон проводимости в такой зоне совершает финитное движение, что, в свою очередь, приводит к качественно новым особенностям распространения линейных [1-3] и нелинейных [4-6] волн.

В данной работе речь пойдет о некоторых, тесно связанных с конечной шириной зоны проводимости особенностях нелинейных продольных колебаний в отсутствие постоянного электрического поля. Отметим, что теория таких колебаний в бесстолкновительном режиме была построена в [4,7]*. В настоящей работе решается более общая задача — с учетом столкновений. Показано, что электрическое поле плазменного колебания описывается нелинейным уравнением третьего порядка, эквивалентным уравнению нелинейного осциллятора с числом степеней свободы, равным 3/2. В зависимости от начальных условий определена временна́я эволюция поля при слабом, но конечном, затухании. Показано, в частности, что колебания с большой начальной амплитудой затухают неэкспоненциальным образом: амплитуда и частота их обращаются в нуль за конечное время.

2. Будем полагать, что электроны сосредоточены в нижней минизоне проводимости и электрическое поле не приводит к переходам их в верхние минизоны. Закон дисперсии электронов имеет вид

$$\varepsilon(p) = p_{\perp}^2/2m_0 + (\varepsilon_0/2)(1 - \cos p_x d), \tag{1}$$

где $p_{\perp}$ и p_x — поперечная и продольная относительно оси СР составляющие квазиимпульса, m_0 — эффективная масса электрона, ε_0 и d — ширина минизоны и период СР.

Электрическое поле полагается однородным и направлено вдоль оси СР, временна́я его эволюция определяется уравнением

$$\varkappa_0 \partial E/\partial t + 4\pi J = 0, \tag{2}$$

где $\varkappa_0$ — диэлектрическая постоянная решетки, $J = J(E)$ — в общем случае нелинейный функционал поля, описывающий ток проводимости.

* Линейная теория плазменных колебаний в СР была построена в работах [8]

Для нахождения электрического поля необходим явный вид функции $J(E)$. Можно, однако, поступить иначе.

Воспользуемся кинетическим уравнением в приближении времени релаксации:

$$\partial f/\partial t + eE\partial f/\partial p_x = -\nu(f - f_0), \tag{3}$$

где ν и $f_0(\boldsymbol{p})$ — частота релаксации импульса и равновесная функция распределения электронов. Аналогично [2], стандартным методом можно получить систему уравнений баланса импульса

$$(\partial/\partial\tau + \gamma)J = (1 - 2Q/\varepsilon_0 N)\,\omega_0 E/4\pi \tag{4}$$

и энергии

$$(\partial/\partial\tau + \gamma)Q = JE/\omega_0 + \gamma P. \tag{5}$$

Здесь $\tau=\omega_0 t$, $\omega_0=(2\pi e^2 N d^2\varepsilon_0/\varkappa_0)^{1/2}$ — плазменная частота, N — концентрация электронов в минизоне, $\gamma=\nu/\omega_0$, Q — плотность энергии продольного движения электронов,

$$Q = \varepsilon_0/2(2\pi)^3\int d\boldsymbol{p}f(\boldsymbol{p})\,[1 - \cos(p_x d)]. \tag{6}$$

Величина P определяет плотность энергии продольного движения электронов в равновесном состоянии и находится из (6) заменой в последнем выражении $f(\boldsymbol{p})$ на $f_0(\boldsymbol{p})$.

Предполагая электронный газ невырожденным с температурой θ_0, можно показать, что

$$2P/\varepsilon_0 N = \begin{cases} 2\theta_0/\varepsilon_0, & \varepsilon_0 \gg 2\theta_0 \\ 1 - \varepsilon_0/4\theta_0, & \varepsilon_0 \ll 2\theta_0 \end{cases}. \tag{7}$$

Полученная система нелинейных уравнений (2), (4) и (5) является замкнутой и полностью описывает поставленную задачу. Наличие в правой части уравнения (4) слагаемого, содержащего ширину зоны проводимости, коренным образом меняет суть дела. Так, в стандартных полупроводниках $\varepsilon_0\to\infty$, $d\to 0$ $(\varepsilon_0 d^2\to 2/m_0)$, в результате чего уравнение (5) отщепляется и эволюция поля описывается линейным уравнением второго порядка. В случае же полупроводника с узкой разрешенной зоной выражение (4) содержит в себе обратную связь и система уравнений (2), (4), (5) эквивалентна нелинейному уравнению уже третьего порядка для безразмерного электрического поля $\varphi=eEd/\omega_0$:

$$\dot\varphi\,\dddot\varphi - \ddot\varphi(\ddot\varphi - \varphi^3) = \gamma\,[\dot\varphi^2 - 2\varphi\ddot\varphi - \varphi^2(1 - 2P/\varepsilon_0 N) - \gamma\varphi\dot\varphi]. \tag{8}$$

Здесь точка означает дифференцирование по τ.

3. Будем предполагать диссипацию малой $(\gamma\ll 1)$ и ограничимся первым приближением теории возмущений по γ. Решение уравнения (8) ищется в духе техники Крылова — Боголюбова [9]:

$$\varphi(\tau) = \varphi_0(\tau, \xi) + \gamma\varphi_1(\tau, \xi), \tag{9}$$

где $\xi=\gamma\tau$ — «медленное» время.

При $\gamma=0$ уравнение (8) можно дважды проинтегрировать, в результате чего имеем

$$\ddot\varphi_0 - C_1\varphi_0 + \varphi_0^3/2 = 0 \tag{10а}$$

и соответственно

$$\dot\varphi_0^2 = C_2 + C_1\varphi_0^2 - \varphi_0^4/4. \tag{10б}$$

Здесь $C_1=[\ddot\varphi_0/\varphi_0+\varphi_0^2/2]\,|_{\tau=0}$, $C_2=[\dot\varphi_0^2-\varphi_0\ddot\varphi_0-\varphi_0^4/4]\,|_{\tau=0}$ — константы, определяемые начальными условиями. Уравнение (10б) аналогично уравнению движения частицы в поле одномерного потенциала и имеет ограниченные решения в терминах эллиптических функций [10], так, при $C_2 \geqslant 0$ (знак C_1 произволен) имеем

$$\varphi_0^{(1)}(\tau) = A \operatorname{cn}[A\tau/2k_1 + \beta_1;\ k_1], \tag{11}$$

где $\operatorname{cn}[...]$ — эллиптический косинус, β_1 — начальная фаза колебания. Амплитуда поля A и модуль эллиптической функции k_1 определяются выражениями

$$A = \sqrt{2}\,(C_1 + C_3)^{1/2}, \qquad k_1^2 = (C_1 + C_3)/2C_3, \tag{11a}$$

где $C_3 = (C_1^2 + C_2)^{1/2}$.

В случае же $C_2 < 0$ (при этом, как можно показать, для ограниченных решений всегда $C_1 > 0$) поле описывается выражением

$$\varphi_0^{(2)}(\tau) = A \operatorname{dn}[A\tau/2 + \beta_2;\ k_2], \tag{12}$$

где $\operatorname{dn}[...]$ — дельта-амплитуда, $k_2 = k_1^{-1}$ $(C_2 < 0)$.

Существенно, что даже при $\bar{\gamma} = 0$ плазменное колебание является нелинейным и частота его как функция амплитуды определяется начальными условиями.

Для дальнейшего удобно представить выражения (11), (12) в следующей форме: $\varphi_0^{(i)}(\tau) = AV_i(\lambda_i)$ $(i = 1,2)$, где $\lambda_i = \Omega_i\tau + \beta_i$ — фаза нелинейного колебания,

$$\begin{Bmatrix} V_1(\lambda_1) \\ V_2(\lambda_2) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \operatorname{cn}[\lambda_1;\ k_1] \\ \operatorname{dn}[\lambda_2;\ k_2] \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \end{Bmatrix} = \frac{A}{2} \begin{Bmatrix} k_1^{-1} \\ 1 \end{Bmatrix}. \tag{13}$$

В первом по γ приближении из (8) следует

$$\hat{L}_3\varphi_1 \equiv \partial^3/\partial\tau^3(\varphi_0\varphi_1) + \partial/\partial\tau[\varphi_0^3\varphi_1 - 4\dot{\varphi}_0\dot{\varphi}_1] = \Phi(\varphi_0). \tag{14}$$

Функция $\Phi(\varphi_0)$ (индекс i в дальнейшем для общности опускается) описывает как нелинейность, связанную с учетом правой части уравнения (8), так и медленное изменение со временем параметров нулевого решения:

$$\begin{aligned} \Phi(\varphi_0) = A^2[\Omega^2(V'^2 - VV'') - V^2] + A(dA/d\xi)[2\Omega^2(V'^2 - VV'') - \\ - A^2V^4] - (d\beta/d\xi)A^4V^3V' + A^2\Omega(d\Omega/d\xi)(V'^2 - 3VV''). \end{aligned} \tag{15}$$

Здесь штрих означает дифференцирование по λ, кроме того, предполагается, что температура низкая (см. (7)).

Уравнение (14) служит для нахождения функции $\varphi_1(\tau, \xi)$, а также (при выполнении определенных условий, о которых речь пойдет ниже) для нахождения амплитуды, частоты и фазы нелинейных колебаний (11), (12).

Как известно, в теории колебаний, описываемых уравнениями второго порядка с малой нелинейностью [9], нулевое решение есть монохроматическое колебание с медленно меняющимися амплитудой и фазой. Уравнение для функции первого приближения имеет вид

$$\hat{L}_2\varphi_1 = F(\varphi_0), \tag{16}$$

где $\hat{L}_2$ — линейный дифференциальный оператор второго порядка (самосопряженный в отсутствие диссипации), а функция $F(\varphi_0)$ описывает нелинейность (диссипацию). Тогда для отсутствия в разложении типа (9) вековых членов необходимо потребовать ограниченности функции

$\varphi_1(\tau)$ как решения уравнения (16), что приводит к условиям на амплитуду и фазу.

С другой стороны, эти условия могут быть получены из требования ортогональности функции $F(\varphi_0)$ к решению уравнения, сопряженного с уравнением $\hat{L}_2\varphi_1=0$. В силу самосопряженности оператора $\hat{L}_2$ эти подходы оказываются эквивалентными.

Оператор же $\hat{L}_3$ в уравнении (14) не является самосопряженным, и по этой причине указанные два подхода должны приводить к независимым результатам, из которых следуют искомые уравнения для нахождения амплитуды, частоты и фазы колебаний.

4. Будем полагать, что функция $\varphi_1(\tau)$ является периодической с тем же, что и функция $\varphi_0(\tau)$, периодом T_τ. Условие для нахождения функции $\chi(\tau)$, ортогональной к правой части уравнения (14), имеет вид

$$\int_0^{T_\tau} d\tau\chi(\tau)\hat{L}_3\varphi_1(\tau)=0, \tag{17}$$

откуда, интегрируя по частям с учетом свойств периодичности, можно получить

$$\int_0^{T_\tau} d\tau\varphi_1(\tau)\{\varphi_0\dddot{\chi}+4\dot{\varphi}_0\ddot{\chi}+(\varphi_0^3+4\ddot{\varphi}_0)\dot{\chi}\}=0. \tag{18}$$

Для произвольной функции $\varphi_1(\tau)$ это условие выполняется при равенстве нулю выражения в фигурных скобках. Решением последнего уравнения, как можно показать, является функция $\chi(\tau)=1/\varphi_0^2(\tau)$ (очевидное решение $\chi(\tau)=\mathrm{const}$ отбрасывается, ибо оно приводит к тривиальному результату: среднее по периоду значение функции $\Phi(\varphi_0)$ равно нулю).

Далее, непосредственной проверкой легко убедиться в том, что функция $\dot{\varphi}_0(\tau)$ удовлетворяет однородному уравнению (14), поэтому общее решение можно искать в виде

$$\varphi_1(\tau)=\dot{\varphi}_0(\tau)\int d\tau W(\tau), \tag{19}$$

где функция $W(\tau)$ подлежит определению. Подставляя это выражение в (14), можно после ряда выкладок получить следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\left\{\frac{\varphi_0^3}{\dot{\varphi}_0}\frac{\partial}{\partial\tau}\left[\frac{\dot{\varphi}_0^2}{\varphi_0^2}W(\tau)\right]\right\}=\Phi(\varphi_0), \tag{20}$$

ограниченное решение которого, а следовательно, и уравнения (14), есть

$$W(\tau)=\frac{\varphi_0^2(\tau)}{\dot{\varphi}_0^2(\tau)}\int^{\tau}d\tau'\,\frac{\dot{\varphi}_0(\tau')}{\varphi_0^3(\tau')}\int^{\tau'}d\tau''\Phi\left[\varphi_0(\tau'')\right]. \tag{21}$$

Таким образом, искомые уравнения для медленно меняющихся параметров нелинейного плазменного колебания (11), (12) следуют из условия ограниченности (21) и ортогональности, которое с учетом сказанного выше имеет вид

$$\int_0^{T_\lambda} d\lambda\Phi\left[\varphi_0(\lambda)\right]/V^2(\lambda)=0. \tag{22}$$

Период T_λ равен $4K(k_1)$ для (11) и $2K(k_2)$ для (12), где $K(\eta)$ — полный эллиптический интеграл первого рода с модулем η.

Подставляя (15) в формулу (21), можно показать, что слагаемое, пропорциональное $d\beta/d\xi$, приводит к появлению вековых членов в выражении для $\varphi_1(\tau)$, поэтому фаза $\beta(\xi)$ должна быть постоянной и равной своему начальному значению.

Уравнение для амплитуды (частоты) нелинейных колебаний находится из условия (22). Так, для $V=V_1$ имеем

$$A\left[\Omega_1^2(2E-K)-K\right]=4\Omega_1^2(E-k_1'^2K)\,dA/d\xi-2A\Omega_1(2E-K)\,d\Omega_1/d\xi, \tag{23}$$

где $K=K(k_1)$, $E=E(k_1)$ — полный эллиптический интеграл второго рода, $k_1'^2=1-k_1^2$. Кроме того, при интегрировании функции $V_1'^2/V_1^2$ возникают расходимости вида $\mathrm{cn}^{-1}K=\infty$, для компенсации которых необходимо удовлетворить дополнительному условию

$$A\Omega_1+2\Omega_1 dA/d\xi-A\,d\Omega_1/d\xi=0, \tag{24}$$

откуда следует связь между амплитудой и частотой (11):

$$A^2(\xi)/\Omega_1(\xi)=A^2(0)\exp(-\xi)/\Omega_1(0). \tag{25}$$

Здесь $A(0)$ и $\Omega_1(0)$ — начальные значения, определяемые начальными условиями.

Рассмотрим два предельных случая: $k_1\ll 1$, при этом, как следует из определения, $C_1<0$ и $C_2\approx 0$, а колебание по форме близко к синусоидальному, и $k_1\approx 1$ ($C_1>0$, $C_2\approx 0$), когда плазменное колебание существенно нелинейно.

В первом случае, разлагая эллиптические интегралы в ряд по малым k_1 [10] и решая систему уравнений (23), (24), можно получить

$$\Omega_1^2(\xi)=1-\left[1-\Omega_1^2(0)\right]\exp(-\xi). \tag{26}$$

Таким образом, частота осцилляций поля стремится к плазменной, а амплитуда его экспоненциально затухает согласно выражению (25).

В другом предельном случае ответ имеет вид

$$\Omega_1^2(\xi)+1=\left[\Omega_1^2(0)+1\right]\exp(-\xi). \tag{27}$$

Это означает, что за конечное время $\xi_0=\ln[1+\Omega_1^2(0)]$ частота колебания (соответственно и амплитуда его) обратится в нуль, т. е. затухание поля носит неэкспоненциальный характер.*

Для $V=V_2$ из (22) следует уравнение для амплитуды

$$S\left[2E-(2-k_2^2)K\right]-K=(2-k_2^2)\,K\,dS/d\xi, \tag{28}$$

где $K=K(k_2)$, $E=E(k_2)$, $S=A^2(\xi)/4$. При таких начальных условиях, что $C_1^2\approx|C_2|$, следует $k_2\ll 1$ и решение уравнения (28) имеет вид

$$A^2(\xi)\approx A^2(0)\exp(-\xi), \tag{29}$$

т. е. амплитуда поля (12) (а также и частота осцилляций) экспоненциально затухает. Если же начальные условия таковы, что $|C_2|\approx 0$, то $k_2\approx 1$ (колебание существенно нелинейно) и временна́я эволюция амплитуды поля описывается выражением

* Разумеется, в рамках первого по γ приближения. Полученный результат, в сущности, определяет то время, за которое сильно нелинейное начальное возмущение в результате затухания выходит на почти линейный режим. Для описания последнего требуется уже следующее по γ приближение.

$$A^2(\xi) + 4 = [A^2(0) + 4] \exp(-\xi), \tag{30}$$

т. е. за конечное время $\xi_0 = \ln[1 + A^2(0)/4]$ электрическое поле полностью затухнет.

5. Полученные выражения (27) и (30) требуют разъяснения. Начнем с того, что они принципиально невозможны, если электрическое поле описывается нелинейным уравнением второго порядка с малой диссипацией. В самом деле, такое уравнение должно иметь вид (10а) с правой частью, пропорциональной малому параметру $\gamma \ll 1$, и эквивалентно уравнению движения частицы в поле одномерного потенциала

$$U(\varphi) = \varphi^4/8 - C_1\varphi^2/2. \tag{31}$$

При $C_1 > 0$, а именно в этом случае получаются результаты (27) и (30), на фазовой плоскости $(\varphi, \dot{\varphi})$ имеются две точки устойчивого равновесия $\varphi^* = \pm(2C_1)^{1/2}$. Учет малой диссипации приводит к тому, что любая фазовая траектория, соответствующая периодическому движению частицы, «наматывается» на точки равновесия. Для электрического поля это означало бы, что в нелинейной диссипативной среде установится его стационарное значение. В отсутствие подкачки энергии извне это, разумеется, невозможно.

В рассматриваемом нами случае ситуация меняется радикально. Дело в том, что для нелинейного уравнения третьего порядка фазовая траектория расположена уже не на плоскости, а в фазовом пространстве $(\varphi, \dot{\varphi}, \ddot{\varphi})$. Особые точки φ^* находятся на плоскости, перпендикулярной оси φ и определяемой начальным значением $\dot{\varphi}(0)$. Как известно из теории эллиптических функций [10], $\ddot{\varphi} \sim \varphi$, поэтому при стремлении поля к нулю по закону (29) либо (30) его вторая производная также стремится к нулю. Так, для выражения (29) фазовая траектория представляет собой сужающуюся пространственную спираль, сходящуюся в точку $\varphi = \dot{\varphi} = \ddot{\varphi} = 0$. Поскольку, как следует из определения (11а), $A^2(\xi) \sim C_1$, то постоянная составляющая поля также стремится к нулю.

Выражение (30) можно интерпретировать с помощью следующих соображений. При $k_2 \to 1$ период обращения изображающей точки по замкнутой траектории на фазовой плоскости $(\varphi, \dot{\varphi})$ стремится к бесконечности, т. е. поле будет меняться крайне медленно. Учет диссипации приводит к тому, что изображающая точка будет двигаться в фазовом пространстве по кривой, соединяющей ее начальное положение с началом координат $\varphi = \dot{\varphi} = \ddot{\varphi} = 0$. Время такого движения, очевидно, будет конечным (см. сноску на предыдущей странице).

Из сказанного можно заключить, что эффект неэкспоненциального затухания нелинейных плазменных колебаний с большой начальной амплитудой тесно связан с особенностями их описания, что в конечном счете обусловлено узостью зоны проводимости.

Как известно из теории трехволновых взаимодействий [11], в активной нелинейной среде возможен режим так называемой «взрывной неустойчивости», когда за конечное время, определяемое начальными условиями, амплитуды всех трех волн нарастают до бесконечных значений. В этом смысле рассмотренную выше ситуацию можно трактовать как «взрывную устойчивость».

В заключение автор считает своим приятным долгом поблагодарить Ф. Г. Басса, А. Ю. Матулиса и А. А. Игнатова за внимание к работе и ряд ценных замечаний.

ЛИТЕРАТУРА

1. Казаринов Р. Ф., Сурис Р. А. — ФТП, 1972, **6**, с 148
2. Ignatov A A, Romanov Yu A. — Phys. Stat. Solidi (b), 1976, **73**, p. 327.

3. Басс Ф. Г, Рубинштейн Е А — ФТТ, 1977, **19**, с. 1379.
4 Эпштейн Э М. — ФТП, 1977, **11**, с 1386
5. Басс Ф. Г, Лыках В. А., Тетервов А. П. — ФТП, 1982, **16**, с 865
6 Тетервов А П — Изв вузов — Радиофизика, 1982, **25**, № 11, с. 1231.
7 Ватова Л. Б — ФТТ, 1973, **15**, с 2468
8. Романов Ю А, Дряхлушин В. Ф, Орлов Л. К — Изв. вузов — Радиофизика, 1976, **19**, № 8, с. 1231, 1976, **19**, № 9, с. 1395
9. Моисеев Н. Н. Асимптотические методы нелинейной механики. — М.: Наука, 1981
10 Справочник по специальным функциям / Под ред. М. Абрамовица и И. Стиган — М, Наука, 1979
11. Вильгельмсон Х, Вейланд Я. Когерентное нелинейное взаимодействие волн в плазме. — М: Энергоиздат, 1981.

Институт физики полупроводников
АН ЛитССР

Поступила в редакцию
21 июня 1983 г.

THE NONLINEAR THEORY OF PLASMA OSCILLATIONS IN A SEMICONDUCTOR WITH A SUPERLATTICE

A. P. Tetervov

The time evolution of the electrical field of plasma oscillations in a semiconductor with a superlattice is studied The narrowness of conduction band in such materials results in the third-order nonlinear equation being used to describe the electrical field. This equation is solved under the assumption of small dissipation. The non-exponential damping of the plasma oscillation with large initial value of its amplitude is predicted.

ИНСТРУКЦИЯ ПО СОСТАВЛЕНИЮ РЕФЕРАТОВ

1. В реферате кратко излагается основное содержание статьи. Реферат должен дать читателю представление о характере освещаемой работы, оригинальности постановки вопроса, методике проведения исследования и его основных результатах.

2. Реферату должно предшествовать библиографическое описание в следующем виде· название статьи, фамилия и инициалы автора, название журнала, где помещается статья. Текст реферата начинается непосредственно с изложения существа работы без повторения заголовка. Форма изложения материала не обязательно должна повторять форму изложения оригинальной статьи.

3 Если оригинал содержит большое количество цифровых данных, их следует обобщить и систематизировать.

4. Средний объем реферата 1,5—2 страницы машинописного текста, отпечатанного через два интервала на белой писчей бумаге обычного формата (30×21) в двух экземплярах с полем 4 *см* с левой стороны

5. Таблицы, схемы, графики и пр. могут быть включены в том случае, если они отражают основное содержание работы или сокращают текст реферата. Сообщение о наличии в реферируемой работе таблиц, схем, графиков, фотографий, карт, рисунков необходимо давать в конце реферата. Например, табл. 2, илл. 10.

6. Формулы приводятся только в том случае, если они необходимы для понимания статьи. Громоздкие математические выражения помещать не следует Формулы следует вписывать четко, не изменяя принятых в оригинале обозначений величин. Формулы и буквенные обозначения вписываются **черными чернилами во второй экземпляр.** Вписывание формул и буквенных обозначений, а также исправление замеченных опечаток в **первом экземпляре не делается.**

7. В конце реферата в квадратных скобках указывается название учреждения или предприятия, в котором автор реферируемой работы (если эти данные приводятся в статье) провел работу. Подпись автора и дату написания реферата следует ставить в левом нижнем углу на обоих экземплярах реферата
