

ной электронной плотности  $\Delta f_H$  растет и выходит на установившееся постоянное значение после достижения максимума коэффициента отражения. Это установившееся значение  $\Delta f$  не зависит от линейной электронной плотности и прямо пропорционально  $\omega_g$ .

Для сравнения расчетных данных с экспериментом [1] необходимо перейти от переменной  $kr_t$  к временной зависимости через значения начального радиуса и диффузии метеорного следа [3]. Максимальное значение скорости изменения разностной фазы [1] достигает  $3\pi \text{ рад/с}$  и примерно соответствует начальному этапу на рис. 2 при  $\omega_g = 0,3 \div 0,4$ , что на порядок превышает невозмущенное значение геомагнитного поля. Экспериментально измеренное среднее значение скорости изменения  $\Delta f_H$  равно  $0,5-1,0 \text{ рад/с}$ , что также превышает расчетную величину для невозмущенного значения геомагнитного поля. Из расчетов следует существование преобладающего направления скорости изменения  $\Delta f_H$  и уменьшение величины скорости к концу отражения, что не подтверждается экспериментом.

Полученные результаты показывают, что как для недоуплотненных, так и переуплотненных следов в данной модели существует невзаимность распространения радиоволн через метеорные следы по фазе с абсолютным значением меньше  $5-10^\circ$ . Наиболее действенной мерой для уменьшения невзаимности, как следует из данной модели, является использование верхнего диапазона рабочих частот с целью уменьшения  $\omega_g$ .

Отмеченное различие между теорией и экспериментом обусловлено несоответствием модели и реальной ситуацией и может быть объяснено учетом следующих факторов:

- наклонное падение радиоволн на след,
- неаксиальность магнитного поля,
- усреднение разностной фазы за счет переменного радиуса цилиндра в пределах зоны Френеля,
- прочие анизотропные эффекты.

Совершенствование теоретической модели следует вести в вышеуказанных направлениях.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Сидоров В. В. и др. — Метеорное распространение радиоволн. — Казань: КГУ, 1981, вып. 17, с. 30.
2. Гинзбург В. Л. Распространение электромагнитных волн в плазме. — М.: Наука, 1967, с. 140.
3. Марков Г. Т., Чаплин А. Ф. Возбуждение электромагнитных волн. — М. — Л.: Энергия, 1967, с. 103.
4. Yeh C., Rusch W. V. T. — J. Appl. Phys., 1965, 36, № 7, p. 2302.
5. Мак-Кинли Д. Методы метеорной астрономии. — М.: Мир, 1964.

Казанский государственный университет

Поступила в редакцию  
6 июня 1983 г.

УДК 539.182

### О ПРИМЕНИМОСТИ МЕТОДА ФАЗОВЫХ ИНТЕГРАЛОВ В ЗАДАЧЕ О ЛИНЕЙНОЙ ТРАНСФОРМАЦИИ ВОЛН ПРИ УЧЕТЕ ПОГЛОЩЕНИЯ

Н. С. Беллюстин

Решение задачи о взаимодействии нормальных волн в неоднородной магнитоактивной плазме, полученное методом фазовых интегралов (МФИ) [2] указывает на существенное влияние поглощения на эффект трансформации волн. Однако недавно выяснилось, что по этому вопросу еще нет единой точки зрения. Так, в работе [1], в частности, утверждается, что при наличии поглощения МФИ для решения таких задач является некорректным. В настоящей работе на основе точного решения уравнений для поля обсуждаются поглощения и вопрос о применимости МФИ при описании межмодовой трансформации волн.

1. Основные уравнения. Известно, что взаимодействие попутных волн различного типа описывается следующей системой уравнений для компонент электрического поля [4]:

$$E'_x \approx ik_0(\alpha + \delta)E_x + ik_0(\beta - i\gamma)E_y, \quad E'_y = ik_0(\beta + i\gamma)E_x + ik_0(\alpha - \delta)E_y. \quad (1.1)$$

Комплексные показатели преломления нормальных волн этой системы определяются выражениями  $n_{1,2} = \alpha \pm \sqrt{\beta^2 + \gamma^2 + \delta^2}$ .

Для медленных переменных  $e_{x,y}$ , определяемых соотношением

$$E_{x,y} = e_{x,y} \exp \left( ik_0 \int_0^z \frac{n_1 + n_2}{2} dz' \right), \quad (1.2)$$

получим из (1.1) систему

$$e'_x = ik_0 \delta e_x + ik_0 (\beta - i\gamma) e_y, \quad e'_y = ik_0 (\beta + i\gamma) e_x - ik_0 \delta e_y, \quad (1.3)$$

которая, в общем случае решается методом эталонных уравнений [4]. Здесь же мы ограничимся простейшим случаем, когда  $\beta = 0$ ,  $\gamma = \text{const}$ ,  $\delta = z + ir$ ,  $r$  — константа, определяющая разность коэффициентов поглощения нормальных волн. Итак, имеем

$$e'_x = ik_0 (z + ir) e_x + k_0 \gamma e_y, \quad e'_y = -k_0 \gamma e_x - ik_0 (z + ir) e_y. \quad (1.4)$$

Заметим, что, хотя  $r = \text{const}$ , показатели преломления  $\bar{n}_{1,2}$ , а главные коэффициенты поглощения волн  $\kappa_{1,2}$  сложным образом меняются в области взаимодействия нормальных волн, т. е. в окрестности точки  $z=0$ ,

$$n_{1,2} = \alpha \pm \sqrt{\gamma^2 + (z + ir)^2}; \quad (1.5)$$

$$\bar{n}_{1,2} = \text{Re } \alpha \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{(z^2 + \gamma^2 - r^2)^2 + 4z^2 r^2} + z^2 + \gamma^2 - r^2}; \quad (1.6)$$

$$\kappa_{1,2} = \text{Im } \alpha \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{(z^2 + \gamma^2 - r^2)^2 + 4z^2 r^2} - z^2 - \gamma^2 + r^2}. \quad (1.7)$$

Зависимости (1.6) и (1.7) изображены на рис. 1 и 2.

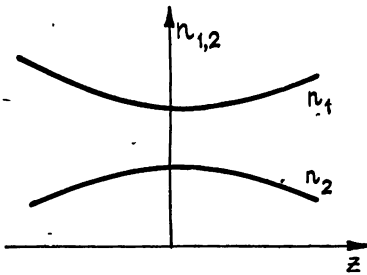


Рис. 1.

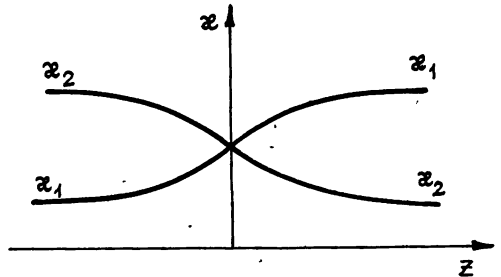


Рис. 2.

**2. Метод фазовых интегралов.** МФИ основан на анализе решения в комплексной плоскости  $z$ , в то время как физический смысл решение имеет лишь при действительных значениях  $z$ . Вне области взаимодействия волн справедливо приближение геометрической оптики, которое для (1.1) имеет вид

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{C_1}{\sqrt{n_1}} \sqrt{1 + \frac{z + ir}{\sqrt{\gamma^2 + (z + ir)^2}}} \exp \left( ik_0 \int_{z^*}^z n_1 dz \right) + \\ &+ \frac{iC_2}{\sqrt{n_2}} \sqrt{1 - \frac{z + ir}{\sqrt{\gamma^2 + (z + ir)^2}}} \exp \left( ik_0 \int_{z^*}^z n_2 dz \right), \\ E_y &= \frac{iC_1}{\sqrt{n_1}} \sqrt{1 - \frac{z + ir}{\sqrt{\gamma^2 + (z + ir)^2}}} \exp \left( ik_0 \int_{z^*}^z n_1 dz \right) + \\ &+ \frac{C_2}{\sqrt{n_2}} \sqrt{1 + \frac{z + ir}{\sqrt{\gamma^2 + (z + ir)^2}}} \exp \left( ik_0 \int_{z^*}^z n_2 dz \right). \end{aligned} \quad (2.1)$$

Постоянные  $C_1$  и  $C_2$  зависят, вообще говоря, от нижнего предела интегрирования  $z^*$ . По разные стороны от области трансформации для одинаковых  $z^*$  эти постоянные различны, после взаимодействия их будем обозначать  $C'_1$  и  $C'_2$ . Задача МФИ — выразить  $C'_1$  и  $C'_2$  через  $C_1$  и  $C_2$ :

$$C'_1 = t_{11}C_1 + t_{12}C_2, \quad C'_2 = t_{21}C_1 + t_{22}C_2. \quad (2.2)$$

Величины  $t_{ij}$  называются коэффициентами трансформации. Кратко напомним, как получаются результаты МФИ. На рис. 3 изображена плоскость переменного  $z$ , особые точки приближенного решения (2.1), линии Стокса, выходящие из этих точек, а также разрезы, на которых меняется знак корня  $\sqrt{\gamma^2 + (z+ir)^2}$ . Обход по верхнему контуру  $K_1$  дает:

$$C'_1 = (1 + ab) e^{-\delta_1} C_2 - bC_1, \quad (2.3)$$

$$C'_2 = C_1 e^{-\delta_1} - aC_2$$

(подробнее см. [3]), где  $a$  и  $b$  — постоянные верхних линий Стокса, а  $\delta_1 = -ik_0 \int_{z^*}^{i(\gamma+r)} (n_1 - n_2) dz = \frac{1}{2} \pi k_0 \gamma^2 - k_0 r \sqrt{\gamma^2 - r^2} - k_0 \gamma^2 \arcsin \frac{r}{\gamma}$  — известный безразмерный параметр. Аналогично, обойдя по нижнему контуру  $K_2$ , получим

$$C'_1 = C_2 e^{-\delta_2} + cC_1, \quad (2.4)$$

$$C'_2 = (1 + cd) e^{-\delta_2} C_1 + dC_2,$$

здесь  $c$  и  $d$  — постоянные нижних линий Стокса, а  $\delta_2 = -ik_0 \int_{-i(\gamma+r)}^{z^*} (n_1 - n_2) dz = \frac{1}{2} \pi k_0 \gamma^2 - k_0 r \sqrt{\gamma^2 - r^2} - k_0 \gamma^2 \arcsin \frac{r}{\gamma}$ .

В силу аналитичности решения выражения (2.3) и (2.4) должны совпадать, но, к сожалению, этого условия недостаточно, чтобы определить четыре неизвестных параметра Стокса. Это является основным недостатком МФИ для данной задачи. Тем не менее видно, что два из четырех коэффициентов трансформации удается определить:

$$t_{12} = e^{-\delta_2}, \quad t_{21} = e^{-\delta_1}. \quad (2.5)$$

Видно также, что коэффициенты  $t_{11}$  и  $t_{22}$  не зависят от  $z^*$ , а равны соответствующим стоксовым постоянным.

**3. Обсуждение.** Система (1.4) имеет точное решение, что позволяет подтвердить результаты, полученные МФИ, а также определить недостающие коэффициенты трансформации. Это выполнено в [4] Точное решение (1.4) имеет вид

$$e_x = \tilde{C}_1 D_{(1/2)ik_0\gamma^2} [\sqrt{2k_0}(z+ir)e^{-i\pi/4}] + \tilde{C}_2 \sqrt{\frac{k_0}{2}} \gamma e^{3i\pi/4} D_{-1-(1/2)k_0\gamma^2} [\sqrt{2k_0}(z+ir)e^{i\pi/4}],$$

$$e_x = \tilde{C}_2 D_{(-1/2)ik_0\gamma^2} [\sqrt{2k_0}(z+ir)e^{i\pi/4}] +$$

$$+ \tilde{C}_1 \sqrt{\frac{k_0}{2}} \gamma e^{i\pi/4} D_{-1+(1/2)ik_0\gamma^2} [\sqrt{2k_0}(z+ir)e^{-i\pi/4}],$$

где  $D_p(x)$  — функция параболического цилиндра [5]. Анализ известных асимптотик этой функции при больших значениях модуля аргумента при  $z < 0$  и  $z > 0$  дает, в частности, следующее. Если на область взаимодействия падает волна 1 и в точке  $z_1 < 0$  достаточно далеко от области взаимодействия амплитуда поля в ней  $|E_x| = 1^*$ , то амплитуда поля в волне 2 в точке  $z_2 > 0$ , далекой от области взаимодействия, равна

$$|E_{x1,2}| = e^{-\delta_0} e^{-k_0(1\cos\alpha - r)(z_2 - z_1)}. \quad (3.2)$$

\* Вдали от области взаимодействия волны поляризованы циркулярно, поэтому тот же результат справедлив и для компоненты  $E_y$ .

Если падает волна 2 единичной амплитуды, то для волны 1 найдем:

$$|E_x|_{2,1} = e^{-\delta_0} e^{-k_0(\text{Im}\alpha+r)(z_2-z_1)} \quad (3.3)$$

Насколько можно понять из [1], эти результаты дали автору основание утверждать, что коэффициенты трансформации в этих случаях равны  $\exp(-\delta_0)$ , а МФИ не верен. В действительности МФИ дает в этих случаях

$$|E_x|_{1,2} = e^{-\delta_1} \exp\left(-\int_{z_1}^0 \kappa_1 dz' - \int_0^{z_2} \kappa_2 dz'\right); \quad (3.4)$$

$$|E_x|_{2,1} = e^{-\delta_2} \exp\left(-\int_{z_1}^0 \kappa_1 dz' - \int_0^{z_2} \kappa_2 dz'\right). \quad (3.5)$$

Можно убедиться, что выражение (3,4) совпадает с (3,2), а (3,5) с (3,3). Это позволяет сделать вывод, что утверждения автора [1] о несправедливости МФИ в задаче с поглощением не верны.

Мы здесь не затронули ситуации, когда различие в поглощении нормальных волн очень сильно и  $r > \gamma$ . Применимость МФИ не вызывает сомнения и в этом случае, она обоснована в работе [4].

Автор признателен Н. Г. Денисову за обсуждение вопроса.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Рябов Б. С. Тезисы докладов III Всесоюзной конференции «Взаимодействие электромагнитного излучения с плазмой». — Алма-Ата: 1982 г., с. 49.
2. Гершман Б. Н., Гинзбург В. Л., Денисов Н. Г. — УФН, 1957, 61, с. 561.
3. Беллюстин Н. С. — Изв. вузов — Радиофизика, 1978, 21, № 1, с. 159.
4. Беллюстин Н. С. — Изв. вузов — Радиофизика, 1978, 21, № 11, с. 1563.
5. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. — М.: Физматгиз, 1962.

Научно-исследовательский  
радиофизический институт

Поступила в редакцию  
21 ноября 1983 г.

УДК 539.143.43

### ЭФФЕКТ БЛОХА—ЗИГЕРТА В ЯДЕРНОМ КВАДРУПОЛЬНОМ РЕЗОНАНСЕ

Г. Б. Фурман

Известно [1], что в присутствии линейно-поляризованного радиочастотного поля (РЧ) происходит радиационный сдвиг линии магнитного резонанса (эффект Блоха—Зигерта). Относительное смещение линии, существование которого впервые было теоретически установлено в работе [2], равно  $(H_1/2H_0)^2$ , где  $H_1$  — амплитуда РЧ поля,  $H_0$  — величина постоянного магнитного поля. Для отношений величин  $H_1$  и  $H_0$ , обычно используемых в ядерном магнитном резонансе, этот эффект очень мал (порядка  $10^{-8}$ ), и им, как правило, пренебрегают. В последнее время интерес к исследованию эффекта Блоха—Зигерта значительно возрос в связи с тем, что оптические методы регистрации магнитного резонанса позволили резко повысить точность его измерения в широких пределах изменения амплитуды РЧ поля (см., например, обзор [3]). В работе [4] методом Крылова—Боголюбова—Митропольского [5] в частном случае аксиальной симметрии тензора градиента электрического поля (ГЭП) были получены выражения, описывающие сдвиги Блоха—Зигерта частот ЯКР возбуждаемых переходов для спинов, равных 1, 3/2, 5/2.

Целью настоящей работы является получение выражения для смещенной частоты ЯКР при многочастотном воздействии РЧ полями на произвольное количество резонансных переходов. Ориентация РЧ полей и симметрия тензора ГЭП считаются произвольными.

Представим гамильтониан спиновой системы в одночастичном приближении следующим образом:

$$H(t) = H_0 + H_1(t), \quad (1)$$