ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XXVII, № 6 РАДИОФИЗИКА 1984

УДК 530.1,539.2

НЕЛИНЕЙНЫЕ ПЛАЗМЕННЫЕ ВОЛНЫ В ОГРАНИЧЕННЫХ ПОЛУПРОВОДНИКАХ

С. И. Ханкина, В. М. Яковенко

Исследуются нелинейные свойства плазменных колебаний в полупроводниковой пленке. Показано, что слабые нелинейности, связанные с неквадратичным законом дисперсии электронов проводимости, могут приводить к образованию солитонов огибающей. Это явление имеет пороговый характер и зависит от соотношения между амплитудой волны и начальной шириной импульса. Исследована неустойчивость нелинейных плазменных волн относительно поперечных возмущений.

Для волн конечной амплитуды одновременное действие процессов, связанных с дисперсией среды и нелинейностями, может привести к образованию солитонов, если эти процессы компенсируют друг друга. В настоящее время солитоны различной природы обнаружены во многих диспергирующих средах: в плазме, полупроводниках, ферромагнетиках и антиферромагнетиках и т. д. [1–4].

Целью предлагаемой работы является изучение влияния нелинейных эффектов на распространение плазменных колебаний в тонкой полупроводниковой пластине. Рассматриваются нелинейности, связанные с неквадратичным законом дисперсии носителей тока. Этот механизм может оказаться основным в узкозонных полупроводниках (например в InSb и PbTe), в которых закон дисперсии электронов имеет вид [5]

$$\mathcal{E} = (1/2)\left[(\varepsilon_g^2 + \varepsilon_g p^2/m)^{1/2} - \varepsilon_g\right], \tag{1}$$

p — квазиимпульс, m — эффективная масса электрона вблизи дна зоны проводимости, ε_g — ширина запрещенной зоны.

В этом случае в уравнении движения электронов появляются нелинейные члены, которые соответствуют эффектам самовоздействия волны: изменению закона дисперсии, самофокусировке и т. д. Следует отметить, что трехволновое взаимодействие плазменных колебаний типа распада или слияния невозможно, так как для них одновременно не выполняются законы сохранения энергии и импульса.

Электромагнитные свойства полупроводниковой пластины описываются уравнениями Максвелла и гидродинамики. Для потенциальных колебаний

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = 0, \quad \operatorname{div} \varepsilon_0 \boldsymbol{E} = 4\pi e n; \tag{2}$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \operatorname{div}(n_0 \boldsymbol{v}) = 0, \quad \frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = e\boldsymbol{E}, \qquad p = \frac{m\boldsymbol{v}}{\sqrt{1 - v^2/v_n^2}}, \quad v_n^2 = \varepsilon_g/2m, \tag{3}$$

e — заряд электрона, $\boldsymbol{v}$ — скорость, n — отклонение концентрации от равновесного значения n_0, ε_0 — диэлектрическая постоянная решетки.

Нелинейность в полупроводнике предполагается слабой, так что $v^2/v_n^2 \ll 1$.

Если система координат выбрана таким образом, что плоскости $y=0$, $y=a$ являются границей раздела полупроводник — вакуум, то выполняются следующие граничные условия:

на плоскости $y = a$ —

$$E_{x1} = E_{x2},$$
$$\frac{\partial E_{y1}}{\partial t} = \varepsilon_0 \frac{\partial E_{y2}}{\partial t} + 4\pi e n_0 v_{y2}, \tag{4}$$

на плоскости $y=0$ —

$$E_{x2} = E_{x3},$$
$$\frac{\partial E_{y3}}{\partial t} = \varepsilon_0 \frac{\partial E_{y2}}{\partial t} + 4\pi e n_0 v_{y2}. \tag{5а}$$

Здесь индексы «1», «3» относятся к вакууму ($y>a$—среда «1», $y<0$— — среда «3»), индекс «2» — к полупроводнику ($0 \leqslant y \leqslant a$).

Зависимость всех переменных величин от координат и времени представим в виде $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{v} \sim \exp\left[i(k_x x + k_y y - \omega t)\right]$. В направлении оси $0z$ система однородна. Воспользовавшись уловиями излучения при $y=\pm\infty$ и уравнениями (2), перепишем граничные условия таким образом, чтобы в них вошли величины, характеризующие только полупроводник:

при $y = 0$ —

$$i\,\frac{\partial E_{x2}}{\partial t} = \varepsilon_0 \frac{\partial E_{y2}}{\partial t} + 4\pi e n_0 v_{y2},$$

при $y = a$ —

$$-\,i\,\frac{\partial E_{x2}}{\partial t} = \varepsilon_0 \frac{\partial E_{y2}}{\partial t} + 4\pi e n_0 v_{y2}. \tag{5б}$$

Из этих соотношений следует, что в полупроводниковой пластине существуют две независимые ветви плазменных колебаний [6]

$$\mathrm{cth}\,(|k_x|a/2) + \varepsilon(\omega) = 0; \tag{6а}$$

$$\mathrm{th}\,(|k_x|a/2) + \varepsilon(\omega) = 0 \tag{7а}$$

($k_y^2 = -k_x^2$, $\varepsilon(\omega) = \varepsilon_0 - \omega_0^2/\omega^2$, $\omega_0^2 = 4\pi e^2 n_0/m$), которые при $a \to \infty$ имеют общую предельную частоту поверхностных плазменных колебаний ($1+\varepsilon(\omega)=0$).

Если полупроводниковая пластина тонкая и ее толщина меньше длины волны ($|k_x|a \ll 1$), то*

$$\omega^2 = \omega_0^2 \frac{|k_x|a}{2}\left(1 - \frac{\varepsilon_0 |k_x|a}{2}\right); \tag{6б}$$

* Волны аналогичного вида с частотой активации существуют вблизи экситонных полос поглощения. Действительно, если $\varepsilon(\omega) = \varepsilon_0 - \dfrac{\omega_0^2}{\omega^2 - \omega_{01}^2}$, то из (6 а) при $|k_x|a \ll 1$ $\omega^2 = \omega_{01}^2 + \dfrac{\omega_0^2|k_x|a}{2}$.

$$\omega^2=\frac{\omega_0^2}{\varepsilon_0}\left(1-\frac{|k_x|a}{2\varepsilon_0}+\frac{k_x^2a^2}{4\varepsilon_0^2}\right),\quad \varepsilon_0|k_x|a\ll 2. \tag{7б}$$

Таким образом, в этом случае дисперсия носит геометрический характер, она связана с конечными размерами образца. При $a\to 0$ колебания (6б) переходят в двумерный поверхностный плазмон, если величина n_0a имеет конечный предел, равный поверхностной концентрации. В тонких пленках в силу неравенства $|k_x|a\ll 1$ в волне (6б) компоненты v_y и E_y малы по сравнению с компонентами v_x и E_x; в волне (7б), наоборот, $v_x\ll v_y$, $E_x\ll E_y$. Потоки энергии в этих волнах направлены в противоположные стороны, так как их групповые скорости $v_{гр}=\partial\omega/\partial k_x$ разных знаков.

Слабая нелинейность в уравнениях движения приводит к зависимости частоты и фазовой скорости от амплитуды колебаний:

$$\omega^2=\omega_0^2\frac{|k_x|a}{2}\left(1-\frac{\varepsilon_0|k_x|a}{2}\right)\left(1-\frac{3}{2}\frac{|\varphi|^2}{v_n^2}\right); \tag{8а}$$

$$\omega^2=\frac{\omega_0^2}{\varepsilon_0}\left(1-\frac{|k_x|a}{2\varepsilon_0}+\frac{k_x^2a^2}{4\varepsilon_0^2}\right)\left(1-\frac{3}{2}\frac{|\varphi|^2}{v_n^2}\right), \tag{8б}$$

φ — амплитуда скорости в каждой из ветвей. Предполагается, что она мало меняется на расстояниях порядка длины волны и за время порядка колебаний на основной гармонике (высшие гармоники, возникающие из-за нелинейности, считаются малыми), $\varphi=\varphi(x-v_{гр}t,\ t)$.

В [1] изложен метод, позволяющий на основании нелинейного дисперсионного уравнения построить уравнение Шредингера с кубической нелинейностью, описывающее эволюцию комплексной амплитуды плоской монохроматической волны, частота и волновой вектор в которой связаны законом дисперсии (6б) или (7б). Это уравнение имеет вид

$$i\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}+\alpha\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi^2}-\beta|\varphi|^2\varphi=0, \tag{9}$$

τ, ξ — переменные, связанные с t и x соотношениями $\tau=t$, $\xi=x-v_{гр}t$. В выражении (9)* $\alpha=\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2\omega}{\partial k_x^2}$, $\beta=\dfrac{\partial\omega}{\partial|\varphi|^2}$, $\alpha_1=-\dfrac{\omega_0^4a^2}{32\omega^3}=-\dfrac{\omega_0}{\gamma|k_x|}\times\sqrt{\dfrac{a}{2|k_x|}}$, $\beta=-\dfrac{3}{4}\dfrac{\omega}{v_n^2}$, $v_{гр}^{(1)}=\dfrac{\omega_0}{2}\sqrt{\dfrac{a}{2|k_x|}}$, $\alpha_2=-\dfrac{\omega_0a}{32\sqrt{\varepsilon_0}}$, $\beta_2=-\dfrac{3}{4}\dfrac{\omega_0}{v_n^2\sqrt{\varepsilon_0}}$, $v_{гр}^{(2)}=-\dfrac{\omega_0a}{4\sqrt{\varepsilon_0}}$. Так как $\alpha_{1,2}$ и $\beta_{1,2}$ имеют одинаковые знаки, то однородное решение (9) $\varphi=\varphi_0\exp(-i\beta|\varphi_0|^2t)$ является устойчивым относительно малых продольных возмущений.

Задача Коши для уравнения (9) решается точно методом обратной задачи рассеяния [7].

---

* Уравнение (9) можно получить и иным способом, воспользовавшись процедурой, характерной для сред с геометрической дисперсией. В длинноволновом приближении $|k_x|a\ll 1$ все переменные величины слабо меняются по толщине полупроводниковой пластины. Поэтому их можно разложить в ряд по y вблизи $y=0$. Электрическое поле, скорость носителей тока и их производные по y при $y=0$ определяются друг через друга методом последовательных приближений из системы (2), (3), (5а) [1]. В результате в исходном дифференциальном уравнении появляются соответствующие члены, содержащие первые и вторые производные по x,

Если для функции $\varphi(\xi, \tau)$ выполняются условия

$$|\varphi| \to |\varphi_0|, \quad \partial\varphi/\partial\xi = 0 \qquad \text{при } |\xi| \to \infty, \tag{10}$$

то асимптотическим решением (9) при $\tau > \tau_{пор}$ является конечный набор солитонов, параметры которых (амплитуда, скорость) однозначно определяются дискретными собственными значениями λ системы уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\psi_1}{\partial\xi} &= i\lambda\psi_1 + i\varphi\sqrt{\frac{|\beta|}{2|\alpha|}}\psi_2, \\ \frac{\partial\psi_2}{\partial\xi} &= -i\lambda\psi_2 + i\varphi\sqrt{\frac{|\beta|}{2|\alpha|}}\psi_1. \end{aligned} \tag{11}$$

Выбираем в качестве начального возмущения прямоугольный импульс шириной $b = v_{гр}\tau$ и амплитудой φ_0 ($\varphi(\xi, 0) = 0$ при $-b/2 \leqslant \xi \leqslant b/2$, $\varphi(\xi, 0) = \varphi_0$ при $|\xi| \to \infty$). Уравнения для определения дискретных собственных значений имеют вид

при $\operatorname{tg}\lambda b > 0$ —

$$\pm\cos\lambda b = \lambda \Big/ \sqrt{|\varphi_0|^2 \frac{|\beta|}{2|\alpha|}}, \quad \lambda^2 < \frac{|\varphi_0|^2\,|\beta|}{2\,|\alpha|},$$

при $\operatorname{tg}\lambda b < 0$ —

$$\pm\sin\lambda b = \lambda/\sqrt{|\varphi_0|^2|\beta|/2|\alpha|}, \tag{12}$$

т. е. спектр собственных значений двукратно вырожден. Это означает, что образуются пары солитонов

Графический анализ (12) показывает, что процесс образования солитонов является пороговым. Пороговое значение амплитуды начального возмущения определяется условием

$$(\varphi_{0пор} b)^2 = \frac{\pi^2}{2}\frac{|\alpha|}{|\beta|}. \tag{13}$$

Для волны (8а) —

$$\varphi^{(1)}_{0пор} b = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}\frac{v_n}{|k_x|},$$

для волны (8б) —

$$\varphi^{(2)}_{0пор} b = \frac{\pi}{4\sqrt{3}} v_n a.$$

С ростом φ_0 амплитуда солитонов и их число увеличиваются.

При заданной амплитуде можно определить $\tau_{пор}$, начиная с которого происходит процесс образования солитонов: $\tau^{(1)}_{пор} = \dfrac{\pi v_n}{\omega_0|\varphi_0|} \times \sqrt{\dfrac{2}{3|k_x|a}}$, $\tau^{(2)}_{пор} = \dfrac{\pi v_n}{\sqrt{3}\,\omega_0|\varphi_0|}$. Если амплитуда начального импульса меньше пороговой, то в результате пространственной дисперсии происходит расплывание начального возмущения.

Зная $\varphi_{0пор}$, легко определить пороговую мощность возбуждающей волны:

$$P_{x пор} = \frac{c}{8\pi}\iint dy\,dz\,(E_y H_z^* + E_y^* H_z). \tag{14}$$

Для (8а) —

$$P_{x\,\text{пор}} = \frac{1}{4\pi}\frac{2m^2}{3e^2}\,\omega^3\,|\varphi_{0\,\text{пор}}|^2\varepsilon(\omega)\,k_x La^3 = \frac{\pi L k_x a^3 m^2 \omega v_n^2 \varepsilon(\omega)}{18e^2\tau^2},$$

для (8б) —

$$P_{x\,\text{пор}} = \frac{1}{4\pi}\frac{m^2\omega^3}{e^2 k_x}\,|\varphi_{0\,\text{пор}}|^2\varepsilon(\omega)\,La = \frac{\pi L a m^2 \omega v_n^2 \varepsilon(\omega)}{12k_x e^2\tau^2},$$

L — размеры пучка в направлении оси $0z$.

При $a=10$ *мкм*, $L=1$ *см*, $\tau=20$ *нс*, $\omega_0/\sqrt{\varepsilon_0}\sim 10^{12}$ c^{-1}, $v_n \sim 10^8$ *см/с* ($\varepsilon_g=0{,}1$ *эВ*, $m=10^{-29}$ *г*) $P_{x\,\text{пор}}\sim 10^{-2}\div 10^{-3}$ *мВт*, т. е. пороговые мощности возбуждающего сигнала невелики. Однако в приведенных выше рассуждениях не учитывалось затухание волн. Из условия малости затухания плазменных колебаний по сравнению с нелинейным изменением их частоты следуют более жесткие ограничения на амплитуду начального импульса. Так как для колебаний (8) $\Delta\omega = \frac{3}{4}\,\omega\,\frac{|\varphi|^2}{v_n^2}$, то должно выполняться неравенство $|\varphi_0|^2 > \frac{2}{3}\frac{\nu}{\omega}v_n^2$. При $\nu\sim 10^{11}$ c^{-1}, $v_n\sim 10^8$ *см/с*, $\omega\sim 10^{12}$ c^{-1}, $a=10$ *мкм*, $L=1$ *см* $|\varphi_0|\simeq 2{,}5\cdot 10^7$ *см/с* и пороговые значения мощности значительно увеличиваются: $P_{x\,\text{пор}}\sim 10$—100 *мВт*. Их можно уменьшить, увеличивая длительность импульса и уменьшая размеры L.

Для образования n пар солитонов должны выполняться неравенства

$$\frac{2\,|\alpha|}{|\beta|}(\pi n)^2 > (\varphi_0 b)^2 > \frac{2\,|\alpha|}{|\beta|}\pi^2(n-1)^2. \qquad (15)$$

При $n=1$, $t\to\infty$ (см. [4])

$$|\varphi(x,t)| = \varphi_0\left\{1-\frac{\nu^2}{\operatorname{ch}^2(\nu/\sqrt{|\alpha|})[x-(v_{\text{гр}}\pm\sqrt{|\alpha|}\lambda)t]}\right\}^{1/2}, \qquad (16)$$

$$\nu^2 = \frac{|\beta|\,|\varphi_0|^2}{2} - \lambda^2.$$

Можно показать, что если уравнение (9) дополнить членом $\frac{v_{\text{гр}}}{2|k_x|}\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}$, то однородное решение $\varphi = A_0\exp(-i|A_0|^2\beta\tau)$ для колебаний (8б) является устойчивым относительно малых поперечных возмущений огибающей, направленных вдоль оси $0z$ ($v_{\text{гр}}^{(2)}<0$, $\beta_2<0$), и неустойчивым для колебаний (8а) ($v_{\text{гр}}^{(1)}>0$, $\beta_1<0$).

Неустойчивость волны (8а) относительно поперечных возмущений приводит к нелинейной самоканализации. Если в продольном направлении волна имеет постоянную амплитуду ($\partial\varphi/\partial x = 0$), то уравнение (9) запишется следующим образом:

$$i\frac{\partial\psi}{\partial\tau} + \frac{v_{\text{гр}}}{2|k_x|}\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} - \beta_1|\varphi|^2\varphi = 0. \qquad (17)$$

Его решение ищем в виде $\varphi=\varphi(z)e^{-i(\Omega t+\nu)}$, где $\varphi(z)$ — действительная величина, для которой выполняется условие $\varphi(z)\to 0$ при $|z|\to\infty$. В этом случае

$$\varphi(z, t) = \frac{A_0 \exp[(-iA_0^2/2)\beta_1 t + \gamma]}{\mathrm{ch}\,[A_0(-\beta_1|k_x|/v_{\text{гр}})^{1/2} z]}, \tag{18}$$

т. е. в направлении z распространяется солитон. Частота его пропорциональна квадрату амплитуды, а ширина $\Delta = \frac{1}{A}\left(-\frac{v_{\text{гр}}}{|k_x|\beta_1}\right)^{1/2}$. Энергия солитона пропорциональна $A_0^2\Delta$ и тем больше, чем больше его амплитуда. Явление самоканализации также носит пороговый характер и зависит от соотношения между амплитудой и начальной шириной импульса. Если ширина начального пучка —$b_\perp$, то его амплитуда должна быть больше пороговой, определяемой соотношением

$$(A_{0\text{пор}} b_\perp)^2 = \frac{\pi^2}{2}\left|\frac{v_{\text{гр}}}{2|k_x|\beta}\right| = \frac{\pi^2 v_n^2}{6k_x^2}. \tag{19}$$

Это значение для $A_{0\,\text{пор}}$ следует из условия неустойчивости решения $\varphi = A_0 \exp(-i|A_0|^2\beta t)$ относительно поперечных смещений [8]. При $b_\perp = 10^{-1}$ *см*, $k_x a \sim 10^{-1}$, $v_n \sim 10^8$ *см/с* $|A_{0\,\text{пор}}| \sim 10^7$ *см/с*.

ЛИТЕРАТУРА

1 Карпман В И Нелинейные волны в диспергирующих средах — М Наука, 1973, с. 175.
2 Захаров В. Е, Манаков С. В., Новиков С. П., Питаевский Л. П Теория солитонов метод обратной задачи — М.· Наука, 1980, с 320
3. Звездин А. К., Попков А. Ф. — ЖЭТФ, 1983, **84**, вып. 2, с. 606.
4. Лукомский В П — УФЖ, 1978, **23**, № 1, с 134
5 Цидильковский И М Электроны и дырки в полупроводниках. — М Наука, 1972, с 640.
6 Ritchie R. H.— Surface science, 1973, **34**, p. 1.
7. Захаров В Е, Шабат А. Б. — ЖЭТФ, 1973, **64**, вып. 5, с. 1627.
8 Беспалов В. И, Таланов В. И — Письма в ЖЭТФ, 1966, **3**, с. 471.

Институт радиофизики и электроники
АН УССР

Поступила в редакцию
5 июля 1983 г

NONLINEAR PLASMA WAVES IN BOUNDED SEMICONDUCTORS

S. I. Khankina, V. M. Yakovenko

Nonlinear effects of plasma oscillations in a semiconducting film are considered. It is shown, that the weak nonlinearities due to a nonquadratic energy-momentum relation of the conduction electrons may lead to formation of solitary waves of the pulse envelope. The effect is characterized by the existence of a threshold depending on the wave amplitude and the initial pulse width. The stability of the nonlinear plasma waves against transverse perturbations is analyzed.