ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XXVII, № 6 РАДИОФИЗИКА 1984

УДК 533 951

ЭНЕРГИЯ И ПОТОК ЭНЕРГИИ ВОЛН С КОМПЛЕКСНОЙ ФАЗОЙ В СРЕДАХ С «ОКНОМ ПРОЗРАЧНОСТИ»

С. П. Ефимов, Л. А. Юдин

В средах с частотным интервалом прозрачности рассмотрены неустойчивые в пространстве и во времени продольные волны Найдены выражения для плотности и потока энергии этих волн без ограничения на величину инкремента. Показано, что если процесс нарастает только во времени, то выражение для плотности энергии равно нулю.

Развитие линейной теории неустойчивости в физике пучков заряженных частиц привело к понятию волн отрицательной энергии [1], в настоящее время весьма полезному при описании различных режимов генерации. Такие волны, взаимодействуя с волнами замедляющей структуры в системе без потерь энергии, при определенных условиях могут иметь комплексные значения волнового числа h, если частота ω фиксирована, или же комплексное значение ω при действительном h. Можно представить ситуацию, в которой одновременно комплексны как ω, так и h. Такие значения имеют, например, волны в волноводе с пучком после прохождения им некоторых резонансных структур. Комплексные значения ω и h соответствуют неустойчивому режиму. В связи с расчетом генерации подобных волн нужно знать их энергию или поток энергии, поскольку амплитуды возбуждения обратно пропорциональны той или другой величине в зависимости от того, какая рассматривается задача— пространственная или временная [2].

Если частота $\omega=\omega'+i\omega''$ комплексна, а постоянная распространения h действительна, то для замкнутой системы без диссипации можно провести следующее рассуждение об энергии W (на единицу длины волновода). Поскольку поля нарастают экспоненциально во времени ($\omega''>0$), то в силу консервативности рассматриваемой системы плотность энергии не может возрастать только в том случае, когда она строго равна нулю. Такая «волна нулевой энергии» может переносить мощность в волноводе, если ее формально определенная скорость (в смысле переноса средней плотности энергии) бесконечна. Важное свойство $W=0$, характерное для неустойчивых волн в замкнутой системе, отмечалось ранее без вывода его из дисперсионного уравнения [3, 4].

В настоящей работе сделана попытка обобщить известную формулу для энергии и ее потока в среде с пространственной дисперсией, задавая диэлектрическую проницаемость среды $\varepsilon(\omega, h)$ [5]. Для простоты мы ограничимся рассмотрением продольных волн, описываемых дисперсионным уравнением

$$\varepsilon(\omega, h)=0.$$

Правильное выражение для энергии должно обращаться в нуль в отсутствие источников в случае, когда ω комплексно, а h-действительно (ω и h связаны указанным дисперсионным уравнением).

Поскольку любая среда при описании ее с помощью проницаемости $\varepsilon(\omega, h)$ обладает поглощением на действительной оси [5], здесь рас-

сматриваются среды, имеющие «окно прозрачности», когда в некоторой области действительных значений ω, h проницаемость $\varepsilon(\omega, h)$ чисто действительна. Для такого типа сред оказывается возможным установить выражения для потока энергии $\boldsymbol{S}$ и энергии волн W при комплексных значениях ω, h, действительные части которых лежат в области прозрачности.

Здесь следует заметить, что выражения для плотностей W и $\boldsymbol{S}$ не определяются однозначно в электродинамике из баланса энергии (см., например, [6]). В данной работе предлагается одно из возможных выражений с помощью формального разбиения среды на «осцилляторы».

1. Волны нулевой энергии. Баланс мощности неустойчивых волн. Энергию волнового процесса можно разбить на две части: неосциллирующую (пропорциональную $\exp(2\omega'' t)$) и осциллирующую. Первая компонента является определяющей, когда инкременты и частота огибающей малы по сравнению с несущей частотой. Вторая существенна для медленно осциллирующих процессов. Остановимся вначале на первой из них.

При выводе классической формулы для энергии поля в диспергирующей среде [5, 7] вместо узких пакетов общего вида достаточно, как было замечено в [8], рассмотреть волну с комплексной частотой ω, а затем устремить $\operatorname{Im}\omega$ к нулю. В отсутствие внешних источников энергетический баланс, вытекающий из уравнений макроскопической электродинамики, для продольных волн дает

$$\frac{dW}{dt} = \frac{1}{4\pi} E \frac{\partial D}{\partial t} = \frac{\operatorname{Im}(\omega\varepsilon)}{8\pi} |E|^2, \tag{1}$$

где отброшены двойные (по ω') гармоники, а поле E содержит фазовый множитель $\exp^{-i\omega t}$. Подчеркнем, что соотношение (1) не предполагает малости мнимой части ω''. Учитывая, что плотность энергии в гармонической волне пропорциональна множителю $\exp(2\omega'' t)$, получаем выражение

$$W = \frac{\operatorname{Im}(\omega\varepsilon)}{\operatorname{Im}\omega} \frac{|E|^2}{16\pi} \quad (h'' = 0), \tag{2а}$$

которое совпадает, как можно заметить, с допредельным в [8, 9]. Для продольных собственных волн (без возбуждающих источников) из дисперсионного уравнения $\varepsilon = 0$ непосредственно следует, что в неустойчивом режиме волны имеют нулевую энергию.

Аналогично (2а) при $\omega''=0$ и комплексных значениях h баланс мощности позволяет найти выражение для плотности потока энергии S:

$$S = -\frac{\operatorname{Im}(\omega\varepsilon)}{\operatorname{Im} h} \frac{|E|^2}{16\pi} \quad (\omega'' = 0), \tag{2б}$$

откуда следует, что для таких неустойчивых процессов $S = 0$.

В общем случае отличных от нуля ω'', h'' баланс мощности дает

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial z} = 2\omega'' W - 2h'' S = \frac{\operatorname{Im}(\omega\varepsilon)}{8\pi} |E|^2. \tag{3}$$

Соотношение (3), рассматриваемое как уравнение в некоторой области ω и h, не определяет однозначно W и S. Добавив к найденным значениям функции $h''\Phi$ и $\omega''\Phi$ соответственно, можно получить новое реше-

ние. В частности, формальным решением (3) является пара функций: $W = \frac{\operatorname{Im}(\omega\varepsilon)}{\omega''}\frac{|E|^2}{16\pi}$, $S=0$, что при $\omega''=0$, $h''\neq 0$ физически бессмысленно. Аналогичная ситуация возникает для осциллирующих составляющих энергии и ее потока. Обозначим комплексные амплитуды этих величин через $W_\sim$ и $S_\sim$, так что $W_{\text{osc}} = \operatorname{Re}(W_\sim e^{-2i(\omega t - hz)})$, $S_{\text{osc}} = \operatorname{Re}(S_\sim e^{-2i(\omega t - hz)})$. Баланс мощности для них имеет вид

$$\operatorname{Re}(-2i\omega W_\sim + 2ihS_\sim) = (1/8\pi)\operatorname{Re}(-i\omega\varepsilon E^2). \tag{4}$$

Даже при действительных значениях ω и h равенство (4) не определяет $W_\sim$ и $S_\sim$.

Таким образом, баланс мощности не позволяет получить выражения для W и S, соответствующие волне с комплексной фазой, и необходимо привлечь дополнительные соображения.

2. **Осцилляторная среда**. Попытаемся выразить энергию и поток энергии в среде, описываемой проницаемостью

$$\varepsilon(\omega, h) = 1 - \omega_p^2[(\omega - hu)^2 - \omega_0^2]^{-1}. \tag{5}$$

Такая среда состоит из движущихся осцилляторов, плотность которых n_0, частота собственных колебаний ω_0, плазменная частота $\omega_p^2 = 4\pi n_0 e^2/m$. Скорость осцилляторов u. Продольные колебания, соответствующие проницаемости (5), описываются уравнениями

$$\begin{gathered}\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = \frac{e}{m}E, \quad v = \frac{dx}{dt} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial z}\right)x, \\ \frac{dn}{dt} + n_0\frac{\partial v}{\partial z} = 0, \quad j = e(n_0 v + nu),\end{gathered} \tag{6}$$

где электрическое поле E и смещение зарядов x направлены вдоль оси z.

Переходя от макроскопического описания (5) к микроскопическому (6) в такой модели, можно получить выражения для плотностей энергии и ее потока:

$$W = (E^2/8\pi) + mn_0(v^2 + \omega_0^2 x^2)/2 + mnuv, \quad S = u(n_0 mv^2 + nmuv), \tag{7}$$

в которых уже не предполагается, что поле есть гармоническая волна. В выражении (7), если они приняты для расчета W и S, можно подставить любое решение уравнений (6), в том числе и волну с комплексными значениями ω, h. Простое вычисление этих величин приводит к следующим выражениям:

$$\begin{gathered}W = \frac{|E|^2}{16\pi}\left\{1 + \frac{\omega_p^2}{|\Delta\omega^2 - \omega_0^2|^2}(|\omega|^2 - u^2|h|^2 + \omega_0^2)\right\}, \\ S = \frac{|E^2}{16\pi}u\frac{\omega_p^2}{|\Delta\omega^2 - \omega_0^2|^2}(|\omega|^2 - u^2|h|^2 + |\Delta\omega|^2),\end{gathered} \tag{8}$$

где $\Delta\omega = \omega - hu$. Не очевидным является тот факт, что функции (8) можно линейно связать с проницаемостью (5).

С целью проверки подобного утверждения рассмотрим следующие преобразования произвольной функции $f(\omega, h)$:

$$\langle f(\omega, h)\rangle_{\mathrm{Re}} = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(\omega'\alpha + i\omega'', \quad h'\alpha + ih'')\, d\alpha; \tag{9а}$$

$$\langle f(\omega, h)\rangle_{\mathrm{Im}} = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(\omega' + i\omega''\alpha, \quad h' + ih''\alpha)\, d\alpha, \tag{9б}$$

которые являются специфическими усреднениями ее по действительной или мнимой частям (ω, h), соответственно. Используя преобразования (9), формулы (2) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} W &= \frac{|E|^2}{16\pi}\frac{\partial}{\partial\omega'}\langle\omega\varepsilon\rangle_{\mathrm{Im}} \qquad \text{при } h'' = 0, \\ S &= -\frac{|E|^2}{16\pi}\frac{\partial}{\partial h'}\langle\omega\varepsilon\rangle_{\mathrm{Im}} \qquad \text{при } \omega'' = 0, \end{aligned} \tag{10}$$

по структуре они аналогичны известным формулам макроскопической электродинамики при действительных ω, h, если в них вместо $\omega\varepsilon$ подставить $\langle\omega\varepsilon\rangle_{\mathrm{Im}}$.

Непосредственная проверка показывает, что с помощью преобразований (9) энергия и ее поток (8) выражаются через $\varepsilon(\omega, h)$ следующим образом*:

$$\begin{aligned} W &= (|E|^2/16\pi)\,(\partial/\partial\omega'\,\langle\omega\varepsilon\rangle_{\mathrm{Im}} + h''\partial/\partial h''\,(\langle\varepsilon\rangle_{\mathrm{Im}} + \langle\varepsilon\rangle_{\mathrm{Re}})), \\ S &= (|E|^2/16\pi)\,(-\partial/\partial h'\,\langle\omega\varepsilon\rangle_{\mathrm{Im}} + \omega''\partial/\partial h''\,(\langle\varepsilon\rangle_{\mathrm{Im}} + \langle\varepsilon\rangle_{\mathrm{Re}})). \end{aligned} \tag{11}$$

В формулах (11) не содержатся параметры среды: ω_p, ω_0, u, что позволит ниже обобщить их на класс сред с «окном прозрачности».

Формулы для осциллирующих частей W_{osc} и S_{osc} более просты и не содержат операций (9):

$$W_{\sim} = \frac{E^2}{16\pi}\frac{\partial}{\partial h'}(h\varepsilon), \qquad S_{\sim} = \frac{E^2}{16\pi}\frac{\partial}{\partial h'}(\omega\varepsilon). \tag{12}$$

Для чисто апериодических процессов $(\omega'' = h'' = 0)$ выражения (11) и (12) совпадают.

В выражения (11) проницаемость среды входит линейно. Поскольку для суперпозиции сред проводимости суммируются, то формула остается в силе для непрерывного набора сред вида (5) с различными значениями ω_p, ω_0, u.

Убедимся непосредственным вычислением, что величины (11) удовлетворяют балансу мощности (3). Для вторых слагаемых в (11) это очевидно Для первых используем соотношение

$$\mathrm{Im}\,(\omega\varepsilon) = \frac{(\omega\varepsilon)|_{\omega,h} - (\omega\varepsilon)|_{\omega^*,h^*}}{2i} = \int_{-1}^{1}\frac{\partial}{\partial\alpha}(\omega\varepsilon)\Big|_{\omega'+i\alpha\omega'',\, h'+i\alpha h''} d\alpha. \tag{13}$$

В силу дисперсионного уравнения для продольных волн $(\varepsilon = 0)$, левая часть (13) равна нулю, а правая, после дифференцирования по α, дает

---

* Нетрудно убедиться, что для плазмоподобных сред $(\varepsilon(\omega, h) = 1 - \omega_p^2/\Delta\omega^2)$ вторые слагаемые в формулах (11) обращаются в нуль.

комбинацию величин, пропорциональных $\partial/\partial\omega'\langle\omega\varepsilon\rangle_{\mathrm{Im}}$ и $\partial/\partial h'\langle\omega\varepsilon\rangle_{\mathrm{Im}}$. Умножая (13) на $(1/16\pi)|E|^2$, получим очевидное условие для сред без источников:

$$2\omega''W - 2h''S = 0. \tag{14}$$

Отсюда видно, что в случае малых мнимых добавок ω'', h'', когда вкладом осциллирующих частей можно пренебречь, скорость переноса энергии в волне с комплексной фазой есть

$$v = \mathrm{Im}\,\omega/\mathrm{Im}\,h. \tag{15}$$

В пределе $\omega''\to 0$, $h''\to 0$ (15) переходит в выражение для групповой скорости. Неустойчивый режим в идеализированной постановке задачи приводит либо к бесконечной скорости (когда $h''=0$), либо к нулевой при $\omega''=0$. При этом возникают предельные соотношения

$$\left.\frac{\partial W}{\partial h''}\right|_{h''=0} = \frac{S}{\omega''}, \qquad \left.\frac{\partial S}{\partial \omega''}\right|_{\omega''=0} = \frac{W}{h''}.$$

При действительных значениях ω, h осциллирующие части энергии и потока имеют коэффициент пропорциональности $v_{\sim}=\omega/h$, совпадающий с фазовой скоростью волны. Если ω и h комплексны, то этим множителем связаны амплитуды $W_{\sim}$ и $S_{\sim}$.

Если вкладом осциллирующих слагаемых в выражения для энергии и ее потока пренебречь нельзя, то особого смысла, который вкладывается в отношение S/W для узких пакетов (рассматриваемых как квазичастицы), величина v, так же как и $v_{\sim}$, не имеет, поскольку волна с комплексной фазой, по существу, обладает широким спектром.

3. Плотность дисперсных электронов для сред с «окном прозрачности». Формулы (11) проверены для среды с проницаемостью (5) (или для набора подобных сред). Естественно возникает вопрос, при каких условиях среда может быть представлена непрерывным набором сред типа (5), (6) с различными скоростями u и частотами ω_0. При этом нам важно, чтобы ω, h могли принимать комплексные значения.

Такого типа представления обсуждались ранее. Например, модель линейной среды (без пространственной дисперсии), которая состоит из набора осцилляторных сред с различными ω_p, ω_0, считается в [10] физически оправданной. Для действительных значений ω, как известно [5], представление $\varepsilon(\omega)$ в виде набора проницаемостей типа $(1-\omega_p^2(\omega^2-\omega_0^2)^{-1})$ следует из принципа причинности. Из него же можно получить различные выражения для $\varepsilon(\omega, h)$ в средах с пространственной дисперсией [11].

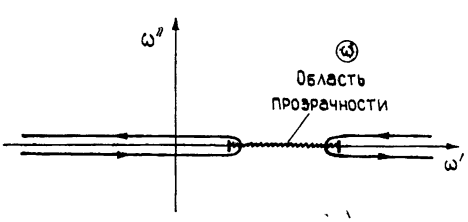

Рис. 1.

Покажем, что если среда имеет «окно прозрачности», когда $\varepsilon(\omega, h)$ чисто действительна в некоторой области действительных значений ω, h (но не при всех ω, h, что запрещено принципом причинности), то можно ввести понятие плотности «дисперсных электронов».

Заметим, что существование «окна прозрачности» накладывает жесткие ограничения на поведение $\varepsilon(\omega, h)$ в комплексной плоскости (ω, h). Из принципа симметрии в теории аналитических функций следует, что $\varepsilon(\omega, h)$ может быть аналитически продолжена (по каждой переменной в отдельности) на все комплексные значения (ω, h)) через область прозрачности из верхних полуплоскостей, где она аналитична

[12]. Все особые точки $\varepsilon(\omega, h)$ при этом лежат в действительной плоскости (ω, h). Значения $\varepsilon(\omega, h)$ в симметричных точках плоскости комплексно сопряжены [12]:

$$\varepsilon(\omega^*, h^*) = \varepsilon^*(\omega, h). \tag{16}$$

Остановимся вначале на средах без пространственной дисперсии. Вычислим интеграл Коши для $(\varepsilon(\omega)-1)$ по контуру, указанному на рис. 1, и учтем связь значений подынтегральной функции (16) на противоположных сторонах разрезов. Тогда для произвольных комплексных значений ω получим

$$\varepsilon(\omega) - 1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{Im}\varepsilon(\omega_0)}{(\omega_0 - \omega)} d\omega_0,$$

где интегрирование идет по действительной оси. В силу нечетности мнимой части $\operatorname{Im}\varepsilon(\omega_0)$, этот интеграл есть суперпозиция осцилляторных проницаемостей:

$$\varepsilon(\omega) - 1 = -\frac{4\pi e^2}{m} \int_{0}^{\infty} \frac{n(\omega_0)}{(\omega^2 - \omega_0^2)} d\omega_0, \tag{17}$$

где $n(\omega_0) = m\omega_0 \operatorname{Im}\varepsilon(\omega_0)/2\pi^2 e^2$ — плотность дисперсных электронов. Соотношение (17) совпадает по форме с известным [11], в котором, однако, ω предполагалось действительным, и условие $\varepsilon(\omega^*) = \varepsilon^*(\omega)$ не использовалось.

Обобщим формулу (17) для плотности дисперсных электронов на среды с пространственной дисперсией. Ищем представление $\varepsilon(\omega, h)$ в виде

$$\varepsilon(\omega, h) - 1 = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(\omega_0, u)}{\omega_0 - (\omega - hu)} d\omega_0\, du, \tag{18}$$

где $f(\omega_0, u)$ предполагается аналитической в верхней полуплоскости ω_0 В этом случае интеграл Коши по ω_0 в (18) вычисляется:

$$\varepsilon(\omega, h) - 1 = \int f(\omega - hu, u)\, du. \tag{19}$$

В силу свойства (16) на $f(\omega, u)$ можно наложить условие

$$f(\omega^*, u) = f^*(\omega, u) \tag{20}$$

при комплексном ω. Кроме того, при действительных ω можно считать, что мнимая часть $f(\omega, u)$ — нечетная функция частоты, а действительная часть — четная:

$$f^*(\omega, u) = f(-\omega, u), \qquad \operatorname{Im}\omega = 0, \tag{21}$$

поскольку $\varepsilon^*(\omega, h) = \varepsilon(-\omega, -h)$.

Покажем, что решение уравнения (19) со свойствами (20), (21) есть

$$f(\omega, u) = \mp \frac{1}{4\pi i} \frac{\partial}{\partial\omega} \int_{-\infty}^{\infty} [\varepsilon(\omega + h_0 u, h_0) - 1] \operatorname{sign} u\, dh_0, \tag{22}$$

где знаки $\mp$ отвечают значениям, лежащим в верхней или нижней полуплоскости ω соответственно. Подставим (22) в правую часть

(19), заменим операцию $\frac{\partial}{\partial\omega}$ на $\frac{1}{h_0 - h}\frac{\partial}{\partial u}$ и проинтегрируем по частям интеграл по u. Возникающая дельта-функция приводит к интегралу

$$\pm\frac{1}{2\pi i}\int\frac{\varepsilon(\omega, h_0) - 1}{h_0 - h}\,dh_0,$$

который замыкается в верхней или нижней полуплоскости, в зависимости от знака мнимой части h, и совпадает с $(\varepsilon-1)$.

Функция (22), как нетрудно проверить, обладает свойствами (20), (21). Рассмотрим значения $\varepsilon(\omega, h)$ в симметричных точках (ω, h) и (ω^*, h^*). Складывая представления (18) для этих значений и пользуясь (20), получим

$$\varepsilon(\omega, h) - 1 = \frac{1}{\pi}\int\frac{\operatorname{Im} f(\omega_0, u)}{(\omega_0 - \Delta\omega)}\,d\omega_0\,du, \tag{23}$$

где $\Delta\omega = (\omega - hu)$. В силу нечетности $\operatorname{Im} f(\omega_0, u)$ по переменной ω_0 (см. (21)) выражение (23) можно свести к интегралу по положительным значениям ω_0:

$$\varepsilon(\omega, h) - 1 = -\frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}du\int_{0}^{\infty}d\omega_0\,\frac{\operatorname{Im} f(\omega_0, u)\omega_0}{(\Delta\omega)^2 - \omega_0^2}. \tag{24}$$

В результате плотность дисперсных электронов запишется

$$N = (m\omega_0/2\pi^2 e^2)\operatorname{Im} f,$$

где функция f выражается через ε формулой (22). Формула (24) дополняет результаты Леонтовича [11].

В заключение авторы выражают глубокую признательность Б. М. Болотовскому, М. Л. Левину и С. М. Рытову за полезные обсуждения результатов работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кадомцев Б. Б., Михайловский А М., Тимофеев А В — ЖЭТФ, 1964, **47**, с. 2266; Незлин М. В. — УФН, 1976, **120**, вып. 3, с. 481.
2. Ефимов С. П, Юдин Л. А. — Изв. вузов — Радиофизика, 1981, **24**, № 12, с. 1514.
3. Akira Hirose.— Bulletin of the American Physical Society, 1979, **22**, № 9
4. Hofman I.— Particle Accelerators, 1980, **10**, p. 253.
5. Ландау Л. Д, Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. — М: Наука, 1982.
6. Полевой В. Г, Рытов С. М — УФН, 1978, **125**, вып. 3, с. 549
7. Рытов С. М., Юдкевич Ф. С. — ЖЭТФ, 1940, **10**, с. 887.
8. Левин М. Л. — ЖЭТФ, 1955, **29**, с. 252.
9. Сивухин Д. В. — Оптика и спектр., 1957, **3**, № 4, с. 308.
10. Сивухин Д. В. — Оптика спектр, 1957, **3**, № 4, с. 297.
11. Леонтович М. А. — ЖЭТФ, 1961, **40**, с. 907.
12. Лаврентьев М. А., Шабат В. В. Методы теории функций комплексного переменного. — М.: Наука, 1973.

Поступила в редакцию
12 июля 1983 г

ENERGY AND FLUX FOR WAVES WITH COMPLEX PHASE IN MEDIA WITH «TRANSPARENSY GAPS»

S. P. Efimov, L. A. Yudin

The subject of the article is to study the energy and flux for waves in a medium with no absorption in a certain real-valued frequency ω and wave number h domain The expressions for energy and the flux have been found in terms of the permittivity with space and time dispersion. The flux and density of energy are different in multiplier $\operatorname{Im}\omega/\operatorname{Im}h$ (velocity). It has been shown that in the case of an unstable process the energy density vanishes when ω is complex and h real.