ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XXVII, № 5 РАДИОФИЗИКА 1984

УДК 621.391.822.3:537.533.2

СПЕКТР ФЛУКТУАЦИЙ ТОКА ЭМИТТЕРА, ИМЕЮЩЕГО СЛУЧАЙНОЕ ЧИСЛО ЭМИССИОННЫХ ЦЕНТРОВ

А. Ф. Голубенцев, О. Л. Сироткин, Ю. И. Денисов

Исходя из дважды стохастического пуассоновского процесса, строится модель эмиссии, одновременно учитывающая случайный характер интервала времени между двумя последовательными моментами вылета электронов с катода и случайность числа центров эмиссии, имеющихся на его поверхности. В рамках этой модели проведен расчет спектральной плотности мощности флуктуаций тока эмиссии. Показано, что спектр содержит участок с зависимостью от частоты вида ω^{-2} и участок «белого» шума.

Спектральная плотность мощности флуктуаций тока эмиссии обычно находится либо по модели дробового эффекта [1,2], либо по той или иной модели фликкерного эффекта [3,4].

Цель настоящей работы — создание модели эмиссии, объединяющей оба указанных явления. Суть ее состоит в следующем. Известно, что при рассмотрении дробового шума электроны, образующие ток эмиссии, пересекают плоскость наблюдения в случайные моменты времени t_ν с экспоненциально-распределенным интервалом $\theta = t_{\nu+1} - t_\nu$.

В нашей модели плоскость наблюдения совпадает с плоскостью эмиттера. Источником этих электронов являются центры эмиссии, число которых $N(t)$ в каждый рассматриваемый момент времени случайно (следствие физико-химических процессов, протекающих на поверхности и в глубине эмиттера). Если все центры эмиттируют независимо друг от друга, то среднее число электронов, пересекающих плоскость наблюдения в единицу времени, является также случайным и может быть записано в виде

$$\nu(t) = \nu N(t), \tag{1}$$

где ν — интенсивность испускания электронов одним центром.

Таким образом, эмиссионный ток $J(t)$ в плоскости наблюдения описывается дважды стохастическим процессом с условными моментами:

$$\overline{J(t)} = M\{J(t)\,|\,\nu(t),\quad 0 \leqslant t\} = q_e\nu(t); \tag{2}$$

$$\overline{J(t)\,J(t')} = M\{J(t)\,J(t')\,|\,\nu(t)\} = q_e^2\nu(t)\,\delta(t'-t) + q_e^2\nu(t)\,\nu(t'), \tag{3}$$

где $q_e = 1{,}6\cdot 10^{-19}$ К, $\delta(t'-t)$ — дельта-функция Дирака, прямая черта сверху означает усреднение по ансамблю реализаций случайного процесса $n(t)$ — числа электронов, эмиттированных к моменту времени t. При $\nu(t) = \mathrm{const}$ из (2) и (3) следует хорошо известная формула Шоттки для дробового эффекта.

Очевидно, что с учетом (1) из (2) можно получить безусловные моменты $J(t)$:

$$\langle\overline{J(t)}\rangle = q_e\nu\,\langle N(t)\rangle; \tag{4}$$

$$\langle J(t)\,J(t')\rangle = q_e^2\nu\,\langle N(t)\rangle\,\delta(t'-t) + (q_e\nu)^2\,\langle N(t)\,N(t')\rangle, \tag{5}$$

где $\langle ... \rangle$ означает операцию усреднения по ансамблю реализаций случайного процесса $\{N(t)\}$.

Для вычисления $\langle N(t) \rangle$ и $\langle N(t) N(t') \rangle$ необходимо сделать ряд предположений относительно характера $\{N(t)\}$. В известной нам литературе по эмиссионной электронике этот вопрос не рассматривается, и поэтому допущения здесь носят интуитивный характер.

Итак, пусть $\{N(t)\}$ является марковским процессом рождения и гибели, встречающимся во многих прикладных областях. Уравнения Колмогорова относительно вероятности того, что в момент времени t на поверхности эмиттера будет x центров, имеют следующий вид [5]:

$$
\begin{gathered}
(d/dt) P_0(t) = -\lambda_0 P_0(t) + \mu_1 P_1(t), \\
(d/dt) P_x(t) = \lambda_{x-1} P_{x-1}(t) - (\lambda_x + \mu_x) P_x(t) + \mu_{x+1} P_{x+1}(t),
\end{gathered}
\tag{6}
$$

где $x = 1,2,...$, λ_x — интенсивность процесса рождения, μ_x — интенсивность процесса гибели ЦЭ.

Для случая $\lambda_0 = 0$, $\lambda_x = \lambda x$, $\mu_x = \mu x$, $\lambda, \mu > 0$ система (6) при $N(0) = x_0$ определяет $\langle N(t) \rangle$, $\langle N^2(t) \rangle$ как

$$\langle N(t) \rangle = x_0 e^{(\lambda-\mu)t}; \tag{7}$$

$$\langle N^2(t) \rangle = x_0^2 e^{2(\lambda-\mu)t} + (\lambda + \mu)/(\lambda - \mu)(x_0 e^{2(\lambda-\mu)t} - e^{(\lambda-\mu)t}). \tag{8}$$

Условное математическое ожидание величины $N(t')$ при $N(t) = x_1$, $t' \geqslant t$, согласно (7), есть

$$\langle N(t') | N(t) = x_1 \rangle = x_1 e^{(\lambda-\mu)(t'-t)}. \tag{9}$$

Это выражение является уравнением линии регрессии $N(t')$ относительно $N(t)$, и регрессия, очевидно, линейна. Следовательно с учетом (9) и (8) получаем

$$\langle N(t) N(t') \rangle = \langle N(t) \langle N(t') | N(t) \rangle\rangle = \langle N^2(t) \rangle e^{(\lambda-\mu)(t'-t)}$$

или

$$
\begin{gathered}
\langle N(t + \tau/2) N(t - \tau/2) \rangle = (x_0^2 + x_0(\lambda + \mu)/(\lambda - \mu)) e^{2(\lambda-\mu)\tilde{t}} - \\
- (\lambda + \mu)/(\lambda - \mu) x_0 e^{(\lambda-\mu)\tilde{t}} e^{2^{-1}(\lambda-\mu)\tau},
\end{gathered}
\tag{10}
$$

где $\tilde{t} = 2^{-1}(t' + t)$, $\tau = t' - t$.

Спектр флуктуаций тока эмиссии $S_J(\omega, \tilde{t})$ находится после подстановки (10) в (5) однократным преобразованием Фурье $\langle J(t+\tau/2) J(t-\tau/2) \rangle$ по τ. Его результат определяется $e^{2^{-1}(\lambda-\mu)\tau}$. При $\lambda > \mu$ получаем [1]

$$
\begin{gathered}
\pi^{-1} \oint\limits_0^\infty e^{a\tau} \cos \omega\tau d\tau = \pi^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!} \oint\limits_0^\infty \tau^k \cos \omega\tau d\tau = \pi^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k \Gamma(k+1)}{\omega^{k+1}} \times \\
\times \operatorname{Re}[(-j)^{k+1}],
\end{gathered}
$$

где $a = 2^{-1}(\lambda - \mu)$. Ограничиваясь рассмотрением частот $\omega \gg a$, из последнего соотношения находим, что

$$\pi^{-1} \oint\limits_0^\infty e^{a\tau} \cos \omega\tau d\tau \approx -a\pi^{-1}\omega^{-2},$$

и, следовательно, для всех $\omega \neq 0$

$$S_J(\omega, \tilde{t}) = q_e \frac{\overline{\langle \dot{J}(\tilde{t}) \rangle}}{2\pi} + \frac{\langle \overline{J(0)} \rangle^2}{2\pi\omega^2 T_{x_0} x_0^2} e^{(\lambda-\mu)\tilde{t}}. \qquad (11)$$

Здесь $T_{x_0} = x_0^{-1}(\lambda+\mu)^{-1}$ — среднее время, в течение которого на поверхности катода существует x_0 центров эмиссии.

Первое слагаемое в (11) соответствует дробовому эффекту, а второе — фликкерному с зависимостью от частоты вида ω^{-2}.

При $\mu > \lambda$ вычисление $S_J(\omega, \tilde{t})$ не представляет труда. Выражение для $S_J(\omega, \tilde{t})$ в этом случае получается таким же, как и (11), с той лишь разницей, что нестационарность описывается $\exp[-(\mu-\lambda)\tilde{t}]$.

К зависимости вида ω^{-2} приводит и процесс чистой гибели, когда $\lambda = 0$, $\mu_x = \mu x$, $\mu > 0$. Из (11) сразу находим $S_J(\omega, \tilde{t})$ при $\omega \gg 2^{-1}\mu$:

$$S_J(\omega, \tilde{t}) = q_e \frac{\overline{\langle J(\tilde{t}) \rangle}}{2\pi} + \frac{\langle \overline{J(0)} \rangle^2}{2\pi x_0 \omega^2} \mu e^{-\mu\tilde{t}}, \qquad (11a)$$

где $\langle J(\tilde{t}) \rangle = q_e v x_0 \exp(-\mu t)$. Определим среднее время жизни эмиттера T как время, за которое число центров на его поверхности уменьшается от x_0 до нуля. Среднее время пребывания процесса $\{N(t)\}$ в состоянии x $(1 \leqslant x \leqslant x_0)$ для нашей марковской модели есть μ_x^{-1}. Поэтому

$$T = \mu^{-1}\left(\frac{1}{x_0} + \frac{1}{x_0 - 1} + \ldots + \frac{1}{2} + 1\right) = \mu^{-1} \sum_{k=1}^{x_0} \frac{1}{k},$$

что позволяет определить микропараметр μ следующим образом:

$$\mu = T^{-1}(C + \Psi(x_0 + 1)) = T^{-1} S_{x_0},$$

где C — постоянная Эйлера, $\Psi(x_0 + 1)$ — пси-функция.

С точки зрения теории надежности величина T может быть интерпретирована как среднее время безотказной работы эмиттера. Выразив в (11a) μ через T, мы устанавливаем связь между флуктуационными и надежностными характеристиками исследуемой системы.

Еще одной интересной моделью изменения числа ЦЭ является процесс рождения и гибели без поглощающего состояния: $\lambda_0 \neq 0$, $\lambda_x = \lambda$, $\mu_x = \mu x$ [5]. В этом случае

$$\langle N(t) \rangle = x_0 e^{-\mu t} + \rho(1 - e^{-\mu t}),$$

$$\langle N(t') | N(t) = x_1 \rangle = x_1 e^{-\mu(t'-t)} + \rho(1 - e^{-\mu(t'-t)}), \qquad (12)$$

$$\langle N^2(t) \rangle = a e^{-2\mu t} + (x_0 - \rho)(2\rho + 1) e^{-\mu t} + \rho(\rho + 1),$$

$$\langle N(t) N(t') \rangle = a e^{-\mu(t'-t)} + b e^{-\mu t'} + d e^{-\mu t} + \rho^2 + \rho e^{-\mu(t'-t)}, \qquad (13)$$

$$a = (x_0 - \rho)^2 - x_0, \quad \rho = \mu^{-1}\lambda, \quad b = (x_0 - \rho)(\rho + 1), \quad d = \rho(x_0 - \rho).$$

Переходя в (13) к переменным $\tilde{t}$, τ, в стационарном режиме $(\tilde{t} \to \infty)$ находим

$$\langle N(t + \tau/2) N(t - \tau/2) \rangle = \rho^2 + \rho e^{-\mu\tau},$$

что, согласно (5) и теореме Винера—Хинчина, при $\omega \gg \mu$ дает следующее выражение для $S_J(\omega)$:

$$S_J(\omega) = q_e J_{\text{ст}}/2\pi + J^2_{\text{ст}}\mu/\pi\omega^{-2}\rho, \quad J_{\text{ст}} = q_e \nu \rho.$$

Таким образом, с точки зрения получения зависимости $S_J(\omega) \sim \omega^{-2}$ безразлично, имеет ли $\{N(t)\}$ поглощающее состояние или не имеет, преобладает рождение ЦЭ или их гибель. Можно высказать предположение, что, оставаясь в рамках марковских процессов, мы всегда будем получать $S_J(\omega) \sim \omega^{-2}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Малахов А. Н. Флуктуации в автоколебательных системах. — М.: Наука, 1968, с. 119, 630.
2. Давенпорт В. Б., Рут В. Л. Введение в теорию случайных сигналов и шумов. — М.: ИЛ, 1960, с. 146.
3. Малахов А. Н.— Радиотехника и электроника, 1959, 4, № 1, с. 54.
4. Бахтизин Р. З., Гоц С. С. Изв. вузов — Радиофизика, 1981, 24, № 10, с. 1276
5. Баруча-Рид А. Т. Элементы теории марковских процессов и их приложения. — М.: Наука, 1969, с. 106, 444.

Саратовский государственный университет

Поступила в редакцию 1 ноября 1982 г., после доработки 9 августа 1983 г.

CURRENT FLUCTUATION SPECTRUM OF AN EMITTER HAVING RANDOM NUMBER OF EMITTING CENTRES

A. F. Golubentsev, O. L. Sirotkin, Yu. I. Denisov

Based on the twice stochastic Poisson process an emission model was developed. This model accounts both for random character of the time interval between two successive electron emissions from the cathode and for random number of emitting centres on its surface. In the frame of this model the spectrum density of emission current fluctuation power was calculated. It was shown, that the spectrum containes an interval of ω^{-2} type variation and that of the «white» noise as well.

Аннотации депонированных статей

РАССЕЯНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН НА РАЗЛЕТАЮЩЕМСЯ ОБЛАКЕ ЧАСТИЦ

УДК 537.4

Г. И. Ребриков, В. Ф. Судаков

Рассмотрено рассеяние монохроматической плоской волны на монотонно разлетающемся облаке частиц. Получено выражение для интенсивности рассеянного поля, которое при крайних значениях концентрации частиц совпадает с известными формулами для когерентного и независимого рассеяния на ансамбле, кроме того описывает коллективные эффекты отражения при промежуточных концентрациях за счет учета статистической связи положений частиц.

Статья депонирована в ВИНИТИ, рег. № 1865—84. Деп. от 3 апреля 1984 г.