ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XXVII, № 4 РАДИОФИЗИКА 1984

УДК 621.315.592

ДРЕЙФОВАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ В СЛОИСТО-ПЕРИОДИЧЕСКИХ ПОЛУПРОВОДНИКОВЫХ СТРУКТУРАХ

А. А. Булгаков, В. М. Яковенко

Исследуется неустойчивость дрейфовых колебаний в ограниченных периодических полупроводниковых структурах. Получены инкременты нарастания при различных граничных условиях.

1. Поиск новых механизмов неустойчивостей в полупроводниковой плазме и создание на их основе источников электромагнитных колебаний в миллиметровом и субмиллиметровом диапазонах волн является одной из актуальных задач современной радиофизики. С этой точки зрения особый интерес представляют неоднородные полупроводниковые структуры, в которых происходит направленное движение заряженных частиц. В таких неравновесных системах взаимное преобразование собственных колебаний на границах раздела сред приводит к возникновению неустойчивостей [1,2].

Настоящая работа посвящена дальнейшему развитию теории дрейфовой неустойчивости в слоисто-периодических полупроводниках. В отличие от работ [1,2] в ней учитывается изменение скоростей носителей тока в каждом слое и число слоев предполагается ограниченным. Найдены дисперсионные соотношения продольных электромагнитных колебаний и исследована их зависимость от граничных условий.

2. Пусть через слоисто-периодическую среду, представляющую собой набор полупроводниковых пластин, проходит постоянный электрический ток $j_{0l}=en_{0l}v_{0l}$, где e — заряд, n_{0l} и v_{0l} — равновесная концентрация и скорость электронов в каждом слое, $l=1,2$ — индекс, обозначающий различные слои. Направим ось x перпендикулярно границам раздела сред. Тогда линеаризованная система уравнений, описывающая возмущения тока $j_l = e(n_{0l}v_l + n_lv_{0l})$ и электрического поля E_l в каждом слое, имеет вид

$$\frac{\partial v_l}{\partial t} + v_{0l}\frac{\partial v_l}{\partial x} = \frac{e}{m_l}E_l - \frac{T}{m_l n_{0l}}\frac{\partial n_l}{\partial x},$$
$$e\frac{\partial n_l}{\partial t} + \frac{\partial j_l}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial E_l}{\partial x} = \frac{4\pi e n_{0l}}{\varepsilon_{0l}}. \tag{1}$$

Здесь m_l — масса носителей, ε_{0l} — диэлектрическая проницаемость решетки, T — электронная температура, которая предполагается постоянной во всей структуре. В этих уравнениях не учитываются диссипативные процессы, так как в дальнейшем рассматриваются колебания, частоты которых значительно превышают эффективную частоту столкновений носителей. Соотношения (1) необходимо дополнить условиями на границах раздела слоев: непрерывностью неравновесной концентрации и тока [1,2] *.

Решение уравнений (1) ищем в виде $\exp(ik_l x - i\omega t)$, для волновых чисел получаем

$$k_l = \alpha_l \pm \beta_l, \quad \alpha_l = \omega v_{0l} V_{Tl}^{-2}, \quad \beta_l = (\omega^2 - \omega_{pl}^2)^{1/2} V_{Tl}^{-1}, \tag{2}$$

где $\omega_{pl} = (4\pi e^2 n_{0l}/\varepsilon_{0l} m_l)^{1/2}$ — плазменная частота. В этих формулах учитывается, что в полупроводниках скорость дрейфа значительно меньше тепловой скорости носителей V_{Tl}. Поэтому в (2) членами, пропорциональными $(v_{0l}/V_{Tl})^2$, пренебрежено.

Для нахождения дисперсионных соотношений воспользуемся методом характеристических матриц [3]. Характеристическая матрица среды связывает между собой переменные величины при $x=0$ и в произвольном сечении x. Таким образом, если $\mathbf{M}$ — характеристическая матрица слоисто-периодической структуры, состоящей из полупроводниковых слоев, $n(0)$, $j(0)$ и $n(L)$, $j(L)$ — концентрации и токи на ее границах, L — толщина структуры, то дисперсионное уравнение находится из системы уравнений

$$\begin{pmatrix} n(0) \\ j(0) \end{pmatrix} = \mathbf{M} \begin{pmatrix} n(L) \\ j(L) \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Для нахождения $\mathbf{M}$ необходимо с помощью граничных условий получить матрицу $\mathbf{m}$ одного периода и возвести ее в N-ю степень, где N — число периодов структуры ($L=Nd$, d — период). Приведем выражения для компонент матрицы:

$$\begin{gathered} m_{11} = A\,[\cos\psi_1 \cos\psi_2 - (\beta_1/\beta_2)\sin\psi_1 \sin\psi_2 - i(\alpha_1/\beta_1)\sin\psi_1\cos\psi_2 - \\ - i(\alpha_2/\beta_2)\cos\psi_1 \sin\psi_2], \quad m_{12} = -(A/e\omega)\,[i\beta_1 \sin\psi_1\cos\psi_2 + \\ + i\beta_2 \cos\psi_1 \sin\psi_2 + (\alpha_1\beta_2/\beta_1 - \alpha_2\beta_2/\beta_1)\sin\psi_1\sin\psi_2], \\ m_{21} = -e\omega A\,[(i/\beta_1)\sin\psi_1\cos\psi_2 + (i/\beta_2)\cos\psi_1\sin\psi_2 + \\ + (\alpha_2 - \alpha_1)(\beta_1\beta_2)^{-1}\sin\psi_1\sin\psi_2], \\ m_{22} = A\,[\cos\psi_1\cos\psi_2 - (\beta_2/\beta_1)\sin\psi_1\sin\psi_2 + i(\alpha_1/\beta_1)\sin\psi_1\cos\psi_2 + \\ + i(\alpha_2/\beta_2)\cos\psi_1\sin\psi_2], \end{gathered} \tag{4}$$

где $A = \exp[i(\alpha_1 d_1 + \alpha_2 d_2)]$, $\psi_l = \beta_l d_l$, d_l — толщины слоев полупроводников. Возводя матрицу m по теореме Абеле [4] в N-ю степень, получим

$$\begin{gathered} M_{11} = A^{N-1}[m_{11} U_{N-1}(\varphi) - A U_{N-2}(\varphi)], \quad M_{12} = A^{N-1} m_{12} U_{N-1}(\varphi), \\ M_{21} = A^{N-1} m_{21} U_{N-1}(\varphi), \quad M_{22} = A^{N-1}[m_{22} U_{N-1}(\varphi) - A U_{N-2}(\varphi)], \end{gathered} \tag{5}$$

где $U_N(\varphi)$ — функция Чебышева [5], $\varphi = \arccos[(m_{11}+m_{22})/2A]$. Характеристические матрицы $\mathbf{m}$ и $\mathbf{M}$ являются унимодулярными, т. е. их определители равны единице, а собственные числа — взаимно возвратные величины.

Безграничная слоисто-периодическая среда обладает трансляционной симметрией, поэтому концентрация и ток на границах периода

---

* Следует отметить, что при прохождении постоянного тока на границах раздела слоев возникают заряды с поверхностной плотностью n_{0s}. В рассматриваемой задаче при выбранной геометрии они не оказывают влияния на дисперсионные свойства.

должны быть, в соответствии с теоремой Флоке, связаны соотношениями $n(d)=e^{i\varkappa d}n(0)$, $j(d)=e^{i\varkappa d}j(0)$, где $\varkappa$ — волновое число периодической структуры. В результате выражение (3) преобразуется к виду

$$\cos(\varkappa d+\alpha_1 d_1+\alpha_2 d_2)=(2A)^{-1}(m_{11}+m_{22}). \tag{6}$$

Для случая $v_{01}=v_{02}$ оно было исследовано в работе [2]. В статьях [1,2] была предсказана неустойчивость в безграничной полупроводниковой периодической решетке, связанная с неоднородностью среды. Она возникает, когда правая часть соотношения (6) больше единицы. Тогда волновое число $\varkappa$ становится комплексным, что и означает наличие неустойчивости. В данной работе с помощью уравнений (3) исследуются ограниченные периодические структуры.

3. Рассмотрим наиболее простой случай, когда схема опыта такова, что переменный ток на обеих сторонах структуры равен нулю, а концентрация принимает произвольное значение. Если $n(0)=0$, $n(L)=0$, а $j(0)$ и $j(L)$ — произвольны, то результат качественно не отличается от рассматриваемого. Приравнивая нулю определитель системы,

$$\begin{pmatrix} n(0) \\ 0 \end{pmatrix}=\mathbf{M}\begin{pmatrix} n(L) \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{7}$$

получим дисперсионное уравнение для дрейфовых колебаний:

$$m_{21}A^{-1}U_{N-1}(\varphi)=0. \tag{8}$$

Равенство нулю первого сомножителя описывает колебания на одном периоде структуры. Как было отмечено в работе [6], это является следствием симметрии задачи: на границе каждого периода переменный ток обращается в нуль, поэтому соотношения (7) выполняются для любого целого числа периодов. Подставляя m_{21} из (4), получим

$$\beta_1\operatorname{ctg}\beta_1 d_1+\beta_2\operatorname{ctg}\beta_2 d_2=i(\alpha_2-\alpha_1). \tag{9}$$

Справа стоит малая величина, порядка v_{0l}/V_{Tl}, поэтому решение (9) будем искать приближенно, устремив v_{0l}/V_{Tl} к нулю:

$$\beta_{10}\operatorname{ctg}\beta_{10}d_1+\beta_{20}\operatorname{ctg}\beta_{20}d_2=0.$$

Получить аналитические решения этого соотношения невозможно. Рассмотрим только те, для которых учет правой части (9) наиболее существен. Очевидно, таковыми являются колебания с $|\cos\beta_{0l}d_l|\ll 1$. Как видно из уравнения (9), правая часть пропорциональна $\sin\beta_{10}d_1\sin\beta_{20}d_2$. Рассмотрим решения с $\beta_1 d_1=(\pi/2)-\Delta$ и $\beta_2 d_2=(\pi/2)+\Delta$, $|\Delta|\ll 1$. Для Δ получим $\Delta=(\pi/2)(d_1-d_2)d^{-1}$, а для частоты

$$(\omega')^2=\omega_{p1}^2+\left(\pi\frac{V_{T1}}{d}\frac{d_2}{d_1}\right)^2=\omega_{p2}^2+\left(\pi\frac{V_{T2}}{d}\frac{d_1}{d_2}\right)^2. \tag{10}$$

Это выражение применимо, если параметры решетки подчиняются следующему соотношению:

$$\omega_{p1}^2-\omega_{p2}^2=\frac{\pi^2}{d^2}\left(V_{T2}^2\frac{d_1^2}{d_2^2}-V_{T1}^2\frac{d_2^2}{d_1^2}\right).$$

Учтем поправку к частоте, вносимую правой частью уравнения (9),

$$\omega''=i\left(\frac{v_{01}}{V_{T1}^2}-\frac{v_{02}}{V_{T2}^2}\right)\left[\frac{d_1}{V_{T1}^2}+\frac{d_2}{V_{T2}^2}-\frac{d_2-d_1}{dd_1}\left(\frac{d_2^2}{V_{T2}^2}-\frac{d_1^2}{V_{T1}^2}\right)\right]^{-1}. \tag{11}$$

Равенство (11) получено при ряде предположений, наиболее важным из них является следующее: $|\Delta| \gg |(\omega'\omega''d)/(\beta_{0l}V_{Tl}^2)|$. Оно ограничивает знаменатель в формуле (11). Подставляя выражение для Δ, получим оценку для инкремента нарастания:

$$\left|\frac{\omega''}{\omega'}\right| < \left(\frac{\pi r_Д}{2d}\right)^2 \frac{|d_1 - d_2|}{d},$$

$r_Д$ — радиус Дебая. Так, при $V_T \sim 3\cdot 10^7$ *см/с*, $\omega_p \sim 10^{12}$ c^{-1}, $d_1 \sim d_2 \sim \sim d \sim 10^{-4}$ *см* $|\omega''/\omega'| \leqslant 0{,}25$.

Из равенства (11) следует, что при $V_{T1} \sim V_{T2}$ $\omega'' > 0$, если $v_{01} > v_{02}$, т. е. неустойчивость возникает при торможении потока носителей.

Разумеется, наблюдать нарастание возможно, если инкремент (11) превосходит затухание волн, связанное со столкновениями носителей. Относительная величина декремента затухания пропорциональна ν_l/ω_{pl}, где ν_l — эффективная частота столкновений в l-м слое. Таким образом, для исследования предсказываемых эффектов слоисто-периодическая среда должна быть составлена из полупроводников с высокой подвижностью, например, InSb ($\nu/\omega_p \leqslant 10^{-1}$ [8]) или халькогенидов свинца ($\nu/\omega_p < 3\cdot 10^{-2}$ [9]).

Уравнение $U_{N-1}(\varphi) = 0$ не приводит к неустойчивости, так как φ в выбранном приближении не зависит от дрейфовой скорости v_{0l} (см. формулу (5)).

Исследуем поведение изучаемой структуры при помещении ее в резонатор. В этом случае, как и в безграничной среде, переменные концентрация и ток в конце и начале решетки отличаются только фазовым множителем:

$$\begin{pmatrix} n(0) \\ j(0) \end{pmatrix} = \mathbf{M} \begin{pmatrix} n(0)\, e^{i\chi L} \\ j(0)\, e^{i\chi L} \end{pmatrix}. \qquad (12)$$

Учитывая, что $\det|\mathbf{M}| = 1$, и воспользовавшись свойствами функции Чебышева [5], получим

$$\cos(\chi L N^{-1} + \alpha_1 d_1 + \alpha_2 d_2) = (2A)^{-1}(m_{11} + m_{22}).$$

Это соотношение полностью совпадает с выражением (6), если $\varkappa = \chi$. Поэтому эффекты, предсказанные в работах [1,2], можно наблюдать на ограниченных периодических структурах, помещенных в резонатор.

В заключение рассмотрим прохождение дрейфовых колебаний через ограниченную периодическую среду в режиме усиления. Это означает, что начало и конец структуры не связаны никакими соотношениями. Для простоты будем предполагать, что решетка из полупроводников заключена между средой *2* и средой *1*. Тогда коэффициенты отражения и прохождения дрейфовых волн равны

$$R = \frac{U_N(\varphi) - U_{N-1}(\varphi)\exp(i\psi_1 - i\psi_2)}{U_N(\varphi) - U_{N-1}(\varphi)\exp(i\psi_1 + i\psi_2)}\, \frac{\alpha_1 + \beta_1 - \alpha_2 - \beta_2}{\alpha_1 + \beta_1 - \alpha_2 + \beta_2},$$

$$T = \frac{2\beta_2 \exp\{-iN[(\alpha_1 + \beta_1)d + \alpha_1 d_1 + \alpha_2 d_2]\}}{[U_N(\varphi) - U_{N-1}(\varphi)\exp(i\psi_1 + i\psi_2)](\alpha_1 + \beta_1 - \alpha_2 + \beta_2)}. \qquad (13)$$

В дальнейшем воспользуемся известной формулой

$$|R_0|^2 + (\beta_1/\beta_2)|T_0|^2 = 1$$

(индекс «0» означает, что в соотношениях (13) следует положить $v_{0l} = 0$), выражающей тот факт, что плотность потока энергии падающей волны равна сумме потоков отраженной и прошедшей волн (см., например, [7], § 25). В выполнении равенства (13) в нашем случае легко убедиться непосредственной подстановкой. Учитывая члены, пропорциональные v_{0l}/V_{Tl}, из формулы (13) получим

$$|R|^2 + (\alpha_1 + \beta_1)(\alpha_2 + \beta_2)^{-1}|T|^2 = \\ = 1 + \frac{\beta_1}{\beta_2}|T_0|^2\left(\frac{\alpha_1}{\beta_1} - \frac{\alpha_2}{\beta_2} + \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\beta_1 + \beta_2}\right) - |R_0|^2\frac{2(\alpha_1 - \alpha_2)\beta_2}{\beta_1^2 - \beta_2^2}. \tag{14}$$

Отсюда видно, что при прохождении заряженных частиц через периодическую полупроводниковую структуру в ней протекают процессы преобразования энергии поступательного движения частиц в энергию дрейфовых колебаний и обратно. Для частот, при которых коэффициент отражения равен нулю, имеет место нарастание колебаний, если

$$\alpha_1 > \alpha_2(\beta_1^2 + 2\beta_1\beta_2)(\beta_2^2 + 2\beta_1\beta_2)^{-1}. \tag{15}$$

Так как рассмотренные эффекты происходят вблизи плазменных частот ω_{pl}, то $|\beta_1|$ и $|\beta_2|$ — величины одного порядка, и, следовательно, соотношение (15) аналогично условию нарастания в формуле (11).

ЛИТЕРАТУРА

1. Yakovenko V M. — Solid Stat. Commun., 1981, **39**, p. 847.
2. Ханкина С. И, Яковенко В. М — УФЖ, 1982, 27, № 1, с. 138.
3. Борн М., Вольф Э. Основы оптики — М.: Наука, 1973, с. 719.
4. Abeles F. — Ann. Phys., 1950, **5**, p. 596, 706.
5. Справочник по специальным функциям. / Под ред. М. Абрамовица и И. Стиган — М: Наука, 1979, с. 830
6. Bulgakov A. A. — Solid Stat. Commun, 1981, **38**, p. 1273.
7. Ландау Л. Д, Лифшиц Е. М. Квантовая механика. — М.: Физматгиз, 1963, с. 702.
8. Гершензон Е. М., Куриленко И. Н., Литвак-Горская Л. Б., Рабинович Р. И. — ФТП, 1973, **7**, № 8, с 1501.
9. Равич Ю. И., Ефимова Б. А., Смирнов И. А. Методы исследования полупроводников в применении к халькогенидам свинца PbTe, PbSe, PbS. — М: Наука, 1968, с. 383.

Институт радиофизики и электроники
АН УССР

Поступила в редакцию
23 мая 1983 г.

DRIFT INSTABILITY IN LAMINATED-PERIODIC SEMICONDUCTOR STRUCTURES

A. A. Bulgakov, V. M. Yakovenko

An instability of drift oscillation in limited periodic semiconductor structures is investigated. Increase increments for different types of boundary conditions are obtained.