ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XXVII, № 6 РАДИОФИЗИКА 1984

УДК 538.56

ИЗЛУЧЕНИЕ НЕПОДВИЖНОГО ЗАРЯДА ПРИ БЫСТРОМ ИЗМЕНЕНИИ СКОРОСТИ СРЕДЫ

В. А. Давыдов

Рассмотрено излучение неподвижного заряда в среде при быстром изменении ее скорости. Получены выражения для углового и спектрального распределения энергии излучения.

Если в движущуюся среду, скорость которой $\boldsymbol{u}$ меняется во времени, поместить неподвижный источник электрического или магнитного поля (например заряд, диполь, магнитный диполь, контур с током и т. д.), он должен излучать электромагнитные волны. Это явление имеет аналог в нестационарных средах — при изменении во времени тензора диэлектрической проницаемости среды должен излучать неподвижный источник электрического поля [1, 2]. Энергия на излучение черпается от «внешней силы», создающей во втором случае нестационарность в среде, а в первом случае заставляющей среду двигаться неравномерно.

В то время как излучение неподвижных источников в средах с меняющейся анизотропией уже достаточно хорошо изучено, среди большого количества публикаций, посвященных электродинамике движущихся сред, до последнего времени, по-видимому, не было работ об излучении в неравномерно движущихся средах. В [3] предложена теория возмущений для расчета энергии излучения источников электрического и (или) магнитного поля в неравномерно и неоднородно движущихся средах. Однако область применимости полученных в [3] формул ограничивается случаем медленно ($u \ll c$) движущихся сред. В настоящей работе мы рассмотрим точное (без ограничений на величину скорости) решение задачи об излучении неподвижного точечного заряда при мгновенном изменении скорости среды.

Пусть в среде, скорость $\boldsymbol{u}$ которой мгновенно меняется во времени, находится неподвижный точечный заряд q. Рассмотрим сначала случай мгновенной остановки среды:

$$\boldsymbol{u}(t) = \begin{cases} \boldsymbol{u}, & t < 0 \\ 0, & t \geqslant 0 \end{cases}. \tag{1}$$

Для расчета спектральных и угловых характеристик излучения воспользуемся условиями непрерывности в момент скачка ($t=0$) электрической и магнитной индукций [4]. Эти условия обычно используются для расчета различных эффектов в средах со скачкообразно меняющейся диэлектрической проницаемостью, однако из их вывода видно, что они выполняются и в случае мгновенного изменения любых электромагнитных параметров, входящих в уравнения Максвелла или в материальные соотношения.

Получим вначале выражения для фурье-компонент электрической и магнитной индукций поля точечного заряда, покоящегося в равномерно движущейся со скоростью $\boldsymbol{u}$ среде. Отметим, что задача определения поля неподвижного заряда в движущейся среде решена еще Таммом [5]. Воспользуемся уравнениями для векторного и скалярного потенциалов в движущейся среде [6]. Эти уравнения для случая неподвижного заряда имеют вид (магнитную проницаемость среды положим равной единице)

$$\left(\Delta - \frac{\varkappa\gamma^2}{c^2}(\boldsymbol{u}\nabla)^2\right)\boldsymbol{A} = \frac{4\pi}{c}\,\frac{\varkappa\gamma^2}{1+\varkappa}\,\boldsymbol{u}q\delta(\boldsymbol{r}),$$
$$\left(\Delta - \frac{\varkappa\gamma^2}{c^2}(\boldsymbol{u}\nabla)\right)\varphi = -4\pi\left(1 - \frac{\varkappa\gamma^2}{1+\varkappa}\right)q\delta(\boldsymbol{r}), \qquad (2)$$

где $\gamma = (1-\beta^2)^{-1/2}$, $\beta = \boldsymbol{u}/c$, $\varkappa = \varepsilon - 1$, ε — диэлектрическая проницаемость среды в системе ее покоя. Разложим потенциалы и правые части уравнений (2) в интеграл Фурье вида

$$\boldsymbol{A} = \int \boldsymbol{A}_{\boldsymbol{k}}\, e^{i\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}}\, d\boldsymbol{k} \qquad (3)$$

и т. д. Используя (2), (3), получим выражения для фурье-компонент $\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{k}}$, $\varphi_{\boldsymbol{k}}$:

$$\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{k}} = -\frac{4\pi q\varkappa\gamma^2\boldsymbol{u}}{(2\pi)^3 c(1+\varkappa)(k^2 - (\varkappa\gamma^2/c^2)(\boldsymbol{k}\boldsymbol{u})^2)},$$
$$\varphi_{\boldsymbol{k}} = \frac{4\pi q(1 - \varkappa\gamma^2(1+\varkappa)^{-1})}{(k^2 - (\varkappa\gamma^2/c^2)(\boldsymbol{k}\boldsymbol{u})^2)}. \qquad (4)$$

Из материальных соотношений Минковского [6] следует выражение для электрической индукции

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon\boldsymbol{E} + \varkappa\gamma^2(\beta^2\boldsymbol{E} - \beta\;\beta\boldsymbol{E}) + [\beta \times \boldsymbol{B}]), \qquad (5)$$

где

$$\boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t} - \operatorname{grad}\varphi, \qquad \boldsymbol{B} = \operatorname{rot}\boldsymbol{A}.$$

Используя (4), (5), окончательно получаем

$$\boldsymbol{B}_{\boldsymbol{k}} = -\frac{iq\varkappa\gamma^2[\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{u}]}{2\pi^2\varepsilon c(k^2 - (\varkappa\gamma^2/c^2)(\boldsymbol{k}\boldsymbol{u})^2)},$$
$$\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{k}} = -\frac{iq(\boldsymbol{k} - (\varkappa\gamma^2/c^2)(\boldsymbol{k}\boldsymbol{u})\boldsymbol{u})}{2\pi^2(k^2 - (\varkappa\gamma^2/c^2)(\boldsymbol{k}\boldsymbol{u})^2)}. \qquad (6)$$

При $t > 0$ фурье-компоненты магнитной и электрической индукций имеют следующий вид:

$$\boldsymbol{B}_{\boldsymbol{k}} = \boldsymbol{A}_1 e^{-ikct/\sqrt{\varepsilon}} + \boldsymbol{A}_2 e^{ikct/\sqrt{\varepsilon}},$$
$$\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{k}} = -\frac{iq\boldsymbol{k}}{2\pi^2k^2} - \frac{\sqrt{\varepsilon}}{k}[\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{A}_1]\,e^{-ikct/\sqrt{\varepsilon}} + \frac{\sqrt{\varepsilon}}{k}[\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{A}_2]\,e^{ikct/\sqrt{\varepsilon}}, \qquad (7)$$

где $\boldsymbol{A}_1$, $\boldsymbol{A}_2$ — соответственно неизвестные амплитуды излученных волн, распространяющихся по $\boldsymbol{k}$ и против $\boldsymbol{k}$. Амплитуды $\boldsymbol{A}_1$ и $\boldsymbol{A}_2$ найдем из условий непрерывности в момент времени $t=0$ электрической и магнитной индукции. Используя (6), (7), имеем

$$\boldsymbol{A}_1 = i\,\frac{q\varkappa\gamma^2[\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{u}]((\boldsymbol{k}\boldsymbol{u})\sqrt{\varepsilon}/(kc) - 1)}{4\pi^2\varepsilon c(k^2 - (\varkappa\gamma^2/c^2)(\boldsymbol{k}\boldsymbol{u})^2)}, \qquad (8)$$

$$A_2 = -i\frac{q\varkappa\gamma^2[\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{u}]((\boldsymbol{k}\boldsymbol{u})\sqrt{\varepsilon}/(kc)+1)}{4\pi^2\varepsilon c(k^2-(\varkappa\gamma^2/c^2)(\boldsymbol{k}\boldsymbol{u})^2)}.$$

Угловое и спектральное распределения энергий излучения можно получить с помощью формулы

$$\int W_{\omega,\Omega}\,d\omega\,d\Omega = 2\pi^2\int d\boldsymbol{k}\,|\boldsymbol{H}_k|^2, \tag{9}$$

где $\boldsymbol{H}_k$ — напряженность магнитного поля излучения. Необходимо учесть, что в направлении $\boldsymbol{k}$ распространяются волны с амплитудами $\boldsymbol{A}_1(\boldsymbol{k})$ и $\boldsymbol{A}_2(-\boldsymbol{k})$. Используя (8), (9), получим

$$W_{\omega,\Omega}\,d\omega\,d\Omega = \frac{q^2\varkappa^2\gamma^4u^2\sin^2\theta\,(1-(u/c)\sqrt{\varepsilon}\cos\theta)^2\,d\omega\,d\Omega}{4\pi^2\varepsilon^{3/2}c^3(1-(\varkappa\gamma^2/c^2)\,u^2\cos^2\theta)^2}, \tag{10}$$

где θ — полярный угол сферической системы координат с осью $z\parallel\boldsymbol{u}$, т. е. угол между вектором скорости $\boldsymbol{u}$ и направлением излучения.

Анализ излучения при мгновенном ускорении среды значительно сложнее. Это связано с тем, что излученные волны распространяются в движущейся среде, и их характеристики (волной вектор и частота, электрические и магнитные поля и индукции) связаны между собой более сложными и громоздкими дисперсионными и материальными соотношениями. Пусть зависимость скорости среды от времени имеет вид

$$\boldsymbol{u}(t) = \begin{cases} 0, & t<0 \\ \boldsymbol{u}, & t\geqslant 0\end{cases}. \tag{11}$$

Магнитная индукция после скачка описывается следующим выражением:

$$\boldsymbol{B}_k = \frac{-iq\varkappa\gamma^2\,[\boldsymbol{k}\boldsymbol{\beta}]}{2\pi^2\varepsilon k^2(1-\varkappa\gamma^2\beta^2\cos^2\theta)} + \boldsymbol{B}_{10}e^{-i\omega_1 t} + \boldsymbol{B}_{20}e^{-i\omega_2 t}, \tag{12}$$

где ω_1, ω_2 — решения дисперсионного уравнения для плоских монохроматических волн в движущейся среде [6]:

$$\omega_{1,2} = kc\,\frac{\varkappa\gamma^2\beta\cos\theta \mp \sqrt{1+\varkappa\gamma^2-\varkappa\gamma^2\beta^2\cos^2\theta}}{1+\varkappa\gamma^2}. \tag{13}$$

Знак «минус» в (13) соответствует ω_1, а знак «плюс» — ω_2. Электрическая индукция при $t>0$ имеет вид

$$\boldsymbol{D}_k = \frac{-iq(\boldsymbol{k}-\varkappa\gamma^2\beta\cos\theta\,k\boldsymbol{\beta})}{2\pi^2k^2(1-\varkappa\gamma^2\beta^2\cos^2\theta)} + \boldsymbol{D}_{10}e^{-i\omega_1 t} + \boldsymbol{D}_{20}e^{-i\omega_2 t}. \tag{14}$$

Из условий непрерывности электрической и магнитной индукций при $t=0$, а также из (12), (14) следует, что векторы $\boldsymbol{D}_{10}$ и $\boldsymbol{D}_{20}$ лежат в плоскости, образованной векторами $\boldsymbol{k}$ и $\boldsymbol{\beta}$, а векторы $\boldsymbol{B}_{10}$ и $\boldsymbol{B}_{20}$ — перпендикулярны этой плоскости. Используя уравнения Максвелла и материальные соотношения Минковского, получим связь между амплитудами $\boldsymbol{D}_{10}$ и $\boldsymbol{D}_{20}$ электрической индукции и амплитудами $\boldsymbol{E}_{10}$ и $\boldsymbol{E}_{20}$ напряженности электрического поля излученных волн:

$$D_{10,20} = \left(1+\varkappa\gamma^2\left(1-\frac{k\beta\cos\theta}{k_{1,2}}\right)\right)\frac{1+\varkappa}{1+\varkappa+\varkappa\gamma^2\beta^2\sin^2\theta}\left(\boldsymbol{E}_{10,20}-\frac{\boldsymbol{k}(\boldsymbol{k}\boldsymbol{E}_{10,20})}{k^2}\right), \tag{15}$$

где $k_{1,2}=\omega_{1,2}/c$. Подставив (12) в условие непрерывности для $\boldsymbol{B}$ при $t=0$, а (14), (15) — в условие непрерывности для $\boldsymbol{D}$ при $t=0$ и умножив второе векторно на $\boldsymbol{k}$, получим систему алгебраических уравнений, определяющих неизвестные амплитуды $\boldsymbol{B}_{10}$ и $\boldsymbol{B}_{20}$:

$$\boldsymbol{B}_{10}+\boldsymbol{B}_{20}=\frac{iq\varkappa\gamma^2[\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{\beta}]}{2\pi^2\varepsilon k^2(1-\varkappa\gamma^2\beta^2\cos^2\theta)},$$

$$[(1+\varkappa\gamma^2)k_1-\varkappa\gamma^2k\beta\cos\theta]\boldsymbol{B}_{10}+[(1+\varkappa\gamma^2)k_2-\varkappa\gamma^2k\beta\cos\theta]\times \tag{16}$$

$$\times\boldsymbol{B}_{20}=\frac{-iq\varkappa\gamma^2\beta k\cos\theta(1+\varkappa+\varkappa\gamma^2\beta^2\sin^2\theta)[\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{\beta}]}{2\pi^2\varepsilon k^2(1-\varkappa\gamma^2\beta^2\cos^2\theta)}.$$

При выводе (16) мы воспользовались тем, что, как следует из уравнения Максвелла, $\operatorname{rot}\boldsymbol{E}=-(1/c)\partial\boldsymbol{B}/\partial t$ $\boldsymbol{B}_{10,20}=[\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E}_{10,20}]/k_{1,2}$. Решение (16) имеет вид

$$\boldsymbol{B}_{10,20}=\pm\frac{iq\varkappa\gamma^2\left(\beta\cos\theta\sqrt{1+\varkappa\gamma^2-\varkappa\beta^2\gamma^4\cos^2\theta}\pm1\right)[\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{\beta}]}{4\pi^2k^2\varepsilon(1-\varkappa\gamma^2\beta^2\cos^2\theta)}. \tag{17}$$

По известным амплитудам (17) уже нетрудно получить выражение для углового и спектрального распределения энергии излучения. Рассмотрим сначала случай «досветового» движения среды $((u/c)\sqrt{\varepsilon}<1)$. Используя (17), получим для энергии излучения

$$\begin{aligned}W_{\omega,\Omega}\,d\omega d\Omega&=\frac{q^2\varkappa^2\gamma^4u^2\sin^2\theta\,d\omega d\Omega}{4\pi^2c^3\varepsilon(1+\varkappa\gamma^2-\varkappa\gamma^2\beta^2\cos^2\theta)^{1/2}}\times\\&\times\frac{\left(1-\beta\cos\theta\sqrt{1-\varkappa\gamma^2-\varkappa\beta^2\gamma^4\cos^2\theta}\right)^2}{(1-\varkappa\gamma^2\beta^2\cos^2\theta)^2}.\end{aligned} \tag{18}$$

В отличие от (10) формула (18) не описывает истинного углового распределения энергии излучения. Дело в том, что движущаяся среда обладает своеобразной анизотропией [6], так что в ней не совпадают направления волнового и лучевого векторов (напомним, что лучевой вектор определяет направление распространения энергии). Используя полученное в [6] уравнение, описывающее поверхность показателей преломления в движущейся среде, нетрудно получить связь между полярным углом θ', определяющим направление лучевого вектора, и углом θ:

$$\operatorname{tg}\theta'=\frac{\sin\theta(1+\varkappa\gamma^2)}{\cos\theta(1+\varkappa)+\varkappa\gamma^2\beta\sqrt{1+\varkappa\gamma^2-\varkappa\gamma^2\beta^2\cos^2\theta}}. \tag{19}$$

Правильное угловое распределение энергии излучения получим, перейдя в (18) с помощью (19) к интегрированию по углу θ'.

Аналогично при «сверхсветовом» движении среды $((u/c)\sqrt{\varepsilon}>1)$ имеем

$$W_{\omega\Omega}d\omega d\Omega=W^1_{\omega\Omega}\,d\omega\,d\Omega+W^2_{\omega\Omega}\,d\omega\,d\Omega. \tag{20}$$

В (20) $W^1_{\omega\Omega}=W_{\omega,\Omega}/2$, где $W_{\omega,\Omega}$ описывается выражением (18),

$$\begin{aligned}W^2_{\omega\Omega}&=\frac{q^2\varkappa^2\gamma^4u^2\sin^2\theta}{8\pi^2c^3\varepsilon(1+\varkappa\gamma^2-\varkappa\gamma^2\beta^2\cos^2\theta)^{1/2}}\times\\&\times\frac{\left(1+\beta\cos\theta\sqrt{1+\varkappa\gamma^2-\varkappa\beta^2\gamma^2\cos^2\theta}\right)^2}{(1-\varkappa\gamma^2\beta^2\cos^2\theta)^2}.\end{aligned} \tag{21}$$

Правильное угловое распределение энергии излучения можно получить, перейдя в (20) от интегрирования по углу θ к интегрированию по углу θ', причем в первом слагаемом (20) переход делается с помощью формулы (19), а во втором — с помощью следующего выражения:

$$\operatorname{tg}\theta' = \frac{\sin\theta(1+\varkappa\gamma^2)}{\cos\theta(1+\varkappa) - \varkappa\gamma^2\beta\sqrt{1+\varkappa\gamma^2 - \varkappa\gamma^2\beta^2\cos^2\theta}}. \tag{22}$$

Анализ выражений (10) и (18) показывает, что в случае медленно движущихся сред ($\beta \ll 1$) при остановке и старте среды излучается одинаковая энергия

$$W_{\omega\Omega}\, d\omega\, d\Omega = \frac{q^2\varkappa^2 u^2 \sin^2\theta\, d\omega\, d\Omega}{4\pi^2 c^3 \varepsilon^{3/2}}. \tag{23}$$

Выражение (23) совпадает с полученным ранее результатом для мгновенного изменения скорости медленно движущейся среды [3].

Автор благодарит Б. М. Болотовского и С. Н. Столярова за полезное обсуждение и интерес к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Манева Г. М. — Кр сообщ. физ, ФИАН СССР, 1977, № 2, с. 21.
2. Давыдов В. А. — ЖТФ, 1982, 52, № 12, с. 2340.
3. Давыдов В. А — Изв. вузов — Радиофизика, 1983, **26**, № 9, с. 1134.
4 Morgentaller F. R — IRE Trans, 1958, **MTT-6**, p. 167.
5 Tamm I E — J Phys., 1939, **1**, p. 439.
6 Болотовский Б М, Столяров С. Н. Эйнштейновский сборник 1974. — М.: Наука, 1976, с. 179.

Московский государственный университет

Поступила в редакцию 8 июля 1983 г

RADIATION EMITTED BY A FIXED CHARGE AT THE QUICK CHANGE OF THE MEDIUM VELOCITY

V. A. Davydov

Radiation emitted by a fixed charge in a medium with a quick change of the velocity is examined. Expressions for the angular and spectral distributions of the emitted energy are obtained.