

УДК 517.9

СИНХРОНИЗАЦИЯ И СТОХАСТИЗАЦИЯ АНСАМБЛЯ АВТОГЕНЕРАТОРОВ ВНЕШНИМ ШУМОМ

А. С. Пиковский

Рассмотрено поведение ансамбля невзаимодействующих автогенераторов под действием внешнего дельта-коррелированного импульсного шума. Получено стохастическое отображение, связывающее амплитуды и фазы между последовательными импульсами. В зависимости от устойчивости движений в фазовом пространстве возникает либо режим синхронизации, когда фазы и амплитуды всех автогенераторов совпадают, либо режим стохастизации, когда фазы некоррелированы. Показано, что переход от синхронизации к стохастизации происходит при увеличении интенсивности шума и степени неизохронности колебаний.

Исследование автоколебательных систем с большим числом степеней свободы представляет большой интерес в связи с изучением таких объектов, как лазеры, возбудимые среды и т. д. [1]. При рассмотрении влияния на такие системы внешних полей (регулярных или случайных) часто внешнее воздействие считают слабым по сравнению с взаимодействием между отдельными генераторами (автоколебательными модами) [2]. Нас будет интересовать обратный случай, когда взаимодействие между генераторами слабое и им в первом приближении можно пренебречь. Тогда приходим к задаче о поведении ансамбля невзаимодействующих генераторов во внешнем поле. Это поведение определяется, во-первых, характером динамики отдельного генератора, а, во-вторых, степенью корреляции между амплитудами и фазами представителей ансамбля. Например, в случае действия периодической внешней силы на простейший томсоновский автогенератор возможны два режима. В режиме синхронизации [1] происходят периодические автоколебания, фаза которых однозначно определяется внешней силой, поэтому все компоненты ансамбля сфазированы и отклик — периодический. При большой внешней силе возникает стохастический режим [3], в котором фаза меняется в широких пределах. В этом случае отклик ансамбля будет стохастическим, а его величина — гораздо меньше, чем в режиме синхронизации, поскольку корреляция между фазами отдельных автогенераторов мала.

В данной работе рассматриваются аналогичные эффекты, возникающие в ансамбле автогенераторов под действием случайного внешнего поля. Ясно, что отклик ансамбля будет случайной функцией времени. Нетривиальная задача заключается в определении степени корреляции между амплитудами и фазами отдельных генераторов.

Эволюцию ансамбля невзаимодействующих одинаковых генераторов под действием внешней силы удобно рассматривать как эволюцию множества точек, соответствующих разным начальным условиям, в фазовом пространстве динамической системы, описывающей один генератор. Если фазовый объем сжимается по всем направлениям, то различия в начальных условиях уменьшаются и происходит синхронизация ансамбля — у всех генераторов устанавливаются одинаковые фазы и амплитуды. Если же есть направления, по которым расстояние между соседними траекториями в фазовом пространстве увеличивается, то синхро-

низация происходить не будет и суммарный отклик существенно уменьшится. Количественным показателем устойчивости траекторий в фазовом пространстве служит ляпуновская характеристическая экспонента (ЛХЭ), знак которой и определяет, будет ли происходить синхронизация или стохастизация автоколебаний. Заметим, что для вычисления ЛХЭ достаточно рассмотреть динамику одного генератора.

В данной работе определяются условия синхронизации и стохастизации ансамбля квазигармонических автогенераторов под действием дельта-коррелированного импульсного шума.

1. Вывод основных уравнений. Рассмотрим автоколебательную систему, описываемую уравнением второго порядка:

$$\ddot{x} + F(x, \dot{x}) = g(t). \quad (1)$$

Будем считать, что в системе (1) в автономном режиме ($g \equiv 0$) имеют место слабонелинейные квазигармонические автоколебания, которые описываются усредненными уравнениями для амплитуды I и фазы ψ [4]:

$$\frac{dI}{dt} = F_1(I), \quad \frac{d\psi}{dt} = F_2(I), \quad (2)$$

$$\dot{x} = I \sin \psi, \quad \dot{x} = I \omega_1 \cos \psi, \quad \omega_1 = F_2(0).$$

Пусть амплитуда устойчивых автоколебаний равна I_0 ($F_1(I_0) = 0$), а частота $\omega_0 = F_2(I_0)$. Вблизи этого предельного цикла уравнения (2) можно линеаризовать:

$$dI/dt = -\gamma(I - I_0), \quad (3)$$

$$d\psi/dt = \omega_0 [1 + \alpha(I - I_0)/I_0],$$

где $\gamma = -F_1'(I_0)$ — декремент затухания отклонений амплитуды от стационарной, $\alpha = I_0 \omega_0^{-1} F_2'(I_0)$ — параметр, характеризующий неизохронность колебаний.

Пусть $g(t) = \epsilon \omega_1 \delta(t)$ — одиночный δ -импульс. Под его действием x не меняется, а \dot{x} изменяется на величину $\epsilon \omega_1$. Считая ϵ малым, в первом приближении получим, что амплитуда меняется на $\epsilon \cos \psi_-$, а фаза — на $\epsilon I_0^{-1} \sin \psi_-$, где I_- и ψ_- — амплитуда и фаза перед импульсом.

Перейдем теперь к исследованию влияния на автоколебания стационарного импульсного случайного процесса:

$$g(t) = \sigma I_0 \omega_1 \sum_i \xi_i \delta(t - t_i). \quad (4)$$

Здесь ξ_i и t_i — случайные амплитуды и моменты появления импульсов, σ характеризует интенсивность шума. В дальнейшем будем считать, что $\langle \xi \rangle = 0$, $\langle \xi^2 \rangle = 1$, где $\langle \rangle$ означает усреднение по ансамблю внешнего шума.

Уравнения, связывающие амплитуды и фазы перед последовательными импульсами, легко выписываются, поскольку скачок на одном импульсе известен, а между импульсами эволюция сводится к уравнениям (3), которые без труда интегрируются. В итоге получим

$$I_{n+1} = I_0 + \exp(-\gamma T_n)(I_n - I_0 + \sigma I_0 \xi_n \cos \psi_n),$$

$$\psi_{n+1} = \psi_n + \omega_0 T_n - \sigma (I_0/I_n) \xi_n \sin \psi_n +$$

$$+ \alpha \omega_0 \gamma^{-1} (1 - \exp(-\gamma T_n))(I_n - I_0 + \sigma I_0 \xi_n \cos \psi_n) \pmod{2\pi}, \quad (5)$$

где $T_n = t_{n+1} - t_n$. Далее мы будем считать, что ξ_n и T_n — последовательности независимых случайных величин. Аналогичные отображения для случая периодической последовательности δ -импульсов приведены в [3].

Удобно перейти к безразмерной переменной $x = I/I_0 - 1$:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \exp(-\gamma T_n)(x_n + \sigma \xi_n \cos \psi_n), \\ \psi_{n+1} &= \psi_n + \omega_0 T_n - \sigma(1 + x_n)^{-1} \xi_n \sin \psi_n + \\ &+ \alpha \omega_0 \gamma^{-1} (1 - \exp(-\gamma T_n))(x_n + \sigma \xi_n \cos \psi_n) \pmod{2\pi}. \end{aligned} \quad (6)$$

В предельном случае больших интервалов между импульсами уравнения (6) можно упростить. Если $\gamma T_n \gg 1$ при всех n (т. е. функция распределения случайной величины T_n равна нулю при $T_n < \gamma^{-1}$), то $x_n \ll 1$ и для фазы $\theta = \psi + \arctg(\gamma/\alpha\omega_0)$ получается независимое уравнение

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \omega_0 T_n + K \xi_n \cos \theta_n \pmod{2\pi}, \quad (7)$$

где $K = \sigma(\alpha^2 \omega_0^2 \gamma^{-2} + 1)^{1/2}$.

В разд. 2 мы рассмотрим динамику системы в приближении больших интервалов между импульсами на основе уравнения (7). Затем, в разд. 3, будет исследован общий случай (6).

2. Динамика автоколебаний при большом интервале между импульсами. Динамика фазы автоколебаний при большом интервале между импульсами описывается стохастическим отображением (7). ЛХЭ λ , равная среднему показателю экспоненциального разбегания возмущений фазы, определяется следующим образом:

$$\lambda = T^{-1} \langle \ln |d\theta_{n+1}/d\theta_n| \rangle = T^{-1} \langle \ln |1 - K \xi \sin \theta| \rangle, \quad (8)$$

где $T = \langle T_n \rangle$ — средний интервал между импульсами, а черта означает усреднение по функции распределения случайной фазы $\omega_0(\theta)$. Обратим внимание, что при $T_n \gg \gamma^{-1}$ статистика моментов появления импульсов входит в (8) неявно, только через $\omega_0(\theta)$. Это связано с тем, что основной набег фазы происходит за время γ^{-1} .

Для определения $\omega_0(\theta)$ рассмотрим уравнение для эволюции функции распределения $w(\theta)$, которое получается, если использовать известные формулы для плотности вероятности функции от независимых случайных величин:

$$w_{n+1}(\theta) = \hat{P} \int_{-\infty}^{\infty} dz \int_0^{2\pi} d\varphi V(\theta - z) W\left(\frac{z - \varphi}{K \cos \varphi}\right) \frac{w_n(\varphi)}{K \cos \varphi}, \quad (9)$$

где V и W — функции распределения величин $\omega_0 T_n$ и ξ , а

$$\hat{P}f(x) = \begin{cases} \sum_i f(x + 2\pi i), & 0 \leq x < 2\pi \\ 0, & x < 0, x \geq 2\pi \end{cases}$$

Удобно перейти к характеристическим функциям

$$w(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m e^{imx}, \quad V(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{V}(u) e^{iuy} du,$$

$$W(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{W}(u) e^{iuy} du.$$

Тогда (9) сводится к

$$c_{n+1}(m) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} A(l, m) c_n(l), \quad (10)$$

где

$$A(l, m) = \frac{1}{2\pi} \overline{V}(m) \int_0^{2\pi} \overline{W}(mK \cos y) e^{i(l-m)y} dy.$$

В общем случае нахождение стационарного решения (10) представляет собой непростую задачу. Она существенно упрощается, если дисперсия интервалов между импульсами велика: $\langle (\omega_0 T_n - \langle \omega_0 T_n \rangle)^2 \rangle \gg 1$. Отметим, что это условие не противоречит принятому ранее приближению $\gamma T_n \gg 1$. В этом случае, поскольку $\overline{V}(0) = 1$, $\overline{V}(m) \ll 1$ при $m \neq 0$, то $A(l, m) \approx \delta(m)$ и стационарное решение (10) есть $c_0(m) = \delta(m)$, чему соответствует равномерное распределение фазы $\omega_0(\theta) = 1/2\pi$.

Однако даже при равномерном распределении фазы аналитически вычислить интегралы в (8) не удастся. Поэтому для выяснения характера зависимости ЛХЭ λ от K рассмотрим предельные случаи малых и больших K .

При $K \ll 1$ —

$$\begin{aligned} T\lambda &= \overline{\langle -K\xi \sin \theta - (1/2)K^2\xi^2 \sin^2 \theta \rangle} + O(K^3) = \\ &= - (1/2)K^2 \overline{\sin^2 \theta} + O(K^3) < 0. \end{aligned} \quad (11)$$

При $K \gg 1$ —

$$T\lambda \simeq \overline{\langle \ln |K\xi \sin \theta| \rangle} = \ln |K| + \langle \ln |\xi| \rangle + \overline{\langle \ln |\sin \theta| \rangle} > 0. \quad (12)$$

Таким образом, при K , меньшем критического значения K_c , λ отрицательно и происходит синхронизация колебаний, а при $K > K_c$ λ положительно и колебания стохастизируются.

ЛХЭ для отображения (7) исследовалась численно, причем использовались нормальные распределения ξ_n и T_n . Данные, приведенные на рис. 1, показывают неплохое согласие с оценками (11), (12). Критическое значение K_c примерно равно двум. Динамика синхронизации и стохастизации также исследовалась численно. Отображение (7) применялось к ансамблю из 500 систем, начальные фазы которых распределены равномерно от 0 до 2π . В процессе эволюции на каждом шаге вычислялась дисперсия D величины $y = \cos \theta$. Из рис. 2, на котором представлена эволюция D , видно различие между случаями стохастизации ($K = 5$, кривые 2, 3) и синхронизации ($K = 1$, кривая 1). При $K = 1$ уже после действия 30 импульсов фазы оказались практически коррелированы, а при $K = 5$, даже если фазы вначале почти совпадают (кривая 3), D приходит к значению 0,5, соответствующему равномерному распределению.

В заключение этого раздела оценим установившийся разброс амплитуд автоколебаний. Возводя первое из уравнений (6) в квадрат и усредняя (для ψ используем равномерное распределение), получим

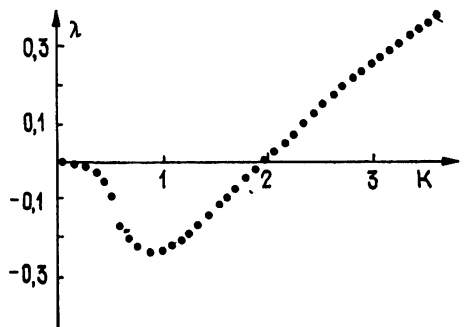


Рис. 1.

$$\langle x^2 \rangle = \frac{\langle \exp(-\gamma T_n) \rangle \sigma^2}{2(1 - \langle \exp(-\gamma T_n) \rangle)} \approx \frac{1}{2} \langle \exp(-\gamma T_n) \rangle \sigma^2. \quad (13)$$

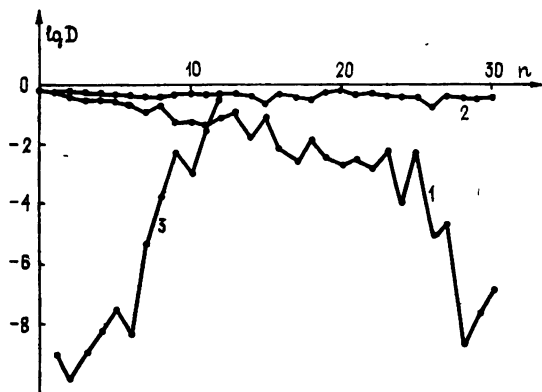


Рис. 2.

3. Механизм стохастизации и синхронизации. Физический механизм синхронизации и стохастизации колебаний состоит в следующем. Под действием внешнего импульса амплитуда и фаза колебаний меняются, а в процессе эволюции из-за зависимости частоты от амплитуды происходит дополнительный набег фазы. В результате фаза перед следующим импульсом зависит от фазы перед предыдущим импульсом нелинейно, степень нелинейности определяется параметром K , пропорциональным амплитуде импульса и неизохронности колебаний. При малых K эта

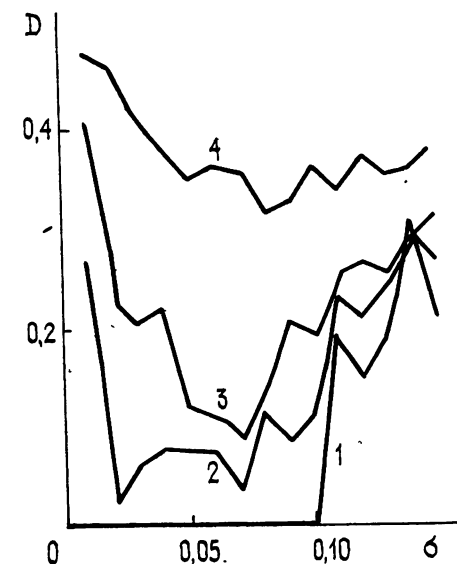


Рис. 3.

нелинейная зависимость приводит к выравниванию фаз, а при больших K фазы, наоборот, раскоррелируются в результате нелинейного набегу и действия интенсивного шума. Если интервалы между импульсами не всегда велики, как это имеет место, например, для пуассоновской последовательности, то от (6) нельзя, вообще говоря, переходить к (7). Однако ясно, что описанный механизм нелинейного набегу фазы по-прежнему справедлив. Малые интервалы между импульсами приводят к сближению фаз, а большие — к их раскорреляции. При фиксированных функциях распределения величин T_n и ξ_n увеличение параметров σ и α приводит к увеличению доли интервалов, на которых происходит стохастизация. Существуют критические значения этих параметров, ниже которых в среднем фазы синхронизируются, а выше — стохастизируются. Это подтверждается

численным моделированием (см. рис. 3). В этих расчетах для T_n было взято пуассоновское распределение с $T = \langle T_n \rangle = 1$, а для ξ_n — нормальное, параметры $\gamma = 2$, $\omega_0 = 80$, $\alpha = 0,5$ были фиксированы, а изменялась интенсивность внешнего шума σ . Вычислялось среднее по времени от введенной выше величины D (после окончания процессов установления).

Из кривой 1 видно, что граница стохастичности — $\sigma_c \simeq 0,1$. При $\sigma < \sigma_c$ фазы синхронизируются, а при $\sigma > \sigma_c$ — нет.

Были проведены также аналогичные расчеты для ансамбля неидентичных систем — частоты отдельных осцилляторов брались равномерно распределенными в интервале $\Delta\omega$. Их результаты приведены также на рис. 3 (кривая 2 — $\Delta\omega = 0,01$, кривая 3 — $\Delta\omega = 0,1$, кривая 4 — $\Delta\omega = 1$). Видно, что при малых $\Delta\omega$ при $\sigma < \sigma_c$ наблюдается довольно сильная корреляция фаз. Величину разброса фаз можно оценить из следующего уравнения для возмущения фазы:

$$\Delta\psi_{n+1} = \exp(\lambda T) \Delta\psi_n + \Delta\omega T_n. \quad (14)$$

Здесь первое слагаемое в правой части описывает синхронизацию — возмущения фазы затухают с показателем, равным λ , а второе слагаемое — набег фазы из-за расстройки. Учитывая независимость $\Delta\psi_n$ и T_n , получаем из (14) следующую оценку дисперсии возмущения фазы:

$$\langle (\Delta\psi_n)^2 \rangle \simeq \frac{\Delta\omega^2 \langle T_n^2 \rangle}{1 - \exp(-2\lambda T)}. \quad (15)$$

Как следует из рис. 1, минимальное значение λ примерно равно — 0,25, так что синхронизация практически не будет заметна при $(\Delta\omega)^2 \sim \sim (\langle T_n^2 \rangle)^{-1}$.

В данной работе мы показали, что действие внешнего шума на автоколебательную систему приводит к своеобразным эффектам синхронизации и стохастизации. Эти эффекты аналогичны явлениям захвата частоты и возникновения стохастичности, наблюдаемым при действии на автоколебательную систему периодической внешней силы. Однако если последние проявляются в динамике отдельного автогенератора, то исследованные нами — только при рассмотрении ансамбля одинаковых (или почти одинаковых) систем, находящихся в одном внешнем случайном поле. Отметим также, что описанный механизм синхронизации и стохастизации справедлив и для ситуации, когда внешний шум действует на ансамбль нелинейных осцилляторов с затуханием. Детальное исследование этой задачи будет приведено в последующей работе.

Автор выражает благодарность М. И. Рабиновичу за полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ланда П. С. Автоколебания в системах с конечным числом степеней свободы. — М.: Наука, 1980.
2. Клибанова И. М., Малахов А. Н., Мальцев А. А. — Изв. вузов — Радиофизика, 1971, 14, № 2, с. 173.
3. Zaslavsky G. M. — Phys. Lett., 1978, 69A, № 3, p. 145.
4. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. — М.: Наука, 1974.

Институт прикладной физики
АН СССР

Поступила в редакцию
13 апреля 1983 г.

SYNCHRONIZATION AND STOCHASTIZATION OF AN ENSEMBLE OF SELF-GENERATORS BY EXTERNAL NOISE

A. S. Pikovskij

The dynamics of an ensemble of noninteracting self-generators, governed by external delta-correlated pulsed noise is considered. A stochastic mapping for amplitudes and phases between successive pulses is derived. Depending on the stability of motions in the phase space regimes of synchronization when the phases and amplitudes of all generators are equal, or stochastization, when there is no correlation between phases, are possible. It is shown that the transition from synchronization to stochastization takes place with the increasing of noise intensity and the nonlinearity of the generator.