

УДК 621. 315. 592.

**РАССЛОЕНИЕ СВОБОДНЫХ НОСИТЕЛЕЙ  
В ПОЛУПРОВОДНИКОВЫХ ПЛЕНКАХ, ПОМЕЩЕННЫХ  
В СКРЕЩЕННЫЕ Е- И Н- ПОЛЯ**

*А. М. Белянцев, А. Л. Железняк, В. А. Козлов*

Аналитически решена задача о распределении носителей в полупроводниковых пленках, находящихся в скрещенных  $E$ - и  $H$ -полях, параллельных поверхностях. Показано, что в сильных полях в однородных пленках возникают обедненный, квазинейтральный и обогащенный носителями слои с резким переходом от одного слоя к другому. Найдено аналитическое решение краевой задачи для пленки с резким скачком концентрации и подвижности. Показано, что вблизи скачка возникает обогащенный свободными носителями слой повышенной проводимости.

В полупроводниковых пленках, помещенных в сильные скрещенные  $E$ - и  $H$ -поля, параллельные поверхности, происходит перераспределение свободных носителей по толщине пленки, приводящее к ряду интересных физических эффектов [1–7]. Это перераспределение вызвано действием на движущиеся носители силы Лоренца, направленной по нормали к пленке. В настоящей работе показано, что в скрещенных  $E$ - и  $H$ -полях, параллельных поверхности, в пленках с толщинами, большими дебаевского радиуса, возникает обедненный носителями слой с резко выраженной границей. Толщина этого слоя изменяется в зависимости от величины  $E$ - и  $H$ -полей, так что при определенных условиях обедненный слой может охватить почти всю пленку. В этом случае все свободные носители сосредоточены в узком слое вблизи поверхности пленки. Наряду с этими эффектами в пленках со скачкообразным изменением концентрации и подвижности носителей вблизи скачка может возникнуть узкий, обогащенный носителями слой с высокой плотностью тока.

Опишем сначала качественно распределение носителей в однородной пленке, помещенной в скрещенные  $E$ - и  $B$ -поля, параллельные поверхности (рис. 1). На движущиеся вдоль пленки носители действует сила Лоренца  $F_L = qV_zB/c$ , которая вызывает их смещение в направлении нормали к пленке, здесь  $V_z = \mu E_z$  — скорость носителя,  $\mu$  — подвижность,  $q$  — заряд носителя,  $c$  — скорость света. В результате перераспределения носителей в пленке возникает холловское поле, препятствующее их дальнейшему перераспределению. Величина холловского поля ограничена значением  $E_{\max} = 4\pi qnd/\epsilon_0$ , соответствующим полю плоского конденсатора, в котором все свободные заряды пленки стянуты на ее границу (обкладку конденсатора), здесь  $n$  — концентрация свободных носителей,  $d$  — толщина пленки,  $\epsilon_0$  — диэлектрическая проницаемость полупроводника.

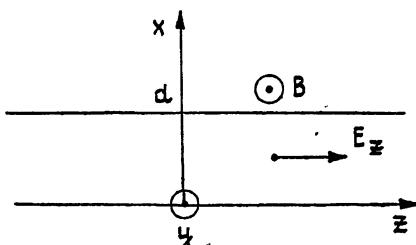


Рис. 1. Ориентация электрического и магнитного полей относительно образца.

Если магнитное поле  $B$  и тянущее поле  $E$  столь сильны, что  $F_L > qE_{\max}$ , то при  $d \gg D$  все свободные носители будут стянуты к границе пленки, где они сосредоточатся в узком приповерхностном слое, толщина которого определяется балансом между диффузией и силой Лоренца. (Здесь  $D = (kT_{\varepsilon_0}/4\pi q^2 n)^{1/2}$  — радиус Дебая,  $T$  — температура,  $k$  — постоянная Больцмана.) В этом случае вся пленка, за исключением приповерхностного слоя, будет обеднена свободными носителями, и ее свойства будут носить диэлектрический характер. В более слабых полях обедненный слой распространится на толщину  $d_{\text{тр}} = \mu B E_{\varepsilon_0} / 4\pi q n c$ , которая определяется балансом между силой Лоренца и силой со стороны холловского поля, созданного ионизованными примесями обедненного слоя. Как будет показано ниже, граница раздела обедненного слоя очень резкая, ее размытие порядка радиуса Дебая. И, наконец, в сравнительно слабых полях достаточно небольшого перераспределения носителей вблизи границ (в пределах дебаевского радиуса), чтобы холловское поле могло компенсировать силу Лоренца.

В пленках с резким изменением  $n$  и  $\mu$  от координаты  $x$  (рис. 1) при определенных полях  $E$  и  $B$  обедненный слой может дойти до точки скачка. При этом значительная часть носителей, стянутых силой Лоренца из обедненного слоя, сосредоточивается вблизи перехода, где может возникнуть локальное увеличение концентрации свободных носителей до величины, существенно превышающей равновесное значение.

**Исходные уравнения.** Распределение носителей в пленке, помещенной в скрещенные  $E$ - и  $B$ -поля, параллельные поверхности (рис. 1), описывается уравнениями

$$dE_x/dx = (4\pi q/\varepsilon_0)(n - n_0); \quad (1)$$

$$(kT/n)(dn/dx) = qE_x - (q/c)\mu E_z B, \quad (2)$$

где  $n_0$  — концентрация ионизованных примесей,  $E_x$  — холловское поле. Эти уравнения должны быть дополнены граничными условиями

$$E_x(0) = E_x(d) = 0, \quad (3)$$

которые следуют из электронейтральности образца.

Перейдем от системы (1)–(3) к безразмерным уравнениям

$$d\varepsilon/d\xi = \eta - \eta_0; \quad (4)$$

$$\times (d\eta/d\xi) = \eta(\varepsilon - \beta\zeta) \quad (5)$$

с соответствующими граничными условиями

$$\varepsilon(0) = \varepsilon(1) = 0. \quad (6)$$

Здесь введены обозначения:  $\xi = x/d$ ,  $\varepsilon(\xi) = E_x/E_0$ ,  $\zeta = E_z/E_0$ ,  $\eta(\xi) = n/n_0$ ,  $\eta_0 = n_0/n$ ,  $\beta = \mu B/c$ ,  $\times = kT/qE_0 d$ ,  $n_0 = \max n(x)$ ,  $E_0 = 4\pi q n_0 d / \varepsilon_0$ .

Для толстых пленок уравнения (4)–(6) представляют собой краевую задачу для системы обыкновенных дифференциальных уравнений с сингулярным параметром  $\times$ . Известно [8], что специфической особенностью фазового портрета системы сингулярных уравнений является наличие как медленных движений, соответствующих плавному изменению функций  $\varepsilon$  и  $\eta$  от  $\xi$ , так и быстрых движений, когда функция меняется резко, практически скачкообразно. Присутствие быстрых движений указывает на возникновение в решении системы (4)–(6) пограничных слоев, которые могут разделять области с плавным изменением функций. Эти обстоятельства затрудняют использование простой теории возмущений по малому параметру  $\times$  для решения системы уравнений (4)–(6).

**Однородные пленки.** В этом случае  $n_0 = \text{const} = \bar{n}_0$ ,  $\beta = \text{const}$ ,  $\eta_0 = 1$  и  $\kappa = D^2/d^2$ . Уравнения, описывающие медленные движения, близки к решению системы (4)–(6) с равным нулю сингулярным параметром  $\kappa$ , они имеют вид

$$\varepsilon = \beta \xi, \quad \eta = 1; \quad (7)$$

$$\varepsilon = -\xi + \alpha, \quad \eta = 0, \quad (8)$$

где  $\alpha$  — произвольная постоянная, порождающая семейство медленных движений на плоскости  $\eta=0$ .

На рис. 2а приведен трехмерный фазовый портрет системы уравнений (4), (5), на котором показаны прямая (7) и семейство (8). Из этого рисунка ясно, что при  $\beta\xi < 1$  решение системы (4), (5), удовлетворяющее граничным условиям (6), проходит вблизи линии (7), которой на плоскости  $\varepsilon, \eta$  соответствует седло с мультипликаторами  $\lambda_{1,2} = \pm(\kappa^{-1/2})$  (рис. 2б). Даже небольшое отклонение траектории системы (4), (5) от (7) приводит к переходу на быстрые движения. В связи с этим численное решение системы (4)–(6) на ЭВМ сталкивается со значительными трудностями из-за присутствия быстро нарастающей составляющей. При  $\beta\xi > 1$  решение системы (4)–(6), минуя линию (7), быстро выходит на плоскость  $\eta=0$  и попадает в окрестность медленного движения  $\varepsilon = -\xi + \alpha$ .

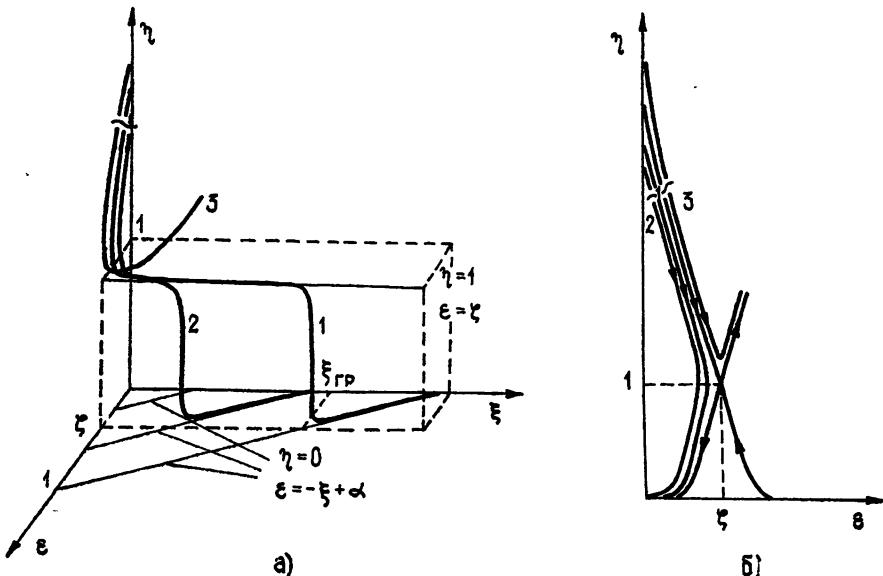


Рис. 2. а) Трехмерный фазовый портрет системы уравнений (4), (5); б) проекция фазового портрета на плоскость  $(\varepsilon, \eta)$ .

Интегрирование системы обыкновенных дифференциальных уравнений (4), (5) удается провести аналитически в квадратурах. Для определенности разберем случай  $\beta\xi > 0$ , так как противоположный случай сводится к этому заменой  $\xi = 1 - \tilde{\xi}$ ,  $\varepsilon = -\tilde{\varepsilon}$ . Сделав замену переменных

$$\eta = \exp(\sigma),$$

перейдем от системы (4)–(6) к дифференциальному уравнению второго порядка

$$\kappa (d^2\sigma/d\xi^2) = \exp(\sigma) - 1 \quad (9)$$

с соответствующими граничными условиями

$$d\sigma/d\xi|_{\xi=0} = d\sigma/d\xi|_{\xi=1} = -\beta\xi/\kappa. \quad (10)$$

Вычислив первый интеграл уравнения (9) и определив постоянную интегрирования с помощью граничных условий (10), приходим к уравнению с разделяющимися переменными, решение которого имеет вид

$$-\int_{\sigma_0}^{\sigma} \frac{d\rho}{\{(2/\kappa)[\Psi(\rho) - \Psi(\sigma_0)] + (\beta\xi/\kappa)^2\}^{1/2}} = \xi. \quad (11)$$

Здесь

$$\Psi(\rho) = \exp(\rho) - \eta_0\rho, \quad (12)$$

при этом значения  $\sigma$  на границах связаны соотношением  $\Psi(\sigma_0) = \Psi(\sigma_1)$ , где  $\sigma_0 = \sigma(0)$  и  $\sigma_1 = \sigma(1)$  (см., например, для сравнения [9]). Нижний предел интегрирования  $\sigma_0$  в формуле (11) нужно подобрать таким образом, чтобы при интегрировании от  $\sigma_0$  до  $\sigma_1$  (связанных соотношением  $\Psi(\sigma_0) = \Psi(\sigma_1)$ , см. также рис. 3) величина интеграла оказалась равной единице ( $\xi = 1$ ).

Процедура поиска  $\sigma_0$  была организована на ЭВМ методом половинного деления отрезка. Зная  $\sigma_0$ , из формулы (11) можно найти зависимость концентрации  $\eta$  и холловского поля  $\varepsilon$  от координаты  $\xi$ . Результаты решения системы (4) — (6) с использованием формулы (11) приведены на рис. 4а, б при значении малого параметра  $\kappa = 10^{-4}$ . Из этих

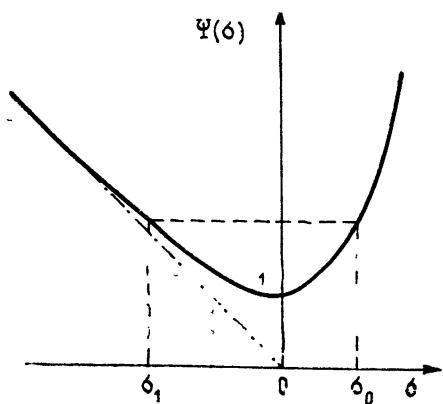


Рис. 3. График функции  $\Psi(\sigma)$ ; пунктиром показана связь между значениями  $\sigma$  на границах.

рисунков ясно видно возникновение обедненного слоя с резко выраженной границей (внутренним погранслоем). Положение границы при  $|\beta\xi| < 1$  дается равенством  $\xi_{\text{гр}} = 1 - \beta\xi$ , которое легко может быть понято из фазового портрета, приведенного на рис. 2а. Соответствующая величина  $d_{\text{тр}} = \mu B e_0 E_z / 4\pi q n c$  не зависит от толщины пленки. Это означает, что даже в толстых образцах в сильных скрещенных  $E$ - и  $B$ -полях происходит отрыв свободных носителей от границы пленки и возникновение обедненного слоя с резким переходом концентрации к равновесному значению по мере продвижения внутрь образца. Возникновение обедненного (а при про-

тивоположной ориентации силы Лоренца — обогащенного) свободными носителями слоя вблизи поверхности образцов представляет интерес для исследования поверхностных свойств.

Характерное размытие внутреннего, а также толщина поверхностного погранслоев при  $|\beta\xi| < 1$  приближенно определяются формулой  $\Delta\xi_{\text{гр}} = \kappa^{1/2}$ , которую легко получить, оценив из уравнений (4), (5) скорость движения по траектории вблизи границы или при перескоке от медленного движения (7) к (8). Эта формула показывает, что размытие границы, а также толщина поверхностного погранслоя  $\Delta d_{\text{тр}} \sim D = (kT_e/4\pi q^2 n)^{1/2}$ , т. е. порядка дебаевского радиуса. Отметим, что структура решений в зависимости от параметра  $\xi$  не меняется с уменьшением  $\kappa$  (были просчитаны варианты вплоть до  $\kappa = 10^{-6}$ ).

В сильных электрических и магнитных полях ( $|\beta\xi| > 1$ ) все свободные носители стянуты к поверхности пленки, холловское поле в этом случае достигает своего максимального значения ( $\varepsilon = 1$ ) вблизи

этой поверхности линейно спадает с ростом  $\xi$ . Характерная толщина слоя, в котором сосредоточены носители,  $\Delta\xi = \kappa/\beta\xi$ , легко получается из уравнений (4) — (6), если пренебречь значением холловского поля [5]. Это означает, что носители стянуты силой Лоренца в область  $\Delta d = kTc/\mu BqE_z d$ , размеры которой могут быть меньше дебаевского радиуса.

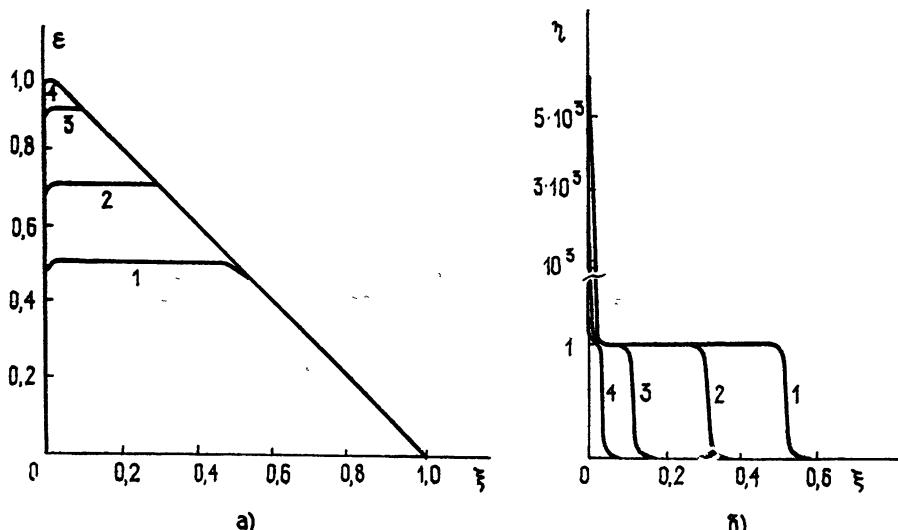


Рис. 4. Холловское поле (а) и концентрация носителей (б) в однородной пленке для нескольких значений  $\beta$ : 1 —  $\beta = 0,5$ ; 2 —  $\beta = 0,7$ ; 3 —  $\beta = 0,9$ ; 4 —  $\beta = 1,0$ .

В качестве примера приведем оценки для толстой пленки  $p$ —Ge с концентрацией  $n = 10^{12} \text{ см}^{-3}$ . Диэлектрическая проницаемость германия  $\epsilon_0 = 16$ , поэтому при  $T = 300 \text{ К}$  дебаевский радиус  $D = 4,8 \text{ мк}$ . Если взять пластинку  $p$ —Ge толщиной  $d = 480 \text{ мк}$ , то соответствующая величина  $\kappa = 10^{-4}$  и, следовательно, в скрещенных  $E$ - и  $B$ -полях, параллельных поверхности пластины, будет появляться резкая граница между проводящим и обедненным слоями. Характерная величина поля  $E_0$  для такой пленки германия равна  $E_0 = 5,4 \cdot 10^3 \text{ В/см}$ . Это означает, что в электрических полях  $E \simeq E_0$  и магнитных полях, при которых циклотронная частота  $\omega$  порядка частоты столкновений  $v$  ( $\mu\text{В/с} \sim 1$ ), в пластине возникает обедненный слой, распространяющийся на всю толщину пленки.

**Неоднородные пленки.** Наиболее интересные эффекты, связанные с перераспределением носителей под действием силы Лоренца, возникают в неоднородных пленках [1, 2], в которых концентрация  $n_0$  и подвижность  $\mu$  зависят от поперечной координаты  $x$ . При этом возникает несимметрия в характеристиках пленки при смене знака магнитного поля, приводящая к невзаимным эффектам [4, 7].

Используя изложенный выше метод решения уравнений (4), (5), можно получить решение для пленки со скачком подвижности и концентрации ионизированных примесей (резкий  $n^+n^-$ -переход). При этом в уравнениях (4), (5) функции  $\eta_0$  и  $\beta$  представляют собой ступенчатые функции

$$\eta_0 = \begin{cases} \eta_{0L}, & \text{при } \xi < \xi_s, \\ \eta_{0R}, & \text{при } \xi > \xi_s, \end{cases} \quad \beta = \begin{cases} \beta_L, & \text{при } \xi < \xi_s, \\ \beta_R, & \text{при } \xi > \xi_s, \end{cases} \quad (13)$$

имеющие разрыв в точке скачка  $\xi = \xi_s$ . В этом случае пленку по толщине можно разбить на две области, в каждой из которых  $\eta_0$  и  $\beta$  явля-

ются постоянными, причем на поверхностях пленки по-прежнему  $\varepsilon(0)=\varepsilon(1)=0$ , а в точке скачка должны быть непрерывны концентрация свободных носителей  $\eta$  и холловское поле  $\varepsilon$ . Обозначим в точке скачка безразмерные концентрацию  $\eta_s$  и холловское поле  $\varepsilon_s$ . Полагая  $\varepsilon_s$  на время свободным параметром\*, можно использовать его в качестве граничного условия,  $\varepsilon(\xi_s)=\varepsilon_s$ , для каждой из областей, где  $\eta_0$  и  $\beta$  — постоянные. Решив уравнения (4), (5) в этих областях, нужно подбором  $\varepsilon_s$  провести сшивку решений в точке скачка таким образом, чтобы функция  $\eta$  была непрерывна, т. е. величина  $\eta(\xi_s)$ , вычисленная для каждой из областей, была одинакова.

При  $\xi \leq \xi_s$  решение уравнений (4), (5) с граничными условиями  $\varepsilon(0)=0$ ,  $\varepsilon(\xi_s)=\varepsilon_s$  можно найти, перейдя с помощью замены  $\eta = \exp(\sigma)$  к уравнению (9) и поступая аналогично вышеизложенному методу его решения. В результате получим

$$-\int_{\sigma_0}^{\sigma} \frac{d\rho}{\{(2/\kappa)[\Psi(\rho)-\Psi(\sigma_0)]+(\beta_r\zeta/\kappa)^2\}^{1/2}} = \xi. \quad (14)$$

Нижний предел интегрирования  $\sigma_0$  подбирается таким образом, чтобы при интегрировании от  $\sigma_0$  до  $\sigma_s$ , связанных между собой соотношением

$$\Psi(\sigma_s) = \Psi(\sigma_0) - (\varepsilon_s/2\kappa)(2\beta_r\zeta - \varepsilon_s), \quad (15)$$

величина интеграла была равна  $\xi_s^{**}$ . Зная  $\sigma_s$ , можно вычислить значение концентрации  $\eta_s$  в точке скачка при  $\xi \rightarrow \xi_s=0$ .

Для области  $\xi_s \leq \xi \leq 1$  необходимо решить уравнения (4), (5) с граничными условиями  $\varepsilon(\xi_s)=\varepsilon_s$ ,  $\varepsilon(1)=0$ . Кроме того, из предположения о непрерывности концентрации носителей  $\eta$  вытекает граничное условие  $\eta(\xi_s)=\eta_s$ . Таким образом, имеем переопределенную систему дифференциальных уравнений, которая будет совместной только в том случае, если правильно подобрано значение холловского поля  $\varepsilon_s$  в точке скачка. Критерием правильности выбора является выполнение соотношения

$$-\int_{\sigma_s}^{\sigma_1} \frac{d\rho}{\{(2/\kappa)[\Psi(\rho)-\Psi(\sigma_s)]+(\varepsilon_s-\beta_r\zeta/\kappa)^2\}^{1/2}} = 1 - \xi_s, \quad (16)$$

где  $\sigma_s$  и  $\sigma_1$  связаны следующим образом:

$$\Psi(\sigma_1) = \Psi(\sigma_s) + (\varepsilon_s/2\kappa)(2\beta_r\zeta - \varepsilon_s). \quad (17)$$

Полученный алгоритм позволяет проводить решение на ЭВМ уравнений (4), (5) для малых параметров  $\kappa$ , что оказывается невозможным при непосредственном интегрировании этих уравнений из-за слишком большого инкремента ( $\sim \kappa^{-1/2}$ ), приводящего к нарастанию решений, не удовлетворяющих граничным условиям  $\varepsilon(0)=\varepsilon(1)=0$ .

Решение уравнений (4), (5) на ЭВМ по предложенному алгоритму для различных вариантов перепадов концентрации и подвижности носителей было проведено вплоть до величин  $\kappa \sim 10^{-5}$ . Результаты решений для параметров  $\eta_{0l}=1$ ,  $\eta_{0r}=0,1$ ,  $\beta_l=0,1$ ,  $\beta_r=0,7$ ,  $\kappa=10^{-3}$ ,  $\xi_s=0,25$  приведены на рис. 5, 6. Из этих рисунков видно, что структура решения существенно изменилась при смене знака магнитного поля, что указывает

\* В качестве свободного параметра вместо  $\varepsilon_0$  можно использовать  $\eta_s$ , но тогда величина  $\varepsilon_s$  будет вычисляться из решения уравнений (5), (6).

\*\* Устранение неоднозначности выбора пределов интегрирования, связанной с наличием нескольких корней в уравнении (15), легко провести из рассмотрения фазового портрета.

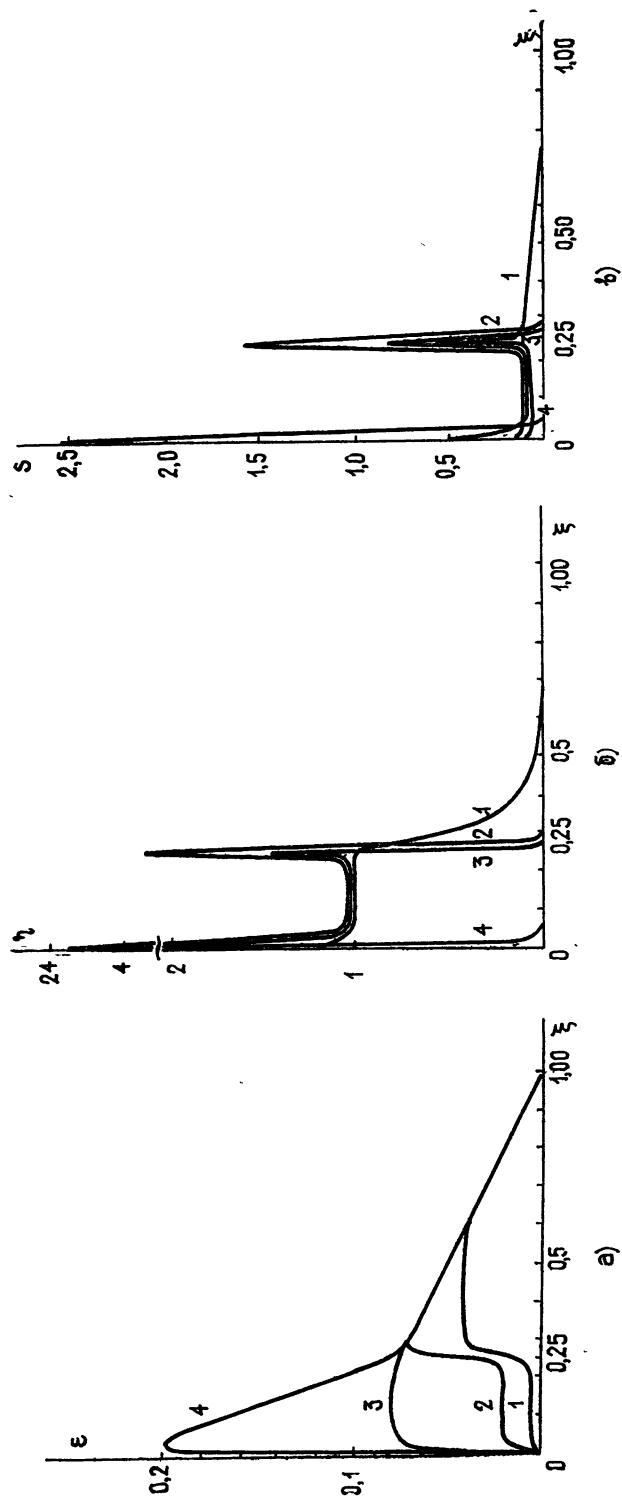


Рис. 5. Холловское поле (а), концентрация (б) и проводимость (в) при стягивании носителей в слой с мизкой подвижностью:  
 $f - \zeta = 0,06; 2 - \zeta = 0,2; 3 - \zeta = 0,6; 4 - \zeta = 2$ .

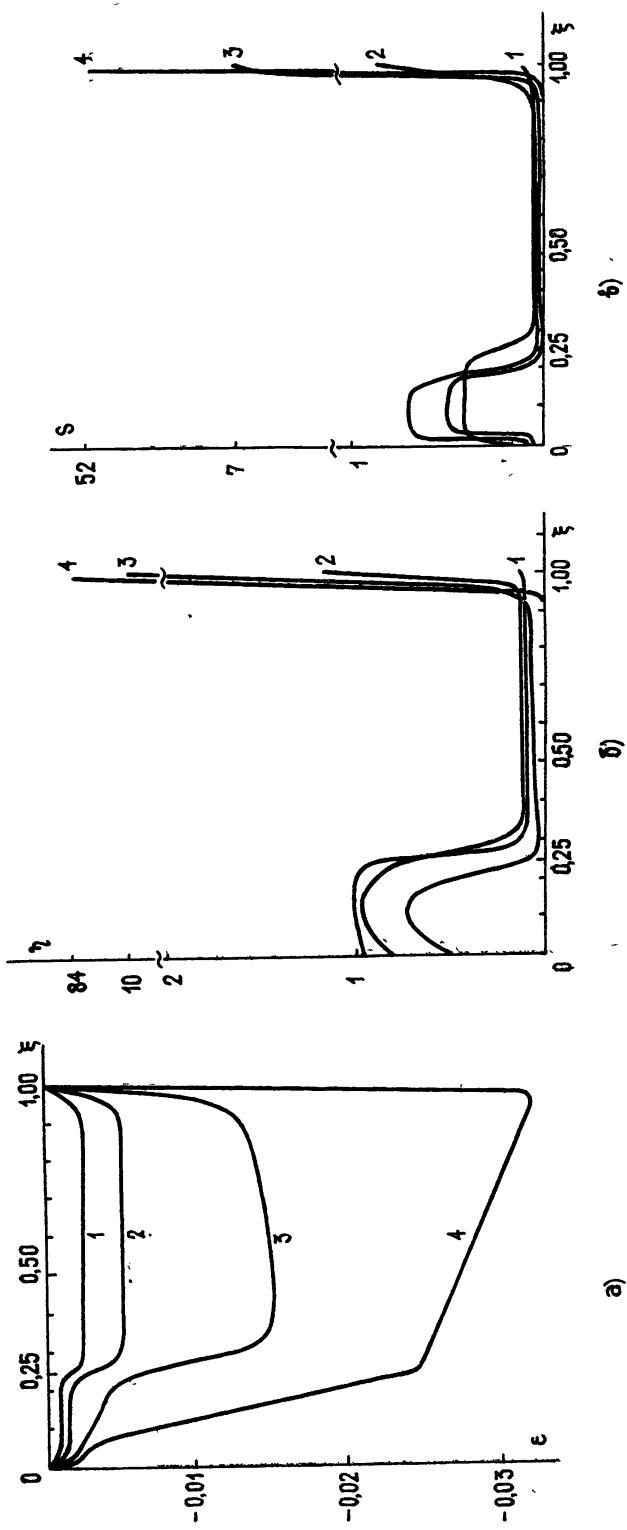


Рис. 6. Холловское поле (а), концентрация (б) и проводимость (в) при стягивании носителей в слой с высокой подвижностью:  
 $I - \zeta = -0,01$ ;  $2 - \zeta = -0,01$ ;  $3 - \zeta = -0,06$ ;  $4 - \zeta = -0,6$ .

нию носителей в область низкой концентрации и высокой подвижности, на возникновение невзаимного эффекта. Рис. 5 соответствует стягивающей противоположной ориентации магнитного поля (рис. 6) сила Лоренца действует в направлении слоя с низкой подвижностью, при этом на границе раздела ( $\xi = \xi_s$ ) может происходить резкое возрастание концентрации свободных носителей и соответствующий выброс в плотности тока. Наличие выброса в плотности тока показывает, что в пленках с резкой неоднородностью  $\eta_0$  и  $\mu$  в скрещенных  $E$ - и  $H$ -полях возможно возникновение слоя с высокой проводимостью (канала) вблизи скачка  $\eta_0$  и  $\mu$ . Так же как и в однородных пленках, здесь происходит отрыв носителей от внешних границ пленки, причем положение внутреннего погранслоя  $\xi_g$  можно качественно определить из соотношения

$$\epsilon(\xi_r) = \int_{\xi_r}^1 \eta_0 d\xi = \beta \zeta.$$

Отметим, что предложенный алгоритм нахождения решения для пленки с резким скачком концентрации и подвижности позволяет решить задачу о распределении поля в пленке с резким переходом внутри нее. В частности, если поверхности пленки достаточно удалены от границы раздела, так что можно считать  $\eta(0) = \eta_{0l}$ ,  $\eta(1) = \eta_{0r}$ , то концентрация (поле) в точке скачка выражается через  $\eta_{0l}$  и  $\eta_{0r}$  (см., например, [9]), поэтому здесь сразу известна величина параметра  $\epsilon_s$ , и, следовательно, распределение концентрации и поля в переходе находится простым интегрированием.

Авторы благодарны А. А. Андронову и В. Р. Когану за многочисленные дискуссии и обсуждение результатов.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Ferry D. K., Heinrich H.—Sol. St. Electron, 1968, **11**, p. 561.
2. Belyantsev A. M., Kozlov V. A., Valov V. A.—Phys. Stat. Sol. (a), 1975, **28**, 279.
3. Рашиба Э. И., Грибников З. С., Кравченко В. Я.—УФН, 1976, **119**, вып. 1, с. 3.
4. Белянцев А. М., Валов В. А., Козлов В. А.—ЖЭТФ, 1976, **70**, вып. 5, с. 569.
5. Белянцев А. М., Валов В. А., Козлов В. А.—Изв. вузов—Радиофизика, 1977, **20**, № 4, с. 623.
6. Жиленис С., Каюлис С., Матулёнис А., Паршялюнас И., Пожела Ю., Пощус А.—Лит. физ. сборник, 1978, **18**, № 3.
7. Белянцев А. М., Козлов В. А., Мазов Л. С., Федоренко Е. Ф.—ФТП, 1983, **17**, с. 655.
8. Мищенко Е. Ф., Розов Н. Х. Дифференциальные уравнения с малым параметром и релаксационные колебания.—М.: Наука, 1975.
9. Кравченко А. Ф., Митин В. В., Скок Э. М. Явления переноса в полупроводниковых пленках.—Новосибирск: Наука, 1979.

Институт прикладной физики  
АН СССР

Поступила в редакцию  
1 апреля 1983 г.

## LAMINATION OF FREE CARRIERS IN SEMICONDUCTOR FILMS PLACED IN CROSSED E AND H FIELDS

*A. M. Belyantsev, A. L. Zheleznyak, V. A. Kozlov*

A problem is analytically solved on distribution of carriers in semiconductor films being in crossed  $E$  and  $H$  field parallel to the surface. It is shown that in sufficiently strong fields there occurred depletion, quasi-neutral and enriched layers with sharp transitions from one layer to the other. The analytical solution of the boundary problem has been found for a film with a sharp jump of the concentration and mobility. It is shown that close to the jump a layer of increased conductivity occurs being enriched by free carriers.