

УДК 621.371.165

ДИФРАКЦИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН НА ПРЯМОУГОЛЬНОЙ КЛИНОВИДНОЙ СТРУКТУРЕ

Г. И. Макаров, А. П. Созонов

Рассматривается задача дифракции электромагнитных волн на системе двух прямоугольных клиньев: идеально проводящего и клина с конечным значением относительной диэлектрической проницаемости ϵ'_m , имеющего с первым общую грань. Для компоненты Фурье дифракционного поля сформулирована краевая задача Римана со сдвигом, которая сведена к интегральному уравнению типа свертки на полуоси с ядром в виде суммы разностного и регулярного ядер. В случае $|\epsilon'_m| \gg 1$ получено аналитическое решение задачи.

Изучение дифракции электромагнитных волн на клиновидных структурах представляет интерес для многих задач электродинамики, распространения радиоволн, теории согласования волноводов и т. д. Эта проблема в силу своей актуальности давно привлекает внимание исследователей, однако до сих пор не найдено удовлетворительного ее решения в замкнутом виде. В настоящее время известно лишь решение задачи Зоммерфельда о дифракции на бесконечно проводящем клине [1] и ее обобщение Малюжинцем на случай клина с импедансными гранями [2].

Для частного случая прямоугольной геометрии клиновидной структуры задача дифракции сводится, как показано в работе [3], к системе одномерных сингулярных интегральных уравнений. Однако аналитическое решение системы, с помощью которого можно описать поведение поля, в работе не получено.

Целью настоящей работы является построение аналитического решения задачи дифракции на прямоугольной структуре.

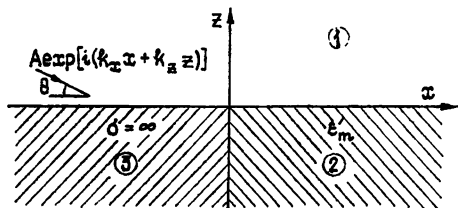


Рис. 1.

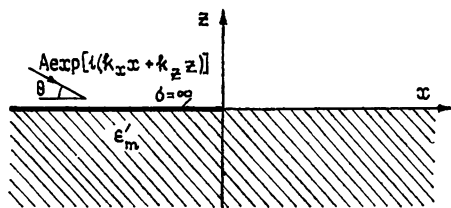


Рис. 2.

Рассмотрим систему (рис. 1), которая характеризуется следующей зависимостью относительной диэлектрической проницаемости ϵ'_m от координат:

$$\epsilon'_m(x, z) = \begin{cases} \epsilon'_m(1) = 1, & z > 0, & -\infty < x < \infty \\ \epsilon'_m(2) = \epsilon'_m, & z < 0, & x > 0 \\ \epsilon'_m(3) = i\infty, & z < 0, & x < 0 \end{cases} .$$

Из области i перпендикулярно ребру структуры под углом θ к грани идеально проводящего клина падает плоская волна вертикальной поляризации. Отличные от нуля составляющие падающего поля имеют вид

$$H_y^n = A \exp [i (k_x x + k_z z)], \quad E_z^n = -\frac{1}{i\omega} \frac{\partial H_y^n}{\partial x}, \quad E_x^n = -\frac{1}{i\omega} \frac{\partial H_y^n}{\partial z}. \quad (1)$$

Здесь $k_x = k \cos \theta$, $k_z = -k \sin \theta$, $0 \leq \theta < \pi/2$, k — волновое число в вакууме. Зависимость поля от времени задается в виде $e^{-i\omega t}$.

Поскольку структура и падающая волна не зависят от координаты y , рассеянное поле вертикально поляризовано. Так же как и для падающего поля, все составляющие полного поля можно выразить через магнитную составляющую $H_y^{(j)}$:

$$E_x^{(j)} = -\frac{1}{i\omega \epsilon_m^{(j)}} \frac{\partial H_y^{(j)}}{\partial z}, \quad E_z^{(j)} = -\frac{1}{i\omega \epsilon_m^{(j)}} \frac{\partial H_y^{(j)}}{\partial x}, \quad (2)$$

где j — номер соответствующей области структуры.

Для выполнения теоремы единственности решение задачи дифракции на клиновидной структуре должно удовлетворять условию на ребре, которое заключается в том, что в окрестности ребра ни одна составляющая поля не может возрасть быстрее, чем $r^{-1+\tau}$ ($\tau > 0$, r — расстояние от ребра). Характер поля у ребра клиновидной структуры соответствует характеру статического поля. Используя решение статической задачи [4], легко определить поведение поля у ребра изучаемой структуры:

$$H_y^{(j)} \sim r^{1-\beta_0}, \quad E_x^{(j)}, \quad E_z^{(j)} \sim r^{-\beta_0}, \quad j = 1, 2,$$

где параметр β_0 находится из уравнения

$$\cos \pi \beta_0 = \epsilon_m' / (1 + \epsilon_m'), \quad \text{Re } \beta_0 < 1. \quad (3)$$

Решение задачи будем строить методом интегрального уравнения. Для нормальной производной на полуплоскости ($z=0$, $x>0$) магнитной составляющей $H_y^{(1)}$, удовлетворяющей уравнению Гельмгольца, нетрудно получить с помощью теоремы Грина уравнение типа свертки на полуоси $[0, \infty)$:

$$A e^{ik_x x} + \frac{i}{4} \int_0^\infty \{ H_0^{(1)}(k|x-x'|) + \epsilon_m' [H_0^{(1)}(k_2|x-x'|) + H_0^{(1)}(k_2|x+x')]\} \frac{\partial H_y^{(1)}}{\partial z} \Big|_{z=0} dx' = 0, \quad (4)$$

где $k_2 = k \sqrt{\epsilon_m'}$, $H_0^{(1)}$ — функция Ханкеля первого рода нулевого порядка. Уравнение (4) стандартной процедурой [5] сводится к краевой задаче Римана со сдвигом

$$\frac{2A}{k_x + \mu} + \left\{ F_+(\mu) G(\mu) + F_+(-\mu) \frac{\epsilon_m'}{\sqrt{k_2^2 - \mu^2}} \right\} + L_-(\mu) = 0, \quad (5)$$

поставленной на вещественной оси для аналитических функций $F_+(\mu)$ и $L_-(\mu)$, регулярных соответственно в верхней и нижней полуплоскостях комплексной плоскости (μ). Здесь

$$F_+(\mu) = \int_0^{\infty} \frac{\partial H_y^{(1)}}{\partial z} \Big|_{z=0} e^{i\mu x} dx,$$

$L_-(\mu)$ — некоторая неизвестная функция,

$$G(\mu) = 1/\sqrt{k^2 - \mu^2} + \varepsilon'_m/\sqrt{k_2^2 - \mu^2}.$$

Ветви двузначных функций $\sqrt{k^2 - \mu^2}$, $\sqrt{k_2^2 - \mu^2}$ фиксированы условием

$$\text{Im} \sqrt{k^2 - \mu^2} \geq 0, \quad \text{Im} \sqrt{k_2^2 - \mu^2} \geq 0.$$

Решение краевой задачи $F_+(\mu)$, согласно условию на ребре, следует искать в классе функций, убывающих на бесконечности, как $\mu^{-1+\beta_0}$.

Задача Римана с краевым условием (5) не имеет решения в замкнутом виде [6]. В общем случае задача со сдвигом $\alpha(\mu) = -\mu$ сводится к системе двух сингулярных интегральных уравнений без сдвига [7]. Рассматриваемая краевая задача может быть преобразована к эквивалентному интегральному уравнению в свертках с ядром в виде суммы разностного и регулярного ядер. Следуя методу, изложенному в [8], нетрудно построить формальное решение краевой задачи в виде интегрального уравнения для функции $F_+(\mu)$:

$$F_+(\mu) = -\frac{2A}{(k_x + \mu)G_+(k_x)G_+(\mu)} + \frac{\varepsilon'_m}{i\pi G_+(\mu)} \int_{k_2}^{\infty} \frac{F_+(\beta) d\beta}{\sqrt{k_2^2 - \beta^2} G_+(\beta) (\beta + \mu)}, \quad (6)$$

где $G_+(\mu)$ — регулярная и не имеющая нулей в верхней полуплоскости функция, полученная в результате факторизации на оси $(-\infty, \infty)$ функции $G(\mu)$ (см. Приложение). Полученное уравнение сводится в результате замены переменных $\xi = \ln(\mu/k_2)$, $\eta = \ln(\beta/k_2)$ и введения новой неизвестной функции

$$f(\xi) = -F_+(k_2 e^\xi) e^{\xi/2} (e^{2\xi} - 1)^{-1/4} \sqrt{1 + \varepsilon'_m} (\sqrt{k_2} G_+(k_x)/2A)$$

к искомому уравнению в свертках

$$f(\xi) = g(\xi) - \lambda \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{f(\eta) d\eta}{2 \text{ch}((\xi - \eta)/2)} - \lambda \int_0^{\infty} K(\xi, \eta) f(\eta) d\eta, \quad (7)$$

где

$$K(\xi, \eta) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{2 \text{ch}((\xi - \eta)/2)} \times \left(\frac{\varepsilon'_m + 1}{G_+(k_2 e^\xi) G_+(k_2 e^\eta) \sqrt[4]{e^{2\xi} - 1} \sqrt[4]{e^{2\eta} - 1}} - 1 \right),$$

$$\lambda = \varepsilon'_m/(1 + \varepsilon'_m), \quad g(\xi) = \frac{e^{\xi/2}}{\sqrt[4]{e^{2\xi} - 1}} \frac{1}{e^\xi + \cos \theta/\sqrt{\varepsilon'_m}} \frac{\sqrt{1 + \varepsilon'_m}}{\sqrt{k_2} G_+(k_2 e^\xi)}.$$

Ядро $K(\xi, \eta)$ регулярно, поскольку функция $G_+(\mu)$ ведет себя при $\mu \rightarrow \infty$, как $G_{0+}(\mu) \sim \sqrt{\epsilon'_m + 1} / \sqrt{k_2 + \mu}$ (см. Приложение).

Заметим, что свободный член уравнения (6) представляет собой решение краевой задачи, соответствующей дифракции плоской волны на бесконечно проводящей полуплоскости, лежащей на полупространстве с относительной диэлектрической проницаемостью ϵ'_m (рис. 2).

Уравнение (7) можно решить методом замены регулярной части ядра K на близкое вырожденное ядро $K_N = \sum_{n=1}^N U_n(\xi) V_n(\eta)$ [9, 10]. Уравнение с вырожденной регулярной частью ядра K_N имеет решение в замкнутой форме, которое представляется в виде линейной комбинации функций f_0, f_1, \dots, f_N :

$$\varphi_N = f_0 + \sum_{n=1}^N c_n f_n, \quad (8)$$

являющихся решениями уравнений

$$f_n(\xi) = h_n(\xi) - \lambda \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{f_n(\eta) d\eta}{2 \operatorname{ch} [(\xi - \eta)/2]}, \quad (9)$$

где $h_0(\xi) = g(\xi)$, $h_n(\xi) = U_n(\xi)$ ($n=1, 2, \dots, N$). Коэффициенты c_n определяются из соответствующей вырожденному ядру K_N системы линейных алгебраических уравнений

$$c_n = a_n + \sum_{m=1}^N \tau_{nm} c_m \quad (n = 1, 2, \dots, N), \quad (10)$$

где τ_{nm} и a_n — элементы матрицы и столбца свободных членов системы. Характер системы при достаточной близости вырожденного ядра K_N к регулярному ядру K зависит от числа λ . Поскольку число $\lambda = \epsilon'_m / (1 + \epsilon'_m)$ не является характеристическим для уравнения (7), то линейная система (10) регулярна. Отсюда следует, что близость вырожденного ядра K_N к регулярному K влечет близость функции $\varphi_N(\xi)$ к решению уравнения (7).

Решение уравнения (9) строится стандартным методом сведения к краевой задаче Римана [5, 11]. Оно может быть выражено в следующей форме:

$$f_n(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \operatorname{ctg} \pi \beta_0 \sum_{m=0}^{\infty} \{ \gamma_m(\beta_0) \exp[-\xi(2m+1+\beta_0)] - \gamma_m(-\beta_0) \exp[-\xi(2m+1-\beta_0)] \}, \quad (11)$$

где

$$\gamma_m(\beta_0) = \frac{\Gamma(3/2 + 2m + \beta_0) 2^{-(2m+1+\beta_0)}}{\Gamma(m+1) \Gamma(m+1+\beta_0)} S_+(-i(2m+1+\beta_0)),$$

$$S_+(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_0^{\infty} h(\xi) e^{t\xi} d\xi \right) \times$$

$$\times \left\{ \sqrt{2\pi} \frac{\Gamma(1/2 + it)}{\Gamma[(1+it-\beta_0)/2] \Gamma[(1+it+\beta_0)/2]} \right\}^{-1} 2^{it} \frac{dt}{t-x} \quad (\operatorname{Im} x > 0),$$

$\beta_0 = (1/\pi) \arccos [\epsilon'_m / (1 + \epsilon'_m)]$, $0 < \operatorname{Re} \beta_0 < 1$, $\Gamma(t)$ — гамма-функция.

Заметим, что функции $\varphi_N(\xi)$, приближающие решение уравнения (7), удовлетворяют условию на ребре.

Из указанного алгоритма решения уравнения (7) следует, что решение исходного уравнения (6) представляется в окрестности бесконечно удаленной точки в виде сходящегося ряда

$$F_+(\mu) = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ a_n \left(\frac{k_2}{\mu} \right)^{2n+1+\beta_0} - b_n \left(\frac{k_2}{\mu} \right)^{2n+1-\beta_0} \right\}, \quad (12)$$

которому соответствует, как нетрудно показать, выражение для $\partial H_y^{(j)}/\partial z|_{z=0}$ в окрестности ребра в виде ряда Мейкснера [8]. Таким образом, предложенная схема обосновывает метод Мейкснера для рассматриваемой задачи.

Описанный алгоритм позволяет строить решение задачи для произвольного значения параметра ϵ'_m . Недостатком метода является необходимость проводить все достаточно громоздкие вычисления для каждого ϵ'_m . Исключение составляет случай $|\epsilon'_m| \gg 1$, когда можно построить некоторую универсальную для всех больших значений параметра $|\epsilon'_m|$ кусочно-аналитическую функцию $F_a(\mu)$, аппроксимирующую решение уравнения (6).

Функцию $F_a(\mu)$ будем искать в классе функций, удовлетворяющих условию на ребре и близких к $F_+(\mu)$ на всей плоскости. Разобьем комплексную плоскость (μ) на две области окружностью радиуса $|k_2|$ с центром в начале координат и обозначим

$$F_a(\mu) = \begin{cases} F_{a1}(\mu), & |\mu/k_2| \geq 1 \\ F_{a0}(\mu), & |\mu/k_2| < 1 \end{cases}. \quad (13)$$

В качестве функции $F_{a1}(\mu)$ возьмем решение уравнения

$$F_{a1}(\mu) = -\frac{2A}{G_+(k_x)\mu G_{0+}(\mu)} + \frac{\epsilon'_m}{i\pi} \frac{1}{G_{0+}(\mu)} \int_{k_2}^{\infty} \frac{F_{a1}(\beta) d\beta}{G_{0+}(\beta) \sqrt{k_2^2 - \beta^2} (\beta + \mu)}, \quad (14)$$

которое получено из уравнения (6) аппроксимацией входящих в него функций

$$G_+(\mu) \simeq G_{0+}(\mu) \equiv \sqrt{\epsilon'_m + 1} / \sqrt{k_2 + \mu}, \quad G_+(\beta) \simeq G_{0+}(\beta), \\ 1/(k_x + \mu) \simeq 1/\mu$$

близкими им в области $|\mu/k_2| \geq 1$ (см. Приложение).

Поскольку ядра уравнений (6) и (14) совпадают в точке их нерегулярности ($\mu = \infty, \beta = \infty$), уравнение (14) решается тем же методом, что и уравнение (6). Эквивалентное (14) уравнение типа свертки имеет вид

$$f_a(\xi) = g_a(\xi) - \lambda \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{f_a(\eta) d\eta}{2 \operatorname{ch} [(\xi - \eta)/2]} - \lambda \int_0^{\infty} K_a(\xi, \eta) f_a(\eta) d\eta, \quad (15)$$

где

$$g_a(\xi) = e^{-\xi/2} \sqrt[4]{(e^{\xi} + 1)/(e^{\xi} - 1)},$$

$$f_a(\xi) = -F_{a1}(k_2 e^{\xi}) \frac{\sqrt{1 + \epsilon'_m}}{\sqrt[4]{1 - e^{-2\xi}}} \left(\frac{\sqrt{k_2} G_+(k_x)}{2A} \right),$$

$$K_a(\xi, \eta) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{2 \operatorname{ch} [(\xi - \eta)/2]} \left[\sqrt[4]{\frac{e^\xi + 1}{e^\xi - 1}} \sqrt[4]{\frac{e^\eta + 1}{e^\eta - 1}} - 1 \right].$$

Заметим, что уравнение (15) может быть получено из точного уравнения (7) аппроксимацией только регулярной части ядра $K(\xi, \eta)$ и свободного члена $g(\xi)$. Поэтому в силу регулярности системы (10) коэффициенты c_1, c_2, \dots, c_N , определяющие приближенное решение уравнения (15), отличаются от получаемых в результате решения исходного уравнения (7) на величины порядка $1/\sqrt[4]{\epsilon'_m}$, соответствующие точности аппроксимации. Коэффициенты c_1, c_2, \dots, c_N могут быть разложены по обратным степеням большого параметра ϵ'_m . Первый член этого разложения $c_{01}, c_{02}, \dots, c_{0N}$ не зависит от ϵ'_m и представляет, таким образом, универсальное решение системы (10) в случае $|\epsilon'_m| \gg 1$.

Регулярное ядро K_a хорошо приближается вырожденными ядрами вида

$$K_{aN}(\xi, \eta) = \frac{1}{\pi} \frac{e^{-\xi/4}}{\sqrt[4]{e^\xi - 1}} \frac{e^{-\eta/4}}{\sqrt[4]{e^\eta - 1}} H_N(\xi, \eta), \quad (16)$$

где $H_N(\xi, \eta) = \sum_{n=0}^{N-1} d_n(\eta) \hat{T}_n(1-2e^{-\xi})$ представляет отрезок разложения функции

$$H(\xi, \eta) = \frac{e^{(\xi+\eta)/4}}{2 \operatorname{ch} [(\xi - \eta)/2]} \left[\sqrt[4]{(e^\xi + 1)(e^\eta + 1)} - \sqrt[4]{(e^\xi - 1)(e^\eta - 1)} \right]$$

по переменной ξ в равномерно сходящийся ряд по полиномам Чебышева $\hat{T}_n(1-2e^{-\xi})$.

Приближенное решение уравнения (15) представляется в виде линейной комбинации

$$\varphi_{aN}(\xi) = f_0(\xi) + \sum_{n=1}^N c_n f_n(\xi), \quad (17)$$

где

$$f_0(\xi) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{{}_2F_1(-1/4; -m; 3/4 - m; -1) \Gamma(m+1/4)}{\Gamma(m+1) \Gamma(1/4)} \Psi_m(\xi),$$

$$f_n(\xi) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Gamma(m+1/4) \Psi_{m+n-1}(\xi)}{\Gamma(1/4) \Gamma(m+1)}, \quad n = 1, 2, \dots, N,$$

$$\Psi_m(\xi) = -\frac{1}{\pi} \operatorname{ctg} \pi \beta_0 \frac{\Gamma[(m+3/2-\beta_0)/2] \Gamma[(m+3/2+\beta_0)/2]}{\Gamma(m+1)} 2^{m+1/2} \times \\ \times \sum_{p=0}^{\infty} \left\{ \frac{\Gamma(3/2+2p+\beta_0)}{\Gamma(p+1+\beta_0) \Gamma(p+1)} \frac{2^{-(2p+1+\beta_0)} e^{-\xi(2p+1+\beta_0)}}{(2p+1/2+\beta_0-m)} - \frac{\Gamma(3/2+2p-\beta_0)}{\Gamma(p+1-\beta_0) \Gamma(p+1)} \frac{2^{-(2p+1-\beta_0)} e^{-\xi(2p+1-\beta_0)}}{(2p+1/2-\beta_0-m)} \right\},$$

${}_2F_1$ — гипергеометрический ряд. Функции $\Psi_m(\xi)$ могут быть выражены в более универсальной форме через гипергеометрические ряды:

$$\Psi_m(\xi) = - \frac{1}{\sin \pi \beta_0} \frac{\Gamma[(m+3/2-\beta_0)/2] \Gamma[(m+3/2+\beta_0)/2]}{\Gamma(m+1)} 2^{m+1/2} \times$$

$$\times e^{-\xi(m+1/2)} \left(e^\xi \frac{d}{d\xi} \right)^m \left\{ \frac{2^{-(1+\beta_0)} e^{-\xi(1/2+\beta_0)}}{\Gamma(1/2+m-\beta_0)} {}_2F_1 \left(\frac{1}{4} - \frac{m}{2} + \frac{\beta_0}{2}; \frac{3}{4} - \frac{m}{2} + \frac{\beta_0}{2}; 1 + \beta_0; e^{-2\xi} \right) / \Gamma(1+\beta_0) - \frac{2^{-(1-\beta_0)} e^{-\xi(1/2-\beta_0)}}{\Gamma(1/2+m+\beta_0)} \times \right.$$

$$\left. \times {}_2F_1 \left(\frac{1}{4} - \frac{m}{2} - \frac{\beta_0}{2}; \frac{3}{4} - \frac{m}{2} - \frac{\beta_0}{2}; 1 - \beta_0; e^{-2\xi} \right) / \Gamma(1-\beta_0) \right\}. \quad (18)$$

Результаты вычислений коэффициентов $c_{01}, c_{02}, \dots, c_{0N}$ позволяют сделать вывод о быстрой сходимости функций $\varphi_{aN}(\xi)$ к решению уравнения (15). Так, для $N=3$ $c_{01} = -2,3$; $c_{02} = 1,6 \cdot 10^{-1}$; $c_{03} = -4,9 \cdot 10^{-2}$.

Таким образом, построена аппроксимирующая функция $F_a(\mu)$ в области $|\mu/k_2| \geq 1$ в виде линейной комбинации

$$F_{a1}(\mu) = - \frac{2A}{\sqrt{k_2} G_+(k_x) \sqrt{1+\epsilon'_m}} \sqrt{1 - \left(\frac{k_2}{\mu}\right)^2} \left[f_0 \left(\ln \left(\frac{\mu}{k_2} \right) \right) + \right.$$

$$\left. + \sum_{n=1}^N c_{0n} f_n \left(\ln \left(\frac{\mu}{k_2} \right) \right) \right], \quad (19)$$

коэффициенты которой c_{0n} отличаются от коэффициента c_n , получаемых в результате решения точного уравнения (7), на величины порядка $1/\sqrt{\epsilon'_m}$. С той же точностью можно приблизить функцию $F_+(\mu)$ на оставшейся части плоскости $|\mu/k_2| < 1$ с помощью уравнения (6), подставив в правую часть уравнения известные аппроксимирующие функции $F_{a1}(\beta)$, $G_{a+}(\mu)$, $G_{a+}(\beta)$ (см. Приложение). Учитывая, что $F_{a1}(\beta)$ удовлетворяет уравнению (14), получим

$$F_{a0}(\mu) = F_{a1}(\mu) \frac{G_{0+}(\mu)}{G_{a+}(\mu)} -$$

$$- \frac{2A}{G_+(k_x) G_{a+}(\mu)} \left(\frac{1}{k_x + \mu} - \frac{1}{\mu} \right). \quad (20)$$

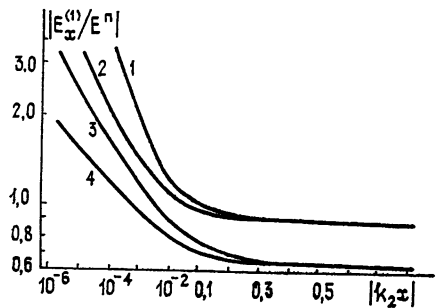


Рис. 3.

Аппроксимирующая функция $F_a(\mu)$ терпит разрыв на окружности $|\mu/k_2|=1$. Нетрудно убедиться, что величина разрыва имеет порядок $1/\sqrt{\epsilon'_m}$.

Приближенное решение уравнения (6) можно проверить с помощью импедансного решения задачи дифракции на рассматриваемой клиновидной структуре [12]. Функция $F_a(\mu)$ совпадает с соответствующей функцией импедансной задачи в окрестности точки $\mu = -k\sqrt{\epsilon'_m/(1+\epsilon'_m)}$ с точностью до величин порядка $1/\sqrt{\epsilon'_m}$ и, таким образом, правильно описывает поле вдали от ребра $|kx| > 1$.

Итак, построена аппроксимирующая функция $F_a(\mu)$, близкая к решению уравнения (6). Тем самым определена нормальная производная магнитной составляющей поля на поверхности $z=0$:

$$\left. \frac{\partial H_y^{(1)}}{\partial z} \right|_{z=0} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_+(\mu) e^{-\mu x} d\mu, \quad (21)$$

с помощью которой, как известно, можно найти поле во всей клиновидной структуре.

В окрестности ребра структуры, в соответствии с решением статической задачи, составляющие электрического поля имеют сингулярность, тогда как магнитное поле регулярно всюду. На рис. 3 представлено распределение интенсивности тангенциальной составляющей электрического поля вдоль грани ($z=0, x>0$) для различных значений ϵ'_m (кривая 1 — $\epsilon'_m = 5$, 2 — $\epsilon'_m = 5e^{i\pi/2}$, 3 — $\epsilon'_m = 10$, 4 — $\epsilon'_m = 10e^{i\pi/2}$). Поле вдали от ребра хорошо описывается в импедансном приближении.

Данная статья является частью диссертационной работы А. П. Созонова. Общее руководство осуществил Г. И. Макаров. Все расчеты выполнил А. П. Созонов.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Факторизация функции $G(\mu) = 1/\sqrt{k^2 - \mu^2 + \epsilon'_m} / \sqrt{k_2^2 - \mu^2}$.

Решение краевой задачи (5) основывается на факторизации функции $G(\mu)$ на оси $(-\infty, \infty)$, т. е. на представлении ее в виде произведения двух функций $G_+(\mu)$ и $G_-(\mu)$, регулярных и не имеющих нулей соответственно в верхней и нижней полуплоскостях, включая границу.

Положим, что в областях 1 и 2 клиновидной структуры (рис. 1) есть потери: $\text{Im } k > 0, \text{Im } k_2 > 0$. Тогда существует единственное решение задачи факторизации на оси $(-\infty, \infty)$, которое может быть выражено в следующей форме:

$$G_+(\mu) = G_-(-\mu) = G_{0+}(\mu) \exp\{-(1/2\pi i) I(\mu)\}, \quad (\text{П.1})$$

где

$$I(\mu) = \int_1^{\sqrt{\epsilon'_m}} \ln \left[\frac{\sqrt{1-t^2 \epsilon'_m} + \sqrt{\epsilon'_m - t^2}}{\sqrt{1-t^2 \epsilon'_m} - \sqrt{\epsilon'_m - t^2}} \right] \frac{dt}{t + \mu/k},$$

$$G_{0+}(\mu) = \frac{\sqrt{\epsilon'_m + 1}}{\sqrt{k_2 + \mu}},$$

функция $\ln x$ понимается в смысле главного значения. Функция $G_+(\mu)$ представляет некоторую сложную трансцендентную функцию, имеющую в нижней полуплоскости две точки ветвления $\mu = -k, \mu = -k_2$ и нуль $\mu = -k \sqrt{\epsilon'_m/(1 + \epsilon'_m)}$. Асимптотика функции $G_+(\mu)$, как нетрудно убедиться с помощью (П.1), совпадает с асимптотикой $G_{0+}(\mu)$.

В случае $|\epsilon'_m| \gg 1$ можно построить простую аппроксимацию функции $G_+(\mu)$, которая основывается на том, что функции $G_+(\mu)$ и $G_{0+}(\mu)$ близки не только для $\mu \rightarrow \infty$, но и на всей комплексной плоскости, за исключением некоторой окрестности D точек $\mu = -k$ и $\mu = -k \sqrt{\epsilon'_m/(1 + \epsilon'_m)}$. В качестве области D возьмем круг, расположенный в левой полуплоскости, с центром в точке $\mu = -k$, имеющий радиус r_D нулевого порядка по ϵ'_m :

$$1/|V\epsilon'_m| \ll r_D/|k| \ll |V\epsilon'_m|$$

(например, $r_D = |k/2|$). Поскольку расстояние между точками $\mu = -k$ и $\mu = -k/\sqrt{\epsilon'_m/(1+\epsilon'_m)}$ имеет порядок $1/\epsilon'_m$, область D является их общей окрестностью. Пусть область D_1 дополняет окрестность D до плоскости. Близость функций $G_+(\mu)$ и $G_{0+}(\mu)$ в области D_1 следует из того, что в D_1 интеграл $I(\mu)$ мал. В области D_1 нетрудно получить оценку для $I(\mu)$:

$$|I(\mu)| \leq |q_1/\sqrt{\epsilon'_m}|, \quad |\mu/k| \leq 1, \quad |I(\mu)| \leq |q_2/\sqrt{\epsilon'_m}| |(k/\mu) \ln(1 + \mu/k)|, \quad (\text{П.2})$$

$$1 \leq |\mu/k| \leq |V\epsilon'_m|, \quad |I(\mu)| \leq |k_2/\mu| (|q_3/\epsilon'_m| + |q_4/\epsilon'_m| \ln|\epsilon'_m|), \quad |\mu/k| \geq |V\epsilon'_m|,$$

где q_j — положительные постоянные нулевого порядка по ϵ'_m .

В силу симметрии функций $G_+(\mu)$ и $G_-(\mu)$

$$G_-(\mu) = G_+(-\mu),$$

в области D_{1c} , симметричной D_1 относительно начала координат, близки функции $G_-(\mu)$ и $G_{0+}(-\mu)$. Исходя из этого, можно построить кусочно-аналитическую функцию

$$G_{a+}(\mu) = \begin{cases} G_{0+}(\mu), & \mu \in D_1 \\ G(\mu)/G_{0+}(-\mu), & \mu \in D \end{cases},$$

которая аппроксимирует $G_+(\mu)$. Величина разрыва функции $G_{a+}(\mu)$ на границе области D имеет порядок $1/\sqrt{\epsilon'_m}$. Аппроксимирующая функция $G_{a+}(\mu)$ сохраняет положение особых точек и нулей $G_+(\mu)$ и близка к ней в смысле оценки (П.2) на всей плоскости.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Зоммерфельд А. Теория дифракции. В кн.: Франк Ф., Мизес Р. Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики. Л.—М.: ОНТИ, 1937, гл. 20, с. 849.
2. Малюжинец Г. Д. — ДАН СССР, 1958, 121, № 3, с. 436.
3. Курилко В. И. — Изв. вузов — Радиофизика, 1966, 9, № 5, с. 980.
4. Гринберг Г. А. Избранные вопросы теории электрических и магнитных явлений. — М.: АН СССР, 1948, с. 728.
5. Гахов Ф. Д., Черский Ю. И. Уравнения типа свертки. — М.: Наука, 1978, с. 296.
6. Азаматов В. А. — Изв. АН БССР, сер. физ.-мат. наук, 1972, № 5, с. 24.
7. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. — М.: Наука, 1977, с. 640.
8. Миттра Р., Ли С. Аналитические методы теории волноводов. — М.: Мир, 1974, с. 323.
9. Михлин С. Г., Смолицкий Х. Л. Приближенные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений. — М.: Наука, 1965, с. 384.
10. Фан Ван Хап. Об одном методе приближенного решения сингулярных интегральных уравнений. — Журн. вычисл. матем. и мат. физ., 1965, 5, № 2, с. 171.
11. Крейн М. Г. — Успехи мат наук, 1958, 13, вып. 5(83), с. 3
12. Фок В. А. Проблемы дифракции и распространения волн. — М.: Сов. радио, 1970, с. 520.

Ленинградский государственный университет

Поступила в редакцию
10 мая 1983 г.

ELECTROMAGNETIC WAVE DIFFRACTION BY A RECTANGULAR WEDGE STRUCTURE

G. I. Makarov, A. P. Sozonov

A problem of electromagnetic wave diffraction is examined in a system of two rectangular lines: perfectly conducting wedge and the wedge with finite value of relative dielectric permittivity ϵ'_m having a mutual face with the first wedge. For Fourier component of diffraction field a Riemann boundary problem with shift is obtained, which is reduced to the integral equation of convolution type on semi-axis with nucleus in the form of sum of differential and regular nuclei. In the case of $|\epsilon'_m| \gg 1$ an analytical solution of the problem is derived.