

УДК 535.361 2:535 562

ИНТЕРФЕРЕНЦИОННАЯ ПОПРАВКА К АЛЬБЕДО СИЛЬНО ГИРОТРОПНОЙ СРЕДЫ СО СЛУЧАЙНЫМИ НЕОДНОРОДНОСТЯМИ

А. А. Голубенцев

Рассмотрен интерференционный эффект усиления рассеяния назад при распространении света в случайно-неоднородных средах. Показано, что гиротропия среды, вызванная внешним магнитным полем, приводит к частичному подавлению эффекта. Получено выражение для интерференционной поправки к альбедо в пределе сильной гиротропии.

Характер распространения волн любой природы в средах со случайными неоднородностями показателя преломления определяется отношением длины волны λ к длине свободного пробега излучения l . Как правило, при рассеянии света $\lambda/l \ll 1$. В нулевом приближении по этому параметру перенос энергии волнового поля определяется уравнением переноса интенсивности (УПИ), игнорирующим интерференционные эффекты [1, 2].

В приближении УПИ можно рассчитать корреляционную функцию поля в любых точках пространства и, в частности, можно найти сечение рассеяния произвольного объема, содержащего неоднородности.

Известен также вид главной интерференционной поправки к корреляционной функции поля [3, 4]. Соответствующая поправка к сечению резко анизотропна и заметно отлична от нуля лишь для направлений, близких к направлению рассеяния назад. Хотя интерференционная поправка к полному сечению и является малой по параметру λ/l , для направления рассеяния назад величина поправки порядка самой величины дифференциального сечения.

Столь сильный интерференционный эффект возникает по следующей причине. При выводе УПИ производится некогерентное сложение интенсивностей волн, претерпевших различные процессы многократного рассеяния. Фазовые соотношения между ними не учитываются из-за случайного расположения неоднородностей. Однако при наличии в среде симметрии относительно обращения времени волна, последовательно рассеиваемая на некоторых неоднородностях, и волна, рассеиваемая на тех же неоднородностях, но проходящая их в обратном порядке, имеют одинаковую фазу [4-9]. При рассеянии назад существенна интерференция между этими волнами.

Существование эффекта усиления рассеяния назад не связано со статистикой неоднородностей, а определяется лишь свойствами среды по отношению к операции обращения времени. Качественно ясно, что все воздействия, нарушающие эту симметрию, будут подавлять эффект. В настоящей работе рассматривается влияние гиротропии среды, вызванной внешним магнитным полем (из-за эффекта Фарадея), на интерференционные эффекты при многократном рассеянии.

1. ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ

Рассмотрим распространение света с частотой $\omega = k_0$ в случайно-неоднородной среде, помещенной во внешнее постоянное и однородное

поле H . Из-за эффекта Фарадея [10] право- и левополяризованные электромагнитные волны в такой среде будут иметь различную фазовую скорость. Выясним, каким образом это обстоятельство влияет на характер распространения света. Рассмотрим случай рэлеевских рассеивателей, т. е. будем считать, что неоднородности показателя преломления создаются точечными (с характерными размерами $a \ll \lambda$) примесями, расположенными совершенно независимо.

Волновое поле E удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} (\bar{\epsilon} E) - \nabla^2 E = 4\pi j, \quad (1)$$

$$\bar{\epsilon}_{ij} = \delta_{ij} - i e_{ijk} h_k + 4\pi \alpha^{np} \delta_{ij} \sum_{a=1}^N \delta(r - r_a),$$

где $j(r, t)$ — плотность источников излучения, r_a — координаты примесей, h_k — вектор гирации ($h \sim H$), α^{np} — поляризуемость примесей.

Усредненное по координатам примесей значение запаздывающей функции Грина уравнения (1) может быть найдено с помощью обычной примесной диаграммной техники [1, 3]. В главном приближении по λ/l это среднее изображается суммой диаграмм без пересечений пунктирных линий. Суммирование таких диаграмм производится обычным образом [1, 3] и дает

$$G_{ij}^R(p, \omega) = \sum_{\alpha=-1}^1 \frac{4\pi P_{ij}^{\alpha}(n)}{(1 + \alpha n h) \omega^2 - p^2 + i k_0 l^{-1}}, \quad (2)$$

где

$$n = p/|p|, \quad P_{ij}^{\alpha}(n) = (1/2) [\bar{\epsilon}_{ij} - n_i n_j + i \alpha e_{ijk} n_k],$$

$$l^{-1} = (8\pi/3) k_0^4 n |\alpha^{np}|^2,$$

l — длина свободного пробега излучения, n — концентрация рассеивателей.

Для изучения переноса энергии волнового поля необходимо вычислить корреляционную функцию

$$\overline{E_i(R + r/2) E_j^*(R - r/2)},$$

компонента Фурье которой по разностной переменной r $I_{ij}(R, q)$ имеет смысл локальной матрицы плотности излучения с волновым вектором q . Для этого следует усреднить по координатам примесей произведение двух функций Грина — запаздывающей G^R и опережающей G^A ($G_{ij}^A(x, x') = G_{ji}^{R*}(x', x)$). В главном приближении по λ/l это среднее изображается суммой лестничных диаграмм, не содержащих пересечений пунктирных линий, сумма таких диаграмм является функцией Грина УПИ [1].

Вывод УПИ с помощью суммирования последовательности лестничных диаграмм подробно описан в литературе (см., например, [1] и литературу в ней), поэтому здесь лишь кратко укажем на отличия, возникающие при учете гиротропии среды. Каждому звену лестницы (см. рисунок на с. 41 в [1]) сопоставляется функция

$$F_{ijk}^0(Rs, R's') = \delta(s - n) \delta(s' - n) \frac{e^{-|R-R'|/l}}{|R-R'|^2} \times \quad (3)$$

$$\times \sum_{\alpha, \beta} P_{ik}^{\alpha}(n) P_{ij}^{\beta}(n) \exp \left[i k_0 h (R - R') \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) \right], \quad n = \frac{R - R'}{|R - R'|},$$

получающаяся из произведения $\bar{G}_{ik}^R(RR_0)\bar{G}_{ij}^A(R'_0 R')$ переходом к приближению Фраунгофера [11] и преобразованием Фурье по разностной переменной. Пунктирной линии сопоставляется величина, пропорциональная коррелятору флуктуаций диэлектрической проницаемости:

$$k_0^4 \bar{\Xi}_{ik}(\mathbf{R}) \bar{\Xi}_{jl}(\mathbf{R}') = (3/8\pi l) \delta_{ik} \delta_{jl} \delta(\mathbf{R} - \mathbf{R}')$$

Уравнение для суммы лестничных диаграмм $F_{ijkl}(\mathbf{R}s, \mathbf{R}'s')$ записывается в виде

$$F_{ijkl}(\mathbf{R}s, \mathbf{R}'s') = F_{ijkl}^0(\mathbf{R}s, \mathbf{R}'s') + \frac{3}{8\pi l} \int_{\mathbf{R}_1 \in \Omega} F_{ijmn}^0(\mathbf{R}s, \mathbf{R}_1s_1) \times \\ \times F_{mnlk}^0(\mathbf{R}_1s'_1, \mathbf{R}'s') d\mathbf{R}_1 ds_1 ds'_1 \quad (4)$$

(Ω — рассеивающий объем) и представляет собой УПИ в интегральной форме. Сечение некогерентного рассеяния $U_{ijkl}(\mathbf{s}, \mathbf{s}')$ объема Ω , содержащего неоднородности, в главном приближении по λ/l выражается через решение уравнения (4) посредством соотношения [5]:

$$U_{ijkl}(\mathbf{s}, \mathbf{s}') = - \int_{\mathbf{R}, \mathbf{R}' \in \Omega} (s \nabla_{\mathbf{R}})(s' \nabla_{\mathbf{R}'}) \{ F_{ijkl}(\mathbf{R}s, \mathbf{R}'s') - \\ - F_{ijkl}^0(\mathbf{R}s, \mathbf{R}'s') \} d\mathbf{R} d\mathbf{R}' \quad (5)$$

Для нахождения главной интерференционной поправки к сечению рассеяния необходимо при вычислении среднего $\overline{G^R G^A}$ учесть наряду с лестничными диаграммами также диаграммы первого порядка малости по λ/l . Ими являются так называемые веерные диаграммы (рис. 1), содержащие максимальное число пересечений пунктирных линий [5].

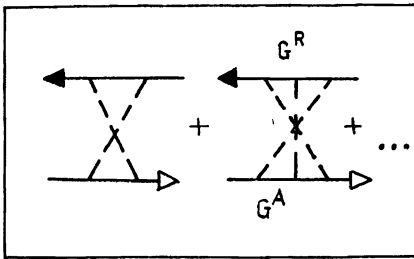


Рис. 1.

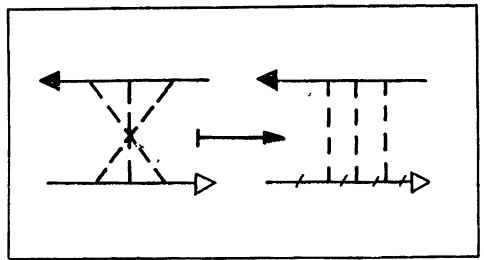


Рис. 2.

Вычисление вклада веерных диаграмм в сечение рассеяния может быть сведено к решению уравнения типа УПИ. Для этого рассмотрим, следуя [5], какую-либо одну из веерных диаграмм (рис. 2). С помощью теоремы взаимности для гиротропной среды [10]

$$G_{ij}^{R(A)}(\mathbf{R}, \mathbf{R}'; \mathbf{h}) = G_{ji}^{R(A)}(\mathbf{R}', \mathbf{R}; -\mathbf{h})$$

преобразуем эту диаграмму, как показано на рисунке (перечеркнутая линия обозначает функцию Грина для среды с обратным направлением вектора \mathbf{h}). Повторяя далее рассуждения, приведенные в [5], получим для интерференционной поправки к сечению для направления рассеяния точно назад* выражение

* Угловое распределение поправки аналогично найденному в [5] для случая рассеяния скалярных волн, и поэтому здесь рассматривается только ее значение для направления рассеяния назад.

$$U_{ijkl}^V(-s, s) = \tilde{U}'_{ilkj}(-s, s), \quad (6)$$

где $\tilde{U}'_{ijkl}(-s, s)$ есть многократная часть сечения рассеяния, вычисленного при помощи уравнения типа (4), но с тем отличием, что в нем вместо функции $F_{ijkl}^0(Rs, R's')$ фигурирует функция

$$\begin{aligned} \tilde{F}_{ijkl}^0(Rs, R's') &= F_{ilkj}^0(Rs, R's') = \\ &= \delta(s - n) \delta(s' - n) \frac{e^{-R-R', |l|}}{|R - R'|^2} \sum_{\alpha, \beta} P_{ik}^\alpha(n) P_{ij}^\beta(n) \times \\ &\times \exp \left[ik_0 h (R - R') \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \right], \quad n = \frac{R - R'}{|R - R'|}. \end{aligned} \quad (7)$$

(В дальнейшем это уравнение именуется вспомогательным УПИ, а относящиеся к нему величины обозначаются значком \sim .) Отметим, что в случае $h=0$ функция \tilde{F}^0 совпадает с функцией F^0 . При этом соотношение (6) с точностью до разницы в обозначениях совпадает с выражением для интерференционной поправки, полученным в [4] без учета гиротропии.

2. ЗАДАЧА АЛЬБЕДО

Рассмотрим случай, когда рассеивающая среда занимает полупространство $z > 0$ и на ее границу падает однородный пучок света с заданной интенсивностью и степенью поляризации (задача альбедро).

Удобно ввести сферическую систему координат, в которой компоненты единичного вектора s , задающего направление распространения света, имеют вид

$$s = (\cos \varphi \sin \theta, \sin \varphi \sin \theta, \cos \theta).$$

Перейдем к представлению параметров Стокса, определив их следующим образом. Матрица плотности $I_{ij}(R, s)$ фактически является матрицей размера 2×2 в базисе из двух векторов, ортогональных s . Выберем следующий базис для каждого s :

$$e_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}} (e \pm i [e \times s]), \quad (8)$$

где

$$e = \partial s / \partial \theta = (\cos \varphi \cos \theta, \sin \varphi \cos \theta, -\sin \theta).$$

Очевидно, что $e^2 = 1$, $es = 0$. Параметры Стокса I_i являются коэффициентами разложения матрицы плотности, записанной в базисе (8), по четырем матрицам Паули [12]:

$$\hat{I}(R, s) = (1/2) \hat{I}_i s^i, \quad \hat{s}^0 = \hat{e}.$$

Параметр I_0 имеет смысл интенсивности светового пучка, I_3 характеризует степень круговой поляризации, а I_1 и I_2 — степень и направление плоскости линейной поляризации. Функция Грина УПИ в этом представлении является матрицей 4×4 .

Уравнение переноса для задачи альбедро целесообразно записать в дифференциальной форме. Для этого подействуем на уравнение (4) оператором, обратным функции $F_{mnkl}^0(Rs, R's')$:

$$\left\{ \left(s \nabla + \frac{1}{l} \right) \delta_{im} \delta_{jn} - ik_0 h s \sum_{\alpha, \beta} \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) P_{im}^\alpha(s) P_{nj}^\beta(s) \right\},$$

перейдем к представлению параметров Стокса и учтем, что в задаче альbedo матрица плотности зависит лишь от координаты z . Окончательно получим

$$\left\{ \mu \frac{d}{dz} + \frac{1}{l} + k_0(\hbar s) \hat{D} \right\} \hat{F}(z, \mu, \varphi; z' \mu' \varphi') =$$

$$= \frac{1}{l} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{d\mu'' d\varphi''}{4\pi} \hat{P}(\mu\varphi, \mu''\varphi'') \hat{F}(z, \mu''\varphi''; z' \mu' \varphi') +$$

$$+ \delta(z - z') \delta(\varphi - \varphi') \delta(\mu - \mu') \hat{E}, \quad (9)$$

где $\mu = s_z$, $\mu' = s'_z$, \hat{E} — единичная матрица 4×4 ,

$$\hat{D} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

а $\hat{P}(\mu\varphi, \mu'\varphi')$ — матрица рассеяния в представлении параметров Стокса, совпадающая с точностью до разницы в обозначениях с найденной в [13]:

$$\hat{P}(\mu\varphi, \mu'\varphi') = \hat{P}^0(\mu\mu') + \hat{P}^{(1)}(\mu\varphi, \mu'\varphi') + \hat{P}^{(2)}(\mu\varphi, \mu'\varphi'),$$

$$\hat{P}^{(0)}(\mu\mu') =$$

$$= \frac{3}{8} \begin{vmatrix} 3 + 3\mu^2\mu'^2 - \mu^2 - \mu'^2 & 1 + 3\mu^2\mu'^2 - 3\mu^2 - \mu'^2 & 0 & 0 \\ 1 + 3\mu^2\mu'^2 - \mu^2 - 3\mu'^2 & 3 + 3\mu^2\mu'^2 - 3\mu^2 - 3\mu'^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4\mu\mu' \end{vmatrix},$$

$$\hat{P}^{(1)}(\mu\varphi, \mu'\varphi') =$$

$$= \frac{3}{2} \sqrt{(1 - \mu^2)(1 - \mu'^2)} \begin{vmatrix} \mu\mu' \cos \psi & \mu\mu' \cos \psi & \mu \sin \psi & 0 \\ \mu\mu' \cos \psi & \mu\mu' \cos \psi & \mu \sin \psi & 0 \\ -\mu' \sin \psi & -\mu' \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \psi \end{vmatrix},$$

$$\hat{P}^{(2)}(\mu\varphi, \mu'\varphi') = \frac{3}{8} \times$$

$$\times \begin{vmatrix} (1 - \mu^2)(1 - \mu'^2) \cos 2\psi & -(1 - \mu^2)(1 + \mu'^2) \cos 2\psi & -2(1 - \mu^2)\mu' \sin 2\psi & 0 \\ -(1 + \mu^2)(1 - \mu'^2) \cos 2\psi & (1 + \mu^2)(1 + \mu'^2) \cos 2\psi & 2(1 + \mu^2)\mu' \sin 2\psi & 0 \\ 2\mu(1 - \mu'^2) \sin 2\psi & -2\mu(1 + \mu'^2) \sin 2\psi & 4\mu\mu' \cos 2\psi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

$$\psi = \varphi - \varphi'.$$

Связь сечения рассеяния в приближении УПИ с решением (9) принимает вид (см. (5))

$$\hat{U}(s, s') = |s_z| |s'_z| \hat{F}(z = 0, s; z' = 0, s').$$

Уравнение для вспомогательной функции Грина \tilde{F} может быть преобразовано аналогично и отличается от (9) заменой

$$\hat{D} \rightarrow \hat{C} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Интерференционная поправка \hat{U}^V выражается через сечение рассеяния \tilde{U} , вычисленное при помощи вспомогательного уравнения, при помощи соотношения (6), которое в представлении параметров Стокса имеет вид

$$U_{ij}^V(-s, s) = (1/4) \text{tr} (\hat{\sigma}^i \hat{\sigma}^k \hat{\sigma}^j \hat{\sigma}^{kT}) U_{kl}(-s, s). \quad (10)$$

К сожалению, уравнение переноса (9) и соответствующее вспомогательное УПИ не удается решить при произвольных значениях h . Однако можно получить их решения в двух предельных случаях: при $h=0$ и при больших h , когда $|h| \gg \lambda/l$. Рассмотрим сначала случай $h=0$.

В отсутствие гиротропии уравнение переноса и вспомогательное УПИ совпадают, поэтому

$$\tilde{U}(-s, s) = \hat{U}(-s, s).$$

Решение задачи альbedo в приближении УПИ при $h=0$ известно [13], и это обстоятельство позволяет сразу найти интерференционную поправку к альbedo. Для направления рассеяния назад ($\mu = -\mu'$, $\varphi = \varphi' + \pi$) решение, полученное в [13], имеет вид

$$U(-\mu', \varphi' + \pi; \mu', \varphi') = \begin{vmatrix} U_{00}(\mu') & U_{01}(\mu') & 0 & 0 \\ U_{10}(\mu') & U_{11}(\mu') & 0 & 0 \\ 0 & 0 & U_{22}(\mu') & 0 \\ 0 & 0 & 0 & U_{33}(\mu') \end{vmatrix}, \quad (11)$$

где

$$U_{00}(\mu) = (3\mu/64\pi)[(\psi(\mu) + \chi(\mu))^2 + 2(\Phi(\mu) + \zeta(\mu))^2 + 4\mu^2(1 - \mu^2)(H^{(1)}(\mu))^2 + (1 - \mu^2)(H^{(2)}(\mu))^2],$$

$$U_{10}(\mu) = U_{01}(\mu) = (3\mu/64\pi)[(\psi^2(\mu) - \chi^2(\mu)) + 2(\Phi^2(\mu) - \zeta^2(\mu)) + 4\mu^2(1 - \mu^2)(H^{(1)}(\mu))^2 - (1 - \mu^2)(H^{(2)}(\mu))^2],$$

$$U_{11}(\mu) = (3\mu/64\pi)[(\psi(\mu) - \chi(\mu))^2 + 2(\Phi(\mu) - \zeta(\mu))^2 + 4\mu^2(1 - \mu^2)(H^{(1)}(\mu))^2 + (1 + \mu^2)^2(H^{(2)}(\mu))^2],$$

$$U_{22}(\mu) = - (3\mu/16\pi)[(1 - \mu^2)(H^{(1)}(\mu))^2 + \mu^2(H^{(2)}(\mu))^2],$$

$$U_{33}(\mu) = - (3\mu/16\pi)[\mu^2 H_V^2(\mu) + (1 - \mu^2) H_r^2(\mu)],$$

а $\psi(\mu)$, $\chi(\mu)$, $\Phi(\mu)$, $\zeta(\mu)$, $H^{(1)}(\mu)$, $H^{(2)}(\mu)$, $H_V(\mu)$ и $H_r(\mu)$ — функции, найденные и протабулированные в [13], § 71 (см. также табл. 1). В приближении однократного рассеяния

$$U_{10}^{(1)}(\mu) = U_{01}^{(1)}(\mu) = 0,$$

$$U_{00}^{(1)}(\mu) = U_{11}^{(1)}(\mu) = -U_{22}^{(1)}(\mu) = -U_{33}^{(1)}(\mu) = 3\mu/16\pi$$

и по формуле (10) для отличных от нуля матричных элементов интерференционной поправки к сечению рассеяния назад получим

$$U_{10}^V(\mu) = (1/2)[U_{00}(\mu) + U_{11}(\mu) - U_{22}(\mu) + U_{33}(\mu) - 3\mu/8\pi],$$

$$U_{10}^V(\mu) = U_{01}^V(\mu) = U_{10}(\mu), \quad (12)$$

$$U_{11}^V(\mu) = (1/2)[U_{00}(\mu) + U_{11}(\mu) + U_{22}(\mu) - U_{33}(\mu) - 3\mu/8\pi],$$

$$U_{22}^V(\mu) = (1/2)[-U_{00}(\mu) + U_{11}(\mu) + U_{22}(\mu) + U_{33}(\mu) + 3\mu/8\pi],$$

$$U_{33}^V(\mu) = (1/2)[U_{00}(\mu) - U_{11}(\mu) + U_{22}(\mu) + U_{33}(\mu) + 3\mu/8\pi].$$

Наибольший интерес представляет интенсивность рассеиваемого света при падении естественного (неполяризованного) излучения, определяющаяся матричным элементом U_{00} . Значения U_{00} и U_{10}^V для направления рассеяния назад как функции косинуса угла падения μ приводятся в табл. 2.

Для определения вида решения при больших \hbar рассмотрим диаграммы, возникающие при вычислении функции Грина УПИ F (или функции Грина вспомогательного УПИ \tilde{F}) по теории возмущений по кратности рассеяния. Типичная диаграмма в \mathbf{R} -пространстве изображена на рис. 3. Каждому звену этой диаграммы соответствует функция $F_{ijkl}^0(\mathbf{R}s, \mathbf{R}'s')$ (или же $\tilde{F}_{ijkl}^0(\mathbf{R}s, \mathbf{R}'s')$), по координатам промежуточных точек производится интегрирование. При $|\hbar| \gg \lambda/l$ зависящие от \hbar слагаемые в выражениях (3) и (7) для F^0 и \tilde{F}^0 являются быстро осциллирующими функциями координат. Интегралы от таких слагаемых малы по сравнению с интегралами от слагаемых, не зависящих от \hbar . Таким образом, при вычислении $F_{ijkl}(\mathbf{R}s, \mathbf{R}'s')$ (или $\tilde{F}_{ijkl}(\mathbf{R}s, \mathbf{R}'s')$) можно пренебречь вкладом зависящих от \hbar слагаемых при условии $|\hbar s|, |\hbar s'| \gg \lambda/l$ (из-за наличия δ -функции от направления в выражениях (3) и (7) для F^0 и \tilde{F}^0 направления векторов $\mathbf{R}' - \mathbf{R}_1$ и $\mathbf{R} - \mathbf{R}_N$ на рис. 3 фиксированы, и следует потребовать также большой величины модуля проекции \hbar на эти направления).

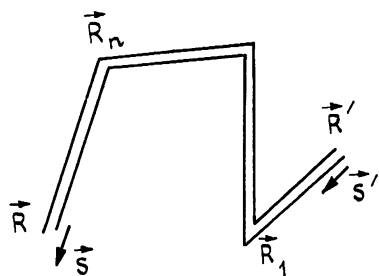


Рис. 3.

Рассмотрим подробнее вычисление функции Грина УПИ. В представлении параметров Стокса ядро (3) имеет ненулевые матричные элементы $F_{00}^0, F_{11}^0, F_{12}^0, F_{21}^0, F_{22}^0$ и F_{33}^0 , причем F_{00}^0 и F_{33}^0 не зависят от \hbar , а остальные являются осциллирующими функциями $(\hbar\mathbf{R})$. Поэтому можно сказать, что параметры Стокса I_1 и I_2 в сильно гиротропной среде «не распространяются». Это означает, что все матричные элементы функции Грина УПИ \hat{F} , находящиеся в первых и вторых строках и столбцах, в рассматриваемом приближении нулевые. Остальные могут быть объединены в двухрядную матрицу \hat{F}^∞ :

$$\hat{F}^\infty = \begin{vmatrix} F_{00} & F_{03} \\ F_{30} & F_{33} \end{vmatrix},$$

удовлетворяющую уравнению

$$\left(\mu \frac{d}{dz} + \frac{1}{l}\right) \hat{F}^\infty(z\mu\varphi, z'\mu'\varphi') = \frac{1}{l} \int \frac{d\mu'' d\varphi''}{4\pi} \times \quad (13)$$

$$\times \hat{P}^\infty(\mu\varphi, \mu''\varphi'') \hat{F}^\infty(z\mu''\varphi'', z'\mu'\varphi') + \delta(\mu - \mu') \delta(\varphi - \varphi') \delta(z - z') \hat{E},$$

где \hat{E} — единичная масса 2×2 , а матрица рассеяния $\hat{P}^\infty(\mu\varphi, \mu'\varphi')$ получается из матрицы $\hat{P}(\mu\varphi, \mu'\varphi')$ вычеркиванием первых и вторых столбцов и строк.

Матрица $\hat{P}^\infty(\mu\varphi, \mu'\varphi')$ диагональна, и уравнение (13) сводится к двум скалярным УПИ для элементов F_{00} и F_{33} . Первое из них представляет собой УПИ для случая рассеяния с угловой функцией Рэлея $(3/4)(1 + \cos^2 \Theta)$, где Θ — угол между векторами \mathbf{s} и \mathbf{s}' , второе — для случая рассеяния с угловой функцией $(3/2)\cos \Theta$. Задача альбеда для них решена в [13] (см. § 44 и 69).

Далее рассмотрим вычисление функции Грина вспомогательного УПИ \tilde{F} . Отличие этого случая от рассмотренного состоит в том, что «нераспространяющимися» являются параметры Стокса \tilde{I}_0 и \tilde{I}_3 . Соответственно для матрицы

$$\hat{\tilde{F}}^\infty = \begin{vmatrix} \tilde{F}_{11} & \tilde{F}_{12} \\ \tilde{F}_{21} & \tilde{F}_{22} \end{vmatrix}$$

получим уравнение

$$\left(\mu \frac{d}{dz} + \frac{1}{l}\right) \hat{\tilde{F}}^\infty(z\mu\varphi, z'\mu'\varphi') = \frac{1}{l} \int \frac{d\mu'' d\varphi''}{4\pi} \times \quad (14)$$

$$\times \hat{\tilde{P}}^\infty(\mu\varphi, \mu''\varphi'') \hat{\tilde{F}}^\infty(z\mu''\varphi'', z'\mu'\varphi') + \delta(\mu - \mu') \delta(\varphi - \varphi') \delta(z - z') \hat{E},$$

где матрица рассеяния $\hat{\tilde{P}}^\infty(\mu\varphi, \mu'\varphi')$ получается из $\hat{P}(\mu\varphi, \mu'\varphi')$ вычеркиванием нулевых и третьих столбцов и строк.

Явный вид $\hat{\tilde{P}}^\infty(\mu\varphi, \mu'\varphi')$ следующий:

$$\tilde{P}^\infty(\mu\varphi, \mu'\varphi') = \tilde{P}^{(0)\infty}(\mu, \mu') + \tilde{P}^{(1)\infty}(\mu\varphi, \mu'\varphi') + \tilde{P}^{(2)\infty}(\mu\varphi, \mu'\varphi'),$$

$$\tilde{P}^{(0)\infty}(\mu, \mu') = \frac{9}{8} (1 - \mu^2)(1 - \mu'^2) \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad (15)$$

$$\tilde{P}^{(1)\infty}(\mu\varphi, \mu'\varphi') = \frac{3}{2} \sqrt{(1 - \mu^2)(1 - \mu'^2)} \begin{vmatrix} \mu\mu' \cos \psi & \mu \sin \psi \\ -\mu' \sin \psi & \cos \psi \end{vmatrix},$$

$$\tilde{P}^{(2)\infty}(\mu\varphi, \mu'\varphi') = \frac{3}{8} \begin{vmatrix} (1 + \mu^2)(1 + \mu'^2) \cos 2\psi & 2(1 + \mu^2)\mu' \sin 2\psi \\ -2\mu(1 + \mu'^2) \sin 2\psi & 4\mu\mu' \cos 2\psi \end{vmatrix},$$

$$\psi = \varphi - \varphi'.$$

Будем искать решение уравнения (14) в виде

$$\tilde{F}^\infty(z\mu\varphi, z'\mu'\varphi') = \frac{1}{\mu'} \Theta(z - z') \exp\left[-\frac{(z - z')}{\mu'l}\right] \hat{E} + \quad (16)$$

$$+ \sum_{i=0}^2 g^{(i)}(z\mu, z'\mu') \tilde{P}^{(i)\infty}(\mu\varphi, \mu'\varphi').$$

(Первый член в (16) отвечает ослабленному прошедшему излучению). Подставив (16) в (14) и используя непосредственно проверяемые соотношения

$$\tilde{P}^{(0)\infty}(\mu, \mu'') \tilde{P}^{(0)\infty}(\mu'', \mu') = (3/32)(1 - \mu''^2)^2 \tilde{P}^{(0)\infty}(\mu, \mu'),$$

$$\int \frac{d\varphi''}{4\pi} \tilde{P}^{(1)\infty}(\mu\varphi, \mu''\varphi'') \tilde{P}^{(1)\infty}(\mu''\varphi'', \mu'\varphi') = \frac{3}{8} (1 - \mu''^4) \tilde{P}^{(1)\infty}(\mu\varphi, \mu'\varphi'),$$

$$\int \frac{d\varphi''}{4\pi} \tilde{P}^{(2)\infty}(\mu\varphi, \mu''\varphi'') \tilde{P}^{(2)\infty}(\mu''\varphi'', \mu'\varphi') = \frac{3}{32} (1 + 6\mu''^2 + \mu''^4) \tilde{P}^{(2)\infty}(\mu\varphi, \mu'\varphi'),$$

сведем задачу к решению трех скалярных уравнений для функций $g^{(l)}(z\mu, z'\mu')$:

$$\left(\mu \frac{d}{dz} + \frac{1}{l}\right) g^{(l)}(z\mu, z'\mu') = \frac{1}{l} \int_{-1}^1 d\mu'' \Psi^{(l)}(\mu'') g^{(l)}(z\mu'', z'\mu') + \frac{1}{4\pi l \mu'} \exp[-(z - z')/\mu' l] \theta(z - z'), \quad (17)$$

где

$$\Psi^{(0)}(\mu) = \frac{9}{16} (1 - \mu^2)^2, \quad \Psi^{(1)}(\mu) = \frac{3}{8} (1 - \mu^4),$$

$$\Psi^{(2)}(\mu) = \frac{3}{32} (1 + 6\mu^2 + \mu^4). \quad (18)$$

Уравнения типа (17) часто встречаются в теории переноса излучения и подробно исследованы. В частности, в [13] показано, что интересующие нас величины $g^{(l)}(z\mu, z'\mu')$ при $z = z'$, $\mu < 0$ и $\mu' > 0$ выражаются через H -функции Чандрасекара — Амбарцумяна. Пользуясь проведенным в [13] анализом, выпишем ответ для вспомогательного сечения рассеяния \tilde{U} :

$$\tilde{U}(-\mu, \varphi; \mu_0\varphi_0) = \frac{\mu\mu_0}{4\pi(\mu + \mu_0)} \sum_{i=0}^2 \tilde{P}^{(i)\infty}(-\mu, \varphi, \mu_0\varphi_0) H^{(i)}(\mu) H^{(i)}(\mu_0), \quad (19)$$

где функции $H^{(i)}(\mu)$ являются единственными решениями уравнений

$$H^{(i)}(\mu) = 1 + \mu H^{(i)}(\mu) \int_0^1 \frac{d\mu' \Psi^{(i)}(\mu') H^{(i)}(\mu')}{\mu + \mu'}, \quad (20)$$

в которых характеристические функции $\Psi^{(i)}(\mu)$ определяются соотношением (18) (не смешивать с одноименными функциями, введенными в [13]).

Уравнения (20) могут быть решены численно. Алгоритм решения подробно описан в [13]. Значения $H^{(i)}(\mu)$ приводятся в табл. 1.

В приближении однократного рассеяния сечение $\tilde{U}(-\mu\varphi, \mu_0\varphi_0)$ дается формулой (19), в которой следует положить $H^{(i)}(\mu) = 1$. Поэтому для искомой величины — многократной части вспомогательного сечения рассеяния для направления назад получим

$$\tilde{U}'(-\mu, \varphi + \pi; \mu\varphi) = \left\| \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a(\mu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b(\mu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\|, \quad (21)$$

где

$$a(\mu) = (3\mu/16\pi) \left\{ \frac{3}{4} (1 - \mu^2)^2 ([H^{(0)}(\mu)]^2 - 1) - \right. \\ \left. - \mu^2 (1 - \mu^2) ([H^{(1)}(\mu)]^2 - 1) + \frac{1}{4} (1 + \mu^2)^2 [(H^{(2)}(\mu))^2 - 1] \right\}, \\ b(\mu) = (3\mu/16\pi) \{- (1 - \mu^2) [(H^{(1)}(\mu))^2 - 1] + \mu^2 [(H^{(2)}(\mu))^2 - 1]\}.$$

Т а б л и ц а 1

μ	$H^{(0)}$	$H^{(1)}$	$H^{(2)}$
0,00	1,0000	1,0000	1,0000
0,05	1,0834	1,0647	1,0343
0,10	1,1320	1,1053	1,0607
0,15	1,1691	1,1375	1,0838
0,20	1,1993	1,1645	1,1043
0,25	1,2248	1,1877	1,1230
0,30	1,2465	1,2081	1,1400
0,35	1,2655	1,2262	1,1556
0,40	1,2823	1,2424	1,1701
0,45	1,2972	1,2571	1,1836
0,50	1,3107	1,2705	1,1961
0,55	1,3228	1,2826	1,2078
0,60	1,3339	1,2939	1,2188
0,65	1,3440	1,3043	1,2292
0,70	1,3533	1,3139	1,2389
0,75	1,3618	1,3229	1,2481
0,80	1,3697	1,3312	1,2568
0,85	1,3771	1,3390	1,2651
0,90	1,3839	1,3463	1,2729
0,95	1,3903	1,3532	1,2803
1,00	1,3963	1,3597	1,2874

Соответственно для интерференционной поправки к альбедо сильно гиротропной среды по формуле (10) получим

$$U^V(-\mu, \varphi + \pi, \mu\varphi) = \\ = \frac{1}{2} \left\| \begin{array}{ccc} a(\mu) - b(\mu) & 0 & 0 \\ 0 & a(\mu) + b(\mu) & 0 \\ 0 & 0 & a(\mu) + b(\mu) \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right\|, \quad (22)$$

(Напомним, что критерий применимости полученного результата есть $hs \mid \gg \lambda/l$.)

Величины $U_{00}(\mu)$ и $U_{00}^V(\mu)$ при $h = 0$ и $|\mathbf{h}| \gg \lambda/l$ приводятся в табл. 2.

Следует отметить, что равенство $U_{00}^V(1) = 0$ является точным, так как при нормальном падении из-за аксиальной симметрии задачи параметры Стокса \tilde{I}_1 и \tilde{I}_2 в уравнении (14) эквивалентны и $\tilde{U}_{11}(1) = \tilde{U}_{22}(1)$.

Физический смысл полученных результатов состоит в следующем. При распространении света в случайно-неоднородной среде происходит быстрая (на расстояниях порядка l) деполаризация излучения. Поэтому результаты решения четырехкомпонентного УПИ (9) при $h = 0$ и скалярного УПИ с угловой функцией Рэля отличаются слабо, и, как

видно из табл. 2, сечение рассеяния в приближении УПИ U_{00} слабо зависит от гиротропии. Интерференционная поправка к сечению оказывается сильно зависящей от гиротропии среды, так как магнитное поле, нарушая инвариантность относительно обращения времени, нарушает равенство фаз прямой и обратной волн. Однако симметрия по отношению к преобразованию, состоящему в одновременном изменении знака t и пространственной инверсии, сохраняется и в магнитном поле. Преобразование инверсии изменяет состояние поляризации циркулярно поляризованной волны на противоположное. Поэтому фазы процессов рассеяния, связанных операцией обращения времени с одновременным изменением на противоположные состояния поляризации, совпадают и в магнитном поле. По этой причине даже при рассеянии в сильно гиротропной среде интерференционные эффекты не подавляются полностью, хотя численно интерференционный пик в сечении рассеяния значительно меньше, чем при $\hbar = 0$.

Таблица 2

μ	U_{00}		U_{00}^V	
	$\hbar = 0$	$\hbar \rightarrow \infty$	$\hbar = 0$	$\hbar \rightarrow \infty$
0,00	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
0,05	0,00377	0,00364	0,00071	0,00042
0,10	0,00888	0,00841	0,00257	0,00136
0,15	0,01529	0,01431	0,00547	0,00265
0,20	0,02301	0,02137	0,00936	0,00415
0,25	0,03209	0,02966	0,01424	0,00576
0,30	0,04257	0,03923	0,02011	0,00738
0,35	0,05448	0,05017	0,02696	0,00892
0,40	0,06788	0,06255	0,03482	0,01030
0,45	0,08282	0,07643	0,04370	0,01144
0,50	0,09935	0,09190	0,05360	0,01230
0,55	0,11753	0,10303	0,06458	0,01279
0,60	0,13741	0,12790	0,07664	0,01290
0,65	0,15905	0,14858	0,08985	0,01259
0,70	0,18251	0,17115	0,10422	0,01185
0,75	0,20716	0,19570	0,11981	0,01069
0,80	0,23377	0,22228	0,13628	0,00912
0,85	0,26445	0,25099	0,15480	0,00719
0,90	0,29583	0,28190	0,17430	0,00496
0,95	0,32937	0,31510	0,19523	0,00253
1,00	0,36513	0,35066	0,21762	0,00000

В заключение определим условия, при которых реализуется рассмотренный в работе случай сильной гиротропии. В качестве простого конкретного примера рассмотрим рассеяние света в парах ртути на частотах, близких к частоте резонансной флуоресценции $\lambda = 2537 \text{ \AA}$ (переход $^3P_1 \rightarrow ^1S_0$). Основное состояние 1S_0 атома ртути является невырожденным, и угловая зависимость рассеяния описывается функцией Рэлея [14]. Из возбужденного состояния 3P_1 дипольными правилами отбора разрешен переход только в состояние 1S_0 , поэтому рассеянием с изменением частоты можно пренебречь.

В резонансной области сечение рассеяния σ и поляризуемость атома α порядка [14]

$$\sigma \sim \frac{d_{n1}^4 \omega^4 / \hbar^2 c^4}{(\omega_{n1} - \omega)^2 + \Gamma_n^2 / 4}, \quad \alpha \sim \frac{d_{n1}^2 / \hbar}{\omega_{n1} - \omega - i\Gamma_n / 2}, \quad (23)$$

где ω_{n1} и Γ_n — частота и ширина линии резонансного перехода, d_{n1} — величина порядка соответствующего матричного элемента дипольного

момента. Эффект Фарадея связан с зеemanовским расщеплением уровней атомов ртути, и величина h может быть оценена по формуле Беккереля:

$$|h| \sim (\partial/\partial\omega)(\text{Re } \Xi(\omega))(eH/mc),$$

$$\Xi(\omega) = 1 + 4\pi n\alpha(\omega). \quad (24)$$

Используя (23) и (24), перепишем критерий сильной гиротропии $|h| \gg \lambda/l \sim \lambda n\sigma$ в виде $H \gg m\omega^3 d_{1n}^2 / e\hbar c^2$. Порядок величины d_{1n} может быть оценен по радиационной ширине линии перехода ${}^3P_1 \rightarrow {}^1S_0$ $d_{1n}^2 \omega^3 / \hbar c^3 \sim \sim \tau_0^{-1} = 1,1 \cdot 10^7 \text{ c}^{-1}$ [15]. Соответственно получим $H \gg mc/\epsilon\tau_0 \sim 12 \text{ Э}$.

Таким образом, критерий $|h| \gg \lambda/l$ в рассматриваемом случае оказывается весьма нежестким. При этом сечение рассеяния σ достаточно велико и оптически плотные среды могут быть реализованы на практике. Так, при $|\omega_{1n} - \omega| \sim 10^{11} \text{ c}^{-1}$, что соответствует отклонению длины волны рассеиваемого света от резонансной на величину $\Delta\lambda \sim 0,1 \text{ \AA}$, сечение рассеяния $\sigma \sim 10^{-18} \text{ см}^2$. В парах ртути с давлением 10 мм рт. ст. ($t = 185^\circ\text{C}$) концентрация атомов $\sim 2 \cdot 10^{17} \text{ см}^{-3}$ и длина свободного пробега l оказывается порядка нескольких сантиметров.

Автор благодарен Д. Е. Хмельницкому за руководство работой.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рытов С. М., Кравцов Ю. А., Татарский В. И. Случайные поля. Ч. II.— М.: Наука, 1978.
2. Исимару А. Распространение и рассеяние волн в случайно-неоднородных средах. Т 2— М.: Мир, 1981.
3. Абрикосов А. А., Горьков Л. П., Дзялошинский И. Е.— Методы квантовой теории поля в статистической физике.— М.: Атомиздат, 1962.
4. Watson К. М.— J. Math. Phys., 1969, 10, p. 688.
5. Барабаненков Ю. Н.— Изв. вузов — Радиофизика, 1973, 16, с. 88.
6. de Wolf D. A.— IEEE Trans, 1971, AP-19, p. 254.
7. Виноградов А. Г., Кравцов Ю. А., Татарский В. И.— Изв. вузов — Радиофизика, 1973, 16, с. 1064.
8. Виноградов А. Г., Кравцов Ю. А.— Изв. вузов—Радиофизика, 1973, 16, с. 1055.
9. Кравцов Ю. А., Санчев А. И.— УФН, 1982, 137, с. 501.
10. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.— Электродинамика сплошных сред.— М.: Наука, 1982.
11. Барабаненков Ю. Н., Финкельберг В. М.— ЖЭТФ, 1967, 53, с. 978.
12. Розенберг Г. В.— УФН, 1955, 56, с. 77.
13. Чандрасекар С.— Перенос лучистой энергии — М.: ИЛ, 1953
14. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.— Квантовая электродинамика.— М.: Наука, 1980.
15. Прингсгейм П.— Флуоресценция и фосфоресценция.— М.: ИЛ, 1951.

Институт теоретической физики
АН СССР

Поступила в редакцию
27 июня 1983 г.

THE INTERFERENCE CORRECTION TO THE ALBEDO OF A STRONGLY GYROTROPIC MEDIUM

A. A. Golubentsev

The interference effect of increasing of backward scattering in light propagation in randomly nonuniform medium is considered. It is shown that the gyrotropy of the medium, caused by the external magnetic field, suppresses partially the effect. The interference correction to the albedo is obtained in the limit of strong gyrotropy.