4. Tang C. L., Stats H. — J. Appl. Phys., 1967, 33, № 1, p. 323.
5. Басов Н. Г., Ораевский А. Н., Страховский Г. М., Татаренков В. М. — ЖЭТФ, 1963, 45, вып. 6(12), с. 1768; Ораевский А. Н. Молекулярные генераторы. — М.: Наука, 1964.
6. Ханин Я. И. Динамика квантовых генераторов. — М.: Сов. радио, 1975.
7. Senitzky I. R., Genossar I. — Phys. Rev. Lett., 1980, 44, № 22, p. 1453.
8. Orriols G. — Nuovo Cimento, 1979, 53 B, № 1, p. 1.

Горьковский государственный университет

Поступила в редакцию 11 июля 1983 г.

УДК 621.371.243

МЕТОД ГЮЙГЕНСА—КИРХГОФА В ЗАДАЧАХ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ОПТИЧЕСКОГО ИЗЛУЧЕНИЯ В СРЕДЕ С ДИСКРЕТНЫМИ КРУПНОМАСШТАБНЫМИ НЕОДНОРОДНОСТЯМИ

В. Л. Миронов, С. И. Тузова

В настоящем сообщении предлагаются и обосновываются аппроксимации решения скалярного волнового уравнения в параболическом приближении, позволяющие получать с оцениваемой степенью точности аналитические выражения для статистических моментов поля оптического пучка, распространяющегося в турбулентной среде с дискретными крупномасштабными неоднородностями.

Распространение оптической волны в среде с крупномасштабными неоднородностями ($kl \gg 1$, l — линейный размер неоднородности, $k = 2\pi/\lambda$, λ — длина волны излучения) описывается в параболическом приближении скалярного волнового уравнения [1, 2]:

$$[2ik\,(\partial/\partial x') + \Delta' + \widetilde{V}(x', \rho')]\, U(x', \rho') = 0. \tag{1}$$

Здесь $U(x', \rho')$ — комплексная амплитуда поля волны, распространяющейся в направлении оси $0x'$, $\rho' = \{y'\, z'\}$ — вектор в плоскости, перпендикулярной оси $0x'$; $\Delta' = \partial^2/\partial y'^2 + \partial^2/\partial z'^2$ — двумерный оператор Лапласа, $\widetilde{V}(x', \rho') = k^2 \varepsilon_1 (x', \rho') - V(x', \rho')$, $\varepsilon_1(x', \rho')$ — поле флуктуаций диэлектрической проницаемости в турбулентной среде, $V(x', \rho') = \sum\limits_{j=1}^{N} V_j(x', x_j;\, \rho', \rho_j)$ — рассеивающий потенциал совокупности N дискретных неоднородностей [3], x_j, $\rho_j = \{y_j, z_j\}$ — координаты случайных положений центра j-го рассеивателя. Решение уравнения (1) представляется в виде интеграла Гюйгенса—Кирхгофа

$$U(x, \rho) = \int d^2\rho'\, U_0(\rho')\, G(x, x_0;\, \rho, \rho'), \tag{2}$$

где $G(x, x';\, \rho, \rho')$ — функция Грина, удовлетворяющая сопряженному к (1) уравнению и граничному условию $G(x, x;\, \rho, \rho') = \delta(\rho - \rho')$, $U_0(\rho')$ — начальное поле в плоскости излучающей апертуры $x' = x_0 = \mathrm{const}$.

В качестве нулевого приближения к решению уравнения (1) используется представление (2), в котором функция Грина берется в приближенном виде:

$$G^0(x, x';\, \rho, \rho') = G_0(x, x';\, \rho, \rho')\, G_1^0(x, x';\, \rho, \rho')\, G_2^0(x, x';\, \rho, \rho'). \tag{3}$$

Здесь $G_0(x, x';\, \rho, \rho')$ — функция Грина свободного пространства. Выражение для турбулентной составляющей функции Грина в ФПМГК $G_1^0(x, x';\, \rho, \rho') = \exp\{iS_T(x, x';\, \rho, \rho')\}$ записывается в виде, предложенном в [4]. Найдено, что функция Грина, соответствующая ансамблю дискретных неоднородностей,

$$G_2^0(x, x';\, \rho, \rho') = \exp\{\Phi(x, x';\, \rho, \rho')\} = \exp\left\{\sum_{j=1}^{N} \Phi_j(x, x', x_j;\, \rho, \rho', \rho_j)\right\}, \tag{4}$$

удовлетворяет уравнению

$$-2ik\frac{\partial}{\partial x'}G_2^0 + \Delta' G_2^0 + 2\nabla' \ln G_0 \cdot \nabla' G_2^0 - V G_2^0 = G_2^0 \sum_{i \neq j}^{N} \sum^{N} (\nabla'\Phi_i \cdot \nabla'\Phi_j) \tag{5}$$

и граничному условию $G_2^0(x,x;\rho,\rho')=1$. В (4) комплексная фаза представлена, согласно методу Калашникова и Рязанова (МКР) [5], в виде суперпозиции независимых набегов комплексной фазы на отдельных неоднородностях Φ_j. С использованием (1)—(5) получено эквивалентное дифференциальному уравнению (1) интегральное уравнение вида

$$U(x,\rho)=U^0(x,\rho)+\frac{i}{2k}\int\limits_{x_0}^{x}dx'\int d^2\rho'\,U(x',\rho')\,G_0(x,x';\rho,\rho')\Big\{\Delta'\big(G_1^0\cdot G_2^0\big)\Big\}-$$
$$-G_1^0\Delta' G_2^0+G_1^0G_2^0\sum_{i\neq j}^{N}\sum^{N}(\nabla'\Phi_i\cdot\nabla'\Phi_j), \tag{6}$$

в котором в качестве свободного члена $U^0(x,\rho)$ выделено предлагаемое (нулевое) приближение.

Считается, что флуктуации поля волны, вызванные турбулентными и дискретными неоднородностями, некоррелированы, а фазы $S_т(x,x';\rho,\rho')$ и $\Phi(x,x';\rho,\rho')$ являются соответственно гауссовым и пуассоновским случайными процессами [2]. Для среднего поля $\langle U(x,\rho)\rangle$ и функций когерентности порядка $2n$:

$$\Gamma_{2n}(x,\rho_{2n})=\langle U(x,\rho_1)\,U^*(x,\rho_2)..U(x,\rho_{2n-1})\,U^*(x,\rho_{2n})\rangle,$$

найдены интегральные уравнения, аналогичные по форме уравнению (6). Решение каждого из этих уравнений представляется в виде ряда Неймана, первый член которого соответствует предлагаемому приближению. Показано, что в случае статистической однородности рассеивающего потенциала $\tilde V(x',\rho')$ поправки к нулевому приближению для $\langle U(x',\rho')\rangle$ и Γ_2 равны нулю, а для Γ_4 отличны от нуля и могут быть оценены путем вычисления последующих членов ряда Неймана. В отсутствие турбулентности ($S_т=0$) в области малых оптических толщ $\mu=n_0\pi a^2x\ll 1$ (a, n_0 — радиус и концентрация частиц, x — длина трассы), воспользовавшись разложением членов ряда Неймана для Γ_4 по параметру μ, получаем, что поправки имеют порядок μ^2. Следовательно, первый член ряда Неймана, соответствующий приближению МКР, для четвертых моментов поля строго описывает только приближение однократного рассеяния.

Для модели «идеально поглощающих» частиц [5, 6] в области «дальней» зоны относительно размера частицы ($\Omega_0=ka^2/x\ll 1$) комплексная фаза Φ_j определяется из решения задачи дифракции парциальной сферической волны на круглом экране радиуса a [7].

В области $\mu\gg 1$ и $\Omega_0\ll 1$ предлагается использовать фазовое приближение $\Phi_j\simeq iS_j$ (S_j — реальная фаза), позволяющее получить для относительной дисперсии флуктуаций интенсивности плоской волны σ_I^2 асимптотическое значение $\sigma_I^2\simeq 1$ при $\mu\to\infty$, которое соответствует ожидаемой в этом случае нормализации рассеянного поля. Записываются аналогичные (6) интегральные уравнения для поля и его статистических моментов, позволяющие оценить погрешность фазового приближения.

Для модели «оптически мягких» ($|\mathrm{Re}\,n-1|\ll 1$, n — показатель преломления вещества частицы) непоглощающих ($\mathrm{Im}\,n=0$) частиц в области «дальней» зоны ($\Omega_0\ll 1$) в качестве нулевого приближения к решению уравнения (1) предлагается использовать фазовое приближение [7] $\Phi_j\simeq i2S_j$ (коэффициент 2 возникает как следствие «оптической теоремы»). Анализ полученных интегральных уравнений показывает, что для $\langle U(x,\rho)\rangle$ и Γ_2 поправки к нулевому приближению равны нулю. Выражения для дисперсии σ_I^2, полученные в фазовом приближении $\sigma_{I,0}^2$, и поправки к ним $\sigma_{I,1}^2$, найденные в предельных случаях малых ($\mu\ll 1$) и больших ($\mu\gg 1$) оптических толщ имеют вид

$$\sigma_{I,0}^2\simeq 4\mu+O(\mu^2),\qquad \sigma_{I,1}^2\simeq -4\mu\,\frac{\Omega_0}{4}\,\mathrm{arctg}\,\frac{4}{\Omega_0}+O(\mu^2)\quad(\mu\ll 1);$$

$$\sigma_{I,0}^2\simeq 1+\frac{5}{16\sqrt{3}}\,\frac{\Omega_0^2}{\mu}\ln 2\mu,\qquad \sigma_{I,1}^2\simeq O\left(\frac{\Omega_0^2}{\mu}\right)\qquad(\mu\gg 1).$$

Отсюда следует, что, поскольку $\Omega_0\ll 1$, поправки к фазовому приближению пренебрежимо малы.

Авторы выражают признательность В. А. Крутикову за полезное обсуждение работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Татарский В. И. Препринт. Отделение океанологии, физики атмосферы и географии АН СССР. — М., 1970.
2. Кляцкин В. И. Статистическое описание динамических систем с флуктуирующими параметрами. — М.: Наука, 1975.
3. Барабаненков Ю. Н. — УФН, 1975, **117**, вып. 1, с 49.
4. Banakh V. A., Mironov V. L.— Opt. Lett., 1977, **1**, № 5, p. 172.
5. Калашников Н. П., Рязанов М. И. — ЖЭТФ, 1966, **50**, вып 2, с 459.
6. Крутиков В. А. — Изв. вузов — Радиофизика, 1980, **23**, № 12, с. 1434.
7. Mironov V. L., Tuzova S. I.— Opt. Lett., 1980, **5**, № 8, p. 362.

Институт оптики атмосферы
СО АН СССР

Поступила в редакцию
27 сентября 1983 г.

УДК 621.396.677:537.874.6:519.65

ОБ ОДНОМ АЛГОРИТМЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ ИНТЕГРАЛА ТИПА КИРХГОФА

С. Н. Нефедов

При решении ряда задач теории дифракции и антенной техники возникает необходимость вычисления поля излучения плоской апертуры с заданным законом возбуждения $\dot{U}_0(P)$, где P — текущие координаты точек апертуры. При использовании широко применяемого на практике приближения Кирхгофа искомое поле $\dot{U}$ в произвольной точке P', расположенной вне апертуры S_a, определяется известным соотношением

$$\dot{U}(P') = \iint\limits_{S_a} \dot{U}_0(P) \frac{\exp[-ik\rho(P, P')]}{\rho(P, P')} ds, \tag{1}$$

где $\rho(P, P')$ — расстояние между точками наблюдения и интегрирования

Соотношение (1) соответствует скалярной задаче, которая без особого труда обобщается на случай векторных полей при пренебрежении излучением кромок, что допустимо для апертур с большими волновыми размерами [1].

Несмотря на простоту математической записи (1) практическое вычисление по этой формуле очень затруднительно даже на современных ЭВМ, так как под знаком двукратного интеграла содержится быстроосциллирующий фазовый множитель $\exp[-ik\rho(P, P')]$ Время счета программ, непосредственно реализующих (1), на достаточно быстродействующих ЭВМ (БЭСМ-6, ЕС-1060) в реальных задачах может достигать нескольких часов. Поэтому на практике для вычисления (1) используют либо асимптотические формулы [2], которые известны для некоторых законов возбуждения и форм апертуры, либо, наиболее часто, разложение в спектр плоских волн [1]. В последнем случае необходимо производить прямое и обратное преобразование Фурье, для чего обычно используют алгоритм быстрых преобразований. Однако такой метод расчета обладает существенными недостатками: во-первых, недостаточно эффективно используется память ЭВМ, так как необходимо хранить большие массивы результатов промежуточных вычислений, во-вторых, так как применяется алгоритм быстрого преобразования Фурье, то трудно варьировать количеством и положением точек, в которых вычисляются значения искомого поля, и, в-третьих, серьезные трудности возникают при нахождении поля на криволинейной поверхности

Представляется перспективным следующий прием, который позволяет создать эффективный алгоритм вычисления интеграла (1). В каждой точке наблюдения P' осуществляется переход к цилиндрической системе координат r, ψ, z', начало которой совпадает с проекцией точки наблюдения на плоскость апертуры P_1', а координаты r и ψ лежат в этой плоскости (аналогичный прием применен в [3] для приближенного представления поля апертуры аналитическим выражением). В этой системе координат записывается закон возбуждения первичного поля и применяется метод разделения переменных.

Тогда (1) записывается в виде

$$\dot{U}(P') = \int\limits_{r_1}^{r_2} \frac{\exp[-ik\sqrt{r^2 + (z')^2}]}{\sqrt{r^2 + (z')^2}} \dot{I}(r)\, r dr, \tag{2}$$