

УДК 538.56·519 25

## ВЕРОЯТНОСТНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ И СПЕКТРЫ ПОТЕНЦИАЛЬНОЙ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

*С. Н. Гурбатов, А. И. Саичев*

Рассмотрены характеристики хаотического потенциального векторного поля, описываемого трехмерным уравнением Бюргерса. Показано, что после переходного режима в таком поле возникает ячеистая структура с универсальным поведением поля внутри каждой ячейки, характеризующейся двумя параметрами — «центром» и «действием». Плоские грани ячеек движутся с постоянной скоростью в направлении к ячейке, соответствующей менее глубокому минимуму действия. За счет многократного поглощения «более слабых» растет характерный размер ячеек — внешний масштаб поля, и устанавливается ячеистая структура с автомодельными статистическими свойствами. В работе найдены одноточечные и двухточечные вероятностные распределения, корреляционные функции и спектры хаотического векторного потенциального поля на этой стадии и отмечена сравнительно высокая когерентность ячеистой структуры. Подробный асимптотический анализ проведен в случае, когда начальные возмущения удовлетворяют условию сильного перемешивания. Обсуждена возможная связь рассмотренной в работе ячеистой структуры с крупномасштабной структурой Вселенной. Вычислена средняя плотность вещества внутри ячеек.

Для проверки приближенных теорий гидродинамической турбулентности, описываемой уравнениями Навье—Стокса, часто используют одномерное уравнение Бюргерса [1, 2]. Его решению присущи такие черты гидродинамической турбулентности, как нелинейная перекачка энергии по спектру, мелкомасштабная диссипация, наличие внешнего и внутреннего масштабов, выход на автомодельный режим и затухание энергии по универсальному степенному закону [1—9].

Приемлемой моделью теории турбулентности может оказаться также трехмерное уравнение Бюргерса

$$\mathbf{v}'_t + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = \nu \Delta \mathbf{v}, \quad \mathbf{v}(\mathbf{r}, t=0) = \mathbf{v}_0(\mathbf{r}), \quad (1)$$

поскольку, как известно, свойства реальной турбулентности различны в пространствах разной размерности [10, 11]. Уравнение (1) важно еще по одной причине. Оно полукачественно описывает поведение холодного разреженного газа. При этом левая часть уравнения (1) учитывает инерционную неустойчивость движения газа, а правая феноменологически описывает образование ударных фронтов в областях скопления частиц. Пожалуй, важнейшим физическим примером здесь может служить эволюция вещества во Вселенной. По крайней мере, внешняя аналогия поведения описываемого уравнением (1) поля  $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$  с развитием Вселенной заключается в том, что, как показано в этой работе, поле  $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$  приобретает со временем универсальную ячеистую структуру, наличие и причины образования которой во Вселенной усиленно обсуждаются в последние годы [12—15]. Если же дополнить уравнение (1) уравнением для плотности, то оказывается, что плотность вещества понижена внутри ячеек и растет на их гранях. Таким образом, на наш взгляд, анализ динамики и статистики полей, описываемых уравнением

(1), может быть полезен для детального обсуждения следствий одного из механизмов образования ячеистой структуры Вселенной — инерционной неустойчивости.

В данной работе изучена динамика и статистика хаотических потенциальных полей, описываемых уравнением (1). В заключение обсуждается возможная связь их свойств с крупномасштабной структурой Вселенной.

**1. Потенциальные решения трехмерного уравнения Бюргерса.** Будем рассматривать только потенциальные поля  $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = \nabla\Phi(\mathbf{r}, t)$ , где  $\Phi(\mathbf{r}, t)$  удовлетворяет следующему из (1) уравнению:

$$\Phi'_t + (1/2)(\nabla\Phi)^2 = v\Delta\Phi, \quad \Phi(\mathbf{r}, t=0) = \Phi(\mathbf{r}). \quad (1.1)$$

Заменой Хопфа — Коула [16–20] оно сводится к линейному уравнению диффузии. Соответственно решение уравнения (1) имеет вид

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = \frac{\int (\mathbf{r} - \mathbf{r}') t^{-1} \exp [-(1/2)v] C(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t)] d\mathbf{r}'}{\int \exp [-(1/2)v] C(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t)] d\mathbf{r}'}; \quad (1.2)$$

$$C(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) = \Phi(\mathbf{r}') + (\mathbf{r} - \mathbf{r}')^2/2t. \quad (1.3)$$

При малом коэффициенте вязкости  $v$  главный вклад в (1.2) дают окрестности минимумов  $C$ , а в пределе  $v \rightarrow 0$  (1.2) переходит в

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = [\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(\mathbf{r}, t)] t^{-1}, \quad (1.4)$$

где  $\mathbf{r}_0(\mathbf{r}, t)$  — координата абсолютного минимума  $C$  (1.3) по  $\mathbf{r}'$ .

Решение (1.4) удобно интерпретировать на языке гидродинамического пучка невзаимодействующих частиц с начальными скоростями  $\mathbf{v}_0(\mathbf{r})$ , действие которого подчиняется уравнению (1.1) при  $v=0$ . Координата частицы, находившейся при  $t=0$  в точке  $\mathbf{r}'$ , меняется по закону

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{v}_0(\mathbf{r}') t \quad (1.5)$$

Тогда скорость частицы, попавшей в точку  $\mathbf{r}$  в момент  $t$ , задается равенством (1.4), где  $\mathbf{r}_0$  — лагранжева координата этой частицы — есть корень уравнения (1.5) по  $\mathbf{r}'$ . Уравнение (1.5) совпадает с условием минимума  $C$  (1.3):  $\nabla_{\mathbf{r}'} C = 0$ . С течением времени у уравнения (1.5) появляется несколько корней, что соответствует многопотоковому движению пучка невзаимодействующих частиц. При этом однозначное решение (1.4) уравнения (1) совпадает со скоростью той из попавших в точку  $\mathbf{r}$  частиц, чье действие в этой точке минимально ( $C(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t)$  — абсолютно минимально по  $\mathbf{r}'$ ).

**2. Ячеистая структура случайных потенциальных полей.** Обсудим качественно основные особенности ячеистой структуры потенциальных полей. Будем в дальнейшем считать  $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$  статистически однородным и изотропным случайным полем. Пусть  $b_0 = \sqrt{\langle \mathbf{v}_0^2 \rangle}$  и  $l_0$  — характерные амплитуда и масштаб начального поля  $\mathbf{v}_0(\mathbf{r})$ . При  $t \gg t_n$  — характерного времени инерционной нелинейности ( $t_n \sim l_0/b_0$ ), когда парабола  $(\mathbf{r} - \mathbf{r}')^2/2t$  становится плавной в сравнении с начальным действием  $\Phi(\mathbf{r}')$ , абсолютный минимум  $C$  (1.3) практически совпадает с одним из минимумов  $\Phi$ , а координата абсолютного минимума  $\mathbf{r}_0(\mathbf{r}, t)$  становится разрывной функцией  $\mathbf{r}$ , постоянной в некоторых областях  $S_i$  и терпящей разрыв при переходе их границ. Причем в этих областях поле равно

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = (\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) t^{-1}, \quad \mathbf{r} \in S_i, \quad (2.1)$$

где  $r_i$  — координата соответствующего минимума начального действия. Области  $S_i$  с универсальной структурой поля внутри них (2.1) назовем ячейками, характеризующимися «центрами»  $r_i$  и действиями  $\Phi_i = \Phi(r_i)$ . Границы ячеек определяются условием равенства действий частиц соседних ячеек с центрами  $r_i, r_j: C(r_{ij}, r_i, t) = C(r_{ij}, r_j, t)$ . Здесь  $r_{ij}$  — координаты граничной поверхности, для которых из (1.3) имеем

$$([r_{ij} - (r_i + r_j)/2] \Delta r_{ij}) = \Delta \Phi_{ij} t, \quad (2.2)$$

где  $\Delta r_{ij} = r_i - r_j$  — вектор, соединяющий центры ячеек, а  $\Delta \Phi_{ij} = \Phi_i - \Phi_j$  — разность их действий. Отсюда видно, что грани ячеек — плоскости, ортогональные вектору  $\Delta r_{ij}$ . Скорости их постоянны, параллельны  $\Delta r_{ij}$  и пропорциональны разности действий соседних ячеек  $|V_{ij}| = |\Delta \Phi_{ij}| / |\Delta r_{ij}|$ . Перепад скоростей на гранях ячеек

$$\Delta V_{ij} = (r_j - r_i) t^{-1} \quad (2.3)$$

определяется только расстоянием между центрами соседних ячеек. При этом три грани соседних ячеек пересекаются по одной прямой — общему ребру.

При  $v \neq 0$  в выражении (1.2) следует учитывать конкуренцию действий частиц с близкими действиями, определяющую тонкую структуру поля  $\mathbf{v}(r, t)$  в окрестностях граней:

$$\mathbf{v}(r, t) = \frac{1}{t} \left( r - \frac{r_i + r_j}{2} \right) - \frac{\Delta r_{ij}}{2t} \operatorname{th} \left[ \frac{\Delta r_{ij} (r - r_{ij})}{4vt} \right]; \quad (2.4)$$

$$r_{ij} = \frac{r_i + r_j}{2} + V_{ij} t, \quad V_{ij} = \frac{\Delta \Phi_{ij} \Delta r_{ij}}{(\Delta r_{ij})^2}. \quad (2.5)$$

Таким образом, на стадии  $t \gg t_n$  поле  $\mathbf{v}(r, t)$  имеет два масштаба: внешний масштаб — характерный размер ячеек  $l(t)$ , и внутренний, или вязкий масштаб  $l_v(t)$ , связанный с внешним масштабом, согласно (2.4), соотношением

$$l_v(t) \sim v t / l(t), \quad l(t) \sim |\Delta r_{ij}|. \quad (2.6)$$

Из (2.1) видно, что продольная компонента поля, например вдоль прямой  $x_2 = x_3 = 0$ , имеет вид последовательности пилообразных, а поперечная — прямоугольных импульсов. Типичные картины ячеек, реализаций продольных и поперечных компонент поля в двумерном случае приведены на рис. 1.

**3. Законы роста масштаба ячеек.** Движение граней непрерывно меняет форму ячеек. Так как скорости граней направлены от центров ячеек с более глубоким минимумом, то такие ячейки поглощают соседние, в результате чего растет внешний масштаб  $l(t)$ . На закон роста  $l(t)$  сильно влияет характер начальных возмущений. Поэтому подробно обсудим зависимость  $l(t)$  от вида спектра начального действия  $S_\Phi(k)$ . Будем считать, что он достаточно быстро (например, экспоненциально) спадает к нулю при  $k \rightarrow \infty$ . При этом темп роста  $l(t)$  существенно различен при  $\langle \Phi^2 \rangle = \sigma^2 < \infty$  и при  $S_\Phi(k) \sim \gamma^2 k^{-\alpha}$  ( $k \rightarrow 0, 3 < \alpha < 5$ ). Оценим качественно величину  $l(t)$  в обоих случаях.

Из (1.3) видно, что локальные минимумы начального действия могут победить в борьбе за звание абсолютного минимума  $C$ , если они не слишком подняты параболическим слагаемым в (1.3). Характерный размер области, где могут оказаться абсолютные минимумы, определяется условием  $l^2/2t \sim \sqrt{D(l)}$ , где  $D(\rho) = \langle [\Phi(\rho) - \Phi(0)]^2 \rangle$ . В первом случае, когда  $D \approx 2\sigma^2$ , получаем следующую оценку внешнего масштаба:

$$l(t) \sim V\sqrt{\sigma t} \sim l_0 V\sqrt{t/t_n}. \quad (3.1)$$

Во втором случае, когда  $D(\rho) \sim \gamma^2 \rho^{\alpha-2}$  ( $3 < \alpha < 5$ ), имеем

$$l(t) \sim V\sqrt{\gamma} t^{2/(7-\alpha)}. \quad (3.2)$$

Физическое отличие рассмотренных двух случаев начальных возмущений заключается в отсутствии (в первом случае) и наличии (во втором) медленно спадающих корреляций между значениями начального возмущения в далеко разнесенных точках пространства. В частности, из сравнения (3.1) с (3.2) видно, что наличие дальних корреляций ускоряет рост внешнего масштаба — размера ячеек.

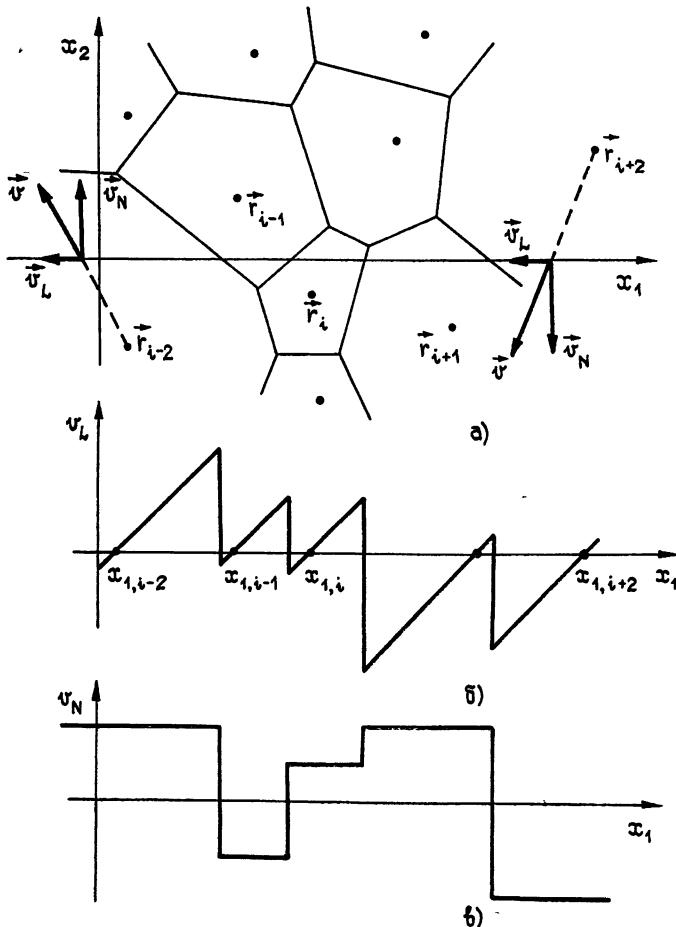


Рис. 1.

Более корректный асимптотический анализ свойств поля  $\mathbf{v}(r, t)$  удается провести в первом случае, когда выполнено условие сильного перемешивания, сводящееся к требованию быстрого (например, экспоненциального) спадания функции корреляций начального действия  $\langle \Phi(r) \Phi(r + \rho) \rangle$  при  $\rho > l_0$  — масштаба начальных возмущений (см., например, [19]). Такой асимптотический анализ возможен из-за наличия при  $t \gg t_n$  малого параметра — отношения масштаба начального поля  $l_0$  к внешнему масштабу  $l(t)$ :  $\mu = l_0/l(t) \ll 1$ . В следующем разделе работы излагается указанный асимптотический анализ статистических свойств  $\mathbf{v}(r, t)$ .

**4. Вероятностные распределения, корреляционные функции и спектры.** Найдем вначале одноточечное вероятностное распределение  $w(r, t)$  на стадии многократного поглощения ячеек  $l(t) \gg l_0$  ( $t \gg t_n$ ) и в пространствах разной размерности ( $n=1, 2, 3$ ). Введем элементарный объем  $V_m$  —  $n$ -мерный куб со стороной  $\Delta \approx l_0$ , много меньшей характерных размеров ячеек  $l(t)$ . Пусть известна  $F(h, m)$  — вероятность того, что  $C(1, 3)$  не превышает значения  $h$  в элементарном объеме  $V_m$  пространства  $r'$ . Тогда, с учетом вытекающей из условия сильного перемешивания независимости начального действия в разных элементарных объемах, вероятность нахождения абсолютного минимума  $C$  (1, 3) в  $m$ -м объеме равна

$$P(r_0 \in V_m) = \int w(-H, m) \prod_{j \neq m} (1 - F(-H, j)) dH, \\ w(h, m) = F'_h(h, m). \quad (4.1)$$

Здесь  $w(-H, m)dH$  — вероятность того, что в элементарном объеме  $V_m$  величина абсолютного минимума  $C$  лежит в интервале  $-H, -H-dH$ , а бесконечное произведение — вероятность того, что в остальных элементарных объемах значения минимумов больше  $-H$ . Как следует из оценки (3.1) при  $t \gg t_n$  характерный размер области, где может быть абсолютный минимум, много больше  $l_0$ . Это значит, что его величина  $-H_0$  очень мала ( $H_0 \gg \sigma$ ). Следовательно, в каждом из сомножителей (4.1)  $F(-H, j) \ll 1$  и справедлива асимптотическая формула

$$P(r_0 \in V_m) = \int w(-H, m) \exp \left[ - \sum_j F(-H, j) \right] dH. \quad (4.2)$$

Учтем еще, что при  $H \gg \sigma$  выполняются очевидные асимптотические равенства

$$F(-H, j) = F_0 \left( -H - \frac{\rho_j^2}{2t} \right), \quad w(-H, m) = w_0 \left( -H - \frac{\rho_m^2}{2t} \right),$$

где  $F_0(h)$  и  $w_0(h)$  — интегральное и дифференциальное одноточечные распределения начального действия,  $\rho_m = r - r_m$  — расстояние от точки наблюдения до  $V_m$ . Заменив сумму в (4.2) интегралом, получим

$$P(r_0 \in V_m) = \int w_0 \left( -H - \frac{\rho_m^2}{2t} \right) \times \\ \times \exp \left[ -\frac{1}{\Delta^n} \int F_0 \left( -H - \frac{\rho^2}{2t} \right) d\rho \right] dH. \quad (4.3)$$

Полагая здесь, для определенности, начальное действие гауссовым с дисперсией  $\sigma^2$  и воспользовавшись тем, что характерный размер области интегрирования в (4.3) по  $\rho$  удовлетворяет условию  $\rho^2/t \sim \sigma^2 \ll H_0$ , после интегрирования по  $\rho$  и  $H$  получим окончательно

$$P(r_0 \in V_m) = (\Delta^2/2\pi l^2(t))^{n/2} \exp[-\rho_m^2/2l^2(t)]; \quad (4.4)$$

$$l^2(t) = \sigma^2 t / H_0 \simeq b_0 l_0 t (\sqrt{n \ln(\sigma t / \Delta^2)})^{-1}, \quad (4.5)$$

где  $H_0$  — характерная величина абсолютного минимума  $C$ , при  $t \gg t_n$  равная корню трансцендентного уравнения

$$\left( \frac{\sigma t}{\Delta^2} \right)^{n/2} (2\pi)^{(n-1)/2} \left( \frac{\sigma}{H_0} \right)^{(n+2)/2} \exp \left( -\frac{H_0^2}{2\sigma^2} \right) = 1; \quad (4.6)$$

$$H_0/\sigma \simeq \sqrt{n \ln(\sigma t/\Delta^2)}. \quad (4.7)$$

Введем  $w(r_0; r, t)$  — вероятностное распределение  $r_0(r, t)$ -координаты абсолютного минимума  $C$  (1.3). При  $l(t) \gg l_0$  с большой точностью справедливо равенство  $w(r_m; r, t) = F(r_0 \in V_m)/\Delta^n$ . Отсюда из (4.4) имеем

$$w(r_0; r, t) = \left( \frac{1}{2\pi l^2(t)} \right)^{n/2} \exp \left[ -\frac{(r_0 - r)^2}{2l^2(t)} \right]. \quad (4.8)$$

Из (1.4), (4.8) следует, что одноточечное вероятностное распределение поля

$$w_1(v; t) = \left( \frac{1}{2\pi b^2(t)} \right)^{n/2} \exp \left[ -\frac{v^2}{2b^2} \right], \quad b^2 = \frac{l^2(t)}{t^2}, \quad (4.9)$$

в пространствах любой размерности автомодельно и гауссово, а «энергия» поля

$$E(t) = \frac{\langle v^2 \rangle}{2} = \frac{nb^2}{2} \simeq \frac{b_0 l_0}{2t} \sqrt{\frac{n}{\ln(\sigma t/\Delta^2)}} \quad (4.10)$$

спадает практически по закону  $t^{-1}$ . Заметим еще, что закон роста внешнего масштаба  $l(t)$  (4.5) отличается от полученного ранее из качественных рассуждений закона  $t^{1/2}$  (3.1) лишь медленной логарифмической коррекцией.

Обсудим, наконец, двухточечное вероятностное распределение поля  $v$ , несущее информацию о его спектрально-корреляционных свойствах и позволяющее выяснить более тонкие детали ячеистой структуры. Рассмотрим поле и координаты абсолютного минимума в точках  $-\rho$  и  $\rho$ :

$$v_1 = v(-\rho, t), \quad v_2 = v(\rho, t), \quad r_1 = r_0(-\rho, t), \quad r_2 = r_0(\rho, t).$$

Из (1.3), (1.4) следует, что они удовлетворяют неравенствам

$$(\rho(r_1 - r_2)) \leq 0, \quad (\rho(v_1 - v_2)) < 2\rho^2/t.$$

Соответственно двухточечное вероятностное распределение поля в точках  $-\rho, \rho$

$$w_2 \equiv 0 \quad \text{при} \quad (\rho(v_1 - v_2)) > 2\rho^2/t. \quad (4.11)$$

Это общее свойство двухточечного распределения поля, справедливое при любых  $t$ . На стадии же развитых ячеек (при  $t \gg t_n$ )  $w_2$  представимо в виде

$$w_2 = PU + QW, \quad (4.12)$$

где  $U$  — двухточечное распределение поля при условии, что точки наблюдения лежат внутри одной ячейки, а  $W$  — когда эти точки принадлежат разным ячейкам. Соответственно  $P$  — вероятность того, что точки  $-\rho, \rho$  попали в одну ячейку, а  $Q = 1 - P$ . Поскольку внутри ячеек поле имеет универсальную структуру (2.1), то

$$U = \delta(v_2 - v_1 - 2\rho/t) f(v_1; 2\rho, t). \quad (4.13)$$

Из (4.11) — (4.13) следует, что двухточечное вероятностное распределение поля, в отличие от одноточечного (4.9), принципиально негауссово. Дальнейший вывод асимптотического выражения для двухточечного распределения поля при  $t \gg t_n$  аналогичен приведенному выше выводу одноточечного распределения (см. также [8]), где подробно выведено двухточечное распределение одномерной турбулентности

Бюргерса). Вводя безразмерные поля и координаты  $\mathbf{u}_{1,2} = \mathbf{v}_{1,2}/b(t)$ ,  $s = \rho/l(t)$ , приведем окончательные выражения для входящих в (4.12) функций

$$P(2s) = (\sqrt{2\pi})^{-1} \times \quad (4.14)$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{\Phi(s+z) \exp[(s+z)^2/2] + \Phi(s-z) \exp[(s-z)^2/2]};$$

$$P(2s) U(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2; 2s) =$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n/2} \frac{\delta(\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1 - 2s)}{\Phi(-(\mathbf{u}_1 q)) \exp[u_1^2/2] + \Phi((\mathbf{u}_2 q)) \exp[u_2^2/2]}, \quad (4.15)$$

$$Q(2s) W(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2; 2s) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \times$$

$$\times \exp\left[-\frac{\mathbf{u}_1^2}{2} - \frac{\mathbf{u}_2^2}{2}\right] \int_{-s-(\mathbf{u}_1 q)}^{s-(\mathbf{u}_2 q)} \frac{2sdz}{[\Phi(s+z) \exp(sz) + \Phi(s-z) \exp(-sz)]^2},$$

$$\Phi(z) = (\sqrt{2\pi})^{-1} \int_{-\infty}^z \exp[-y^2/2] dy, \quad q = s/s.$$

Таким образом, при  $t \gg t_n$  вероятностные распределения, а заодно и спектрально-корреляционные свойства потенциального поля  $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$  становятся автомодельными. Автомодельный режим наступает после того, как из начальных возмущений сформировалась ячеистая структура и произошло многократное поглощение ячеек, за счет чего внешний масштаб поля стал  $l(t) \gg l_0$ . Автомодельная стадия эволюции поля аналогична установлению локального термодинамического равновесия в системе с малыми потерями за счет многократного взаимодействия частиц (в данном случае многократного поглощения ячеек). Как и в квазиравновесном состоянии, в ячеистой структуре на автомодельной стадии стирается память о тонкой структуре начальных возмущений. Лишь внешний масштаб  $l(t)$  и амплитуда поля  $b(t)$  помнят о масштабе  $l_0$  и амплитуде  $b_0$  начальных возмущений.

Введем продольную  $u_L = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{q})$  и поперечные  $\mathbf{u}_N$  компоненты векторного поля  $\mathbf{u} = \mathbf{v}/b$ . Проинтегрировав (4.12), (4.15) по  $\mathbf{u}_{1N}$ ,  $\mathbf{u}_{2N}$ , найдем двухточечное распределение продольной компоненты. Форма его одинакова в пространствах разной размерности и совпадает с аналогичным распределением одномерной турбулентности Бюргерса [8]. От размерности пространства зависит лишь внешний масштаб (4.5). Для двухточечного вероятностного распределения поперечных компонент из (4.12) имеем

$$U(\mathbf{u}_{1N}, \mathbf{u}_{2N}; 2s) = \delta(\mathbf{u}_{2N} - \mathbf{u}_{1N})(1/2\pi)^{(n-1)/2} \exp(-u_{1N}^2/2), \quad (4.16)$$

$$W(\mathbf{u}_{1N}, \mathbf{u}_{2N}; 2s) = (1/2\pi)^{n-1} \exp(-u_{1N}^2/2 - u_{2N}^2/2)$$

— поперечные компоненты поля, в отличие от продольной, в разных ячейках статистически независимы и имеют гауссово распределение.

Двухточечное распределение определяет все двухточечные моментные функции поля. Так для нормированных продольной и поперечной корреляционных функций из (4.12), (4.15) получаем

$$R_{LL}(2s) = \langle u_{1L} u_{2L} \rangle = (sP(2s))'_s,$$

$$R_{NN}(2s) = (1/2) \langle (u_{1N} u_{2N}) \rangle = P(2s). \quad (4.17)$$

Легко видеть, что они связаны условием потенциальности [10]

$$R_{LL}(s) = (d/ds)(sR_{NN}(s)).$$

Для произвольных высших двухточечных моментных функций поперечной компоненты поля из (4.16) следует выражение

$$\langle (u_1 \tau)^m (u_2 \tau)^k \rangle = P(2s) (\langle \xi^{m+k} \rangle - \langle \xi^m \rangle \langle \xi^k \rangle) + \langle \xi^m \rangle \langle \xi^k \rangle, \quad (4.18)$$

где  $\tau$  — единичный вектор  $\tau \perp q$ , а  $\langle \xi^m \rangle$  — момент нормированного гауссова распределения:  $\langle \xi^m \rangle = (m-1)!!$  при четном  $m$  и  $\langle \xi^m \rangle = 0$  при нечетном. В частности, для четвертой кумулянтной функции из (4.18) имеем

$$x_{2,2} = \langle (u_1 \tau)^2 (u_2 \tau)^2 \rangle - 2 \langle (u_1 \tau) (u_2 \tau) \rangle^2 - 1 = 2P(2s)(1 - P(2s)).$$

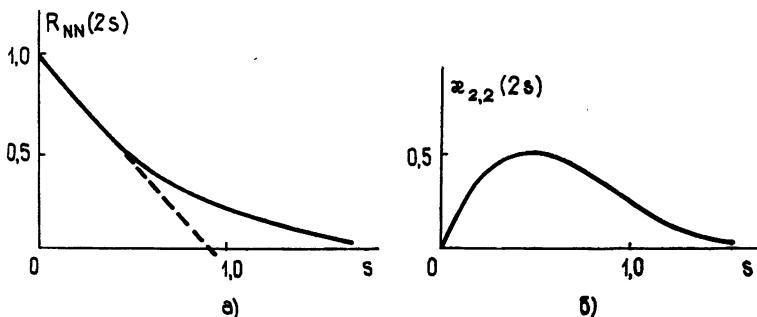


Рис. 2.

Она равна нулю лишь при  $s=0; \infty$  и максимальна при  $2s \approx 0.5$  (рис. 2).

Нормированный энергетический спектр изотропного потенциального поля  $v(r, t)$  равен [10]

$$e(x) = x^3 \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{x} \frac{d}{dx} S_{NN}(x) \right), \quad (4.19)$$

где  $S_{NN}(x)$  — одномерный спектр поперечной компоненты:

$$S_{NN}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} P(s) e^{ixs} ds.$$

Обсудим асимптотическое поведение спектрально-корреляционных свойств поля  $v(r, t)$  на стадии  $t \gg t_n$ . Для однозначно определяющей их вероятности нахождения точек наблюдения в одной ячейке  $P(s)$  справедливы следующие из (4.14) асимптотики:

$$P(s) = \begin{cases} 1 - (s/V\pi), & 0 < s \ll 1 \\ \sqrt{\pi/2} (1/s) \exp(-s^2/8), & s \gg 1 \end{cases}. \quad (4.20)$$

Таким образом, корреляционные функции (4.17) экспоненциально быстро спадают при большом разнесении точек наблюдения  $s \gg 1$  ( $\rho \gg l(t)$ ). Нарушение аналитичности корреляционных функций (4.17) при  $s \rightarrow 0$  связано с разрывным характером поля при  $v \rightarrow 0$ . Быстрое спадание корреляционных функций при  $s \gg 1$  ведет к универсальной асимптотике спектра в области малых волновых чисел:  $e(x) \sim x^4$ .

$(\kappa \ll 1)$ . В области больших волновых чисел, из-за наличия разрывов поля на гранях ячеек, энергетический спектр спадает по степенному закону,  $e(\kappa) \sim \kappa^{-2}$  ( $\kappa \gg 1$ ).

Вероятность  $P(s)$  несет также некоторую информацию о тонких свойствах ячеистой структуры. Рассмотрим произвольную прямую (ось  $x$ ). Обозначим координаты точек пересечения этой прямой гранями ячеек  $x_k$  и введем  $w(y)$  — вероятностное распределение нормированных длин интервалов  $y_k = (x_k - x_{k-1})/l(t)$ . Оно связано с  $P(s)$  очевидным уравнением, следующим из теории процессов восстановления [21]:

$$\langle y \rangle P(s) = \int_s^{\infty} (y - s) w(y) dy, \quad \langle y \rangle = \int_0^{\infty} y w(y) dy.$$

Отсюда получаем

$$w(y) = \sqrt{\pi} P''(y). \quad (4.21)$$

Полезно сравнить  $w(y)$  с распределением  $w_0(y) = \exp(-y)$ , соответствующим полностью хаотичному разбиению прямой на интервалы. Из сравнения (4.21), (4.20) с  $w_0(y)$  видно, что  $w(y)$  при  $y \gg 1$  спадает к нулю гораздо быстрее  $w_0(y)$ . Это свидетельствует о наличии некоторого порядка — когерентности ячеистой структуры потенциальных хаотических полей.

**5. Образование и вырождение ячеистой структуры.** Качественная картина возникновения ячеистой структуры очевидна. При  $t \geq t_n$  в поле  $v(r, t)$  появляются ударные фронты. Их поверхности вначале имеют вид отдельных, в общем случае несмыкающихся блинов. Затем, при  $t \gg t_n$  блины смыкаются, образуя плоские грани ячеек, и после многократного поглощения «более слабых» ячеек устанавливается автомодельная ячеистая структура, подробно описанная в предыдущих разделах. При  $v \rightarrow 0$  она сохраняется на любых временах  $t \gg t_n$ . При малых, но конечных  $v$  необходимо учитывать толщину ударных фронтов — граней ячеек  $l_v(t)$  (2.6). Из-за конечной толщины граней корреляционные функции поля  $v(r, t)$  становятся аналитическими в «вязком» интервале ( $\rho < l_v(t)$ ), но при  $\rho \gg l_v(t)$ , как и в случае  $v \rightarrow 0$ , описываются выражениями (4.17). Отмеченное в предыдущем разделе степенное спадание спектра при больших  $k \gg 1/l(t)$  ( $k = \kappa/l(t)$ ) сохранится только в инерционном интервале  $1/l \ll k \ll 1/l_v$ , а в вязкой области  $k \gg 1/l_v$  сменится на экспоненциальное. При этом сама ячеистая структура будет существовать только при  $l_v(t) \ll l(t)$ . При  $t \geq t_l$ , где  $t_l$  определяется равенством  $l_v(t_l) = l(t_l)$ , из-за утолщения (за счет вязкой диссипации) ударных фронтов, ячеистая структура разрушается и наступает линейная стадия вырождения. Из (2.6), (4.5) вытекает следующая оценка выхода на линейную стадию:

$$t_x \sim t_n e^{R^*}, \quad (5.1)$$

где  $R = b_0 l_0/v$  — число Рейнольдса начального возмущения. Отсюда видно, что время разрушения ячеистой структуры при  $R \gg 1$  чрезвычайно велико. Связано это с тем, что утолщение граней из-за вязкой диссипации почти полностью компенсируется ростом характерного размера ячеек. Заметим, что в случае, когда спектр начального действия  $S_F \sim k^{-\alpha}$  ( $\alpha > 3$ ),  $l(t)$  (3.2) растет быстрее, чем  $l_v(t)$  (2.6), и линейная стадия никогда не наступает — время жизни автомодельной ячеистой структуры бесконечно.

На линейной стадии вырождения  $t > t_l$  (существующей, если  $\langle F^2 \rangle = \sigma^2 < \infty$ ) анализ спектрально-корреляционных свойств поля, опи-

рающийся на точное решение уравнения Бюргерса (1.2), довольно прост [19, 22] и приводит к следующему выражению для спектра действия:

$$S_\Phi(k, t) = c \exp(-2\nu k^2 t), \quad (5.2)$$

$$c = \frac{4\nu^2}{(2\pi)^n} \int \left\{ \exp \left[ \frac{1}{4\nu^2} \langle \Phi(r) \Phi(r + \rho) \rangle \right] - 1 \right\} d\rho,$$

зависимость спектра от формы начального возмущения сохраняется лишь в коэффициенте  $c$ , экспоненциальный рост которого с увеличением начального числа Рейнольдса обусловлен экспоненциальным возрастанием времени до наступления линейной стадии (5.1).

В заключение отметим, что качественное и даже количественное поведение спектральных свойств хаотического потенциального поля  $\mathbf{v}(r, t)$ , в отличие от вихревой турбулентности, не зависит от размерности пространства  $n=1, 2, 3$ . На стадии формирования ударных фронтов и зарождения ячеистой структуры  $t \leq t_n$  поток спектра энергии поля  $\mathbf{v}(r, t)$ , как и в одномерном случае [23, 24], направлен в основном в сторону мелкомасштабных компонент спектра. На стадии автомодельной ячеистой структуры  $t_n \ll t \ll t_p$  рост внешнего масштаба  $l(t)$  приводит, вне зависимости от размерности пространства, к перекачке энергии в область крупномасштабных компонент спектра. На стадии  $t > t_p$  спектр поля продолжает сужаться, но теперь уже за счет линейной вязкой диссипации.

**6. Ячеистая структура с учетом расширения Хаббла и плотность вещества.** Анализ модельного уравнения (1) вместе с уравнением для плотности

$$\rho'_t + (\nabla \rho \mathbf{v}) = 0 \quad (6.1)$$

может быть использован для полукачественного описания крупномасштабной структуры, подобной той, которая наблюдается во Вселенной, если учесть расширение Хаббла. При этом потенциальность поля  $\mathbf{v}(r, t)$  и отсутствие в (1) сил давления оправданы развитием, за счет гравитационной неустойчивости, безвихревых флюктуаций скорости из адиабатических возмущений плотности размерами больше джинсовой длины [25]. Кроме того, описание крупномасштабной структуры Вселенной в рамках уравнений (1), (6.1) основано на допущении, что, начиная с некоторого момента  $t=0$ , главным механизмом развития флюктуаций является инерционная неустойчивость. Уравнение (1) описывает свободное движение частиц вне областей повышенных градиентов поля и их торможение в этих областях, т. е. при сближении частиц. Таким образом, вязкий член в (1) феноменологически описывает торможение частиц, наталкивающихся на слой более плотного газа, образование ударных волн и переход энергии движения в тепло.

Расширение Хаббла учтем, решая уравнение (1) с начальным условием

$$\mathbf{v}(r, t=0) = \mathbf{r}/t_0 + \mathbf{v}_0(r), \quad (6.2)$$

где  $t_0$  — время жизни Вселенной до момента  $t=0$ . При этом замена переменных

$$\mathbf{v}(r, t) = \tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{x}, \tau)/R + \mathbf{r}R'/R, \quad \rho(r, t) = \tilde{\rho}(\mathbf{x}, \tau)/R^3, \quad (6.3)$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{r}/R, \quad \tau = \int_0^t dt'/R^2(t') \quad (R = 1 + t/t_0, \quad \tau = t/(1 + t/t_0))$$

переводит уравнения (1), (6.1) в точно такие же для полей  $\tilde{v}(x, \tau), \rho(x, \tau)$ , а начальное условие (6.2) переходит в

$$\tilde{v}(x, \tau = 0) = v_0(x). \quad (6.4)$$

Отсюда видно, что расширение Хаббла замедляет процесс формирования ячеистой структуры, и при  $t \gg t_0$  ее развитие замораживается ( $\tau \rightarrow t_0$  при  $t \rightarrow \infty$ ). Если  $t_n > t_0$ , то ячеистая структура никогда полностью не сформируется. Если же  $t_n \ll t_0$ , то автомодельная ячеистая структура успеет развиться. Условие возникновения ячеистой структуры  $t_n < t_0$  эквивалентно условию  $l_0/t_0 < b_0$  — случайный перепад скорости  $b_0$  должен быть больше ее хаббловского приращения на начальном масштабе  $l_0$ .

Влияние гравитации на сферически симметричное расширение вещества можно учесть, записав уравнение для  $v$  в виде

$$v'_t + (v\nabla) v = v\Delta v - \beta r. \quad (6.5)$$

Здесь  $\beta(t) = \bar{\rho}(t)\pi^4/3$ ,  $\bar{\rho}$  — гравитационная постоянная,  $\bar{\rho}(t)$  — средняя плотность вещества, определяемая решением самосогласованной задачи расширения с учетом гравитации. Уравнения (6.5), (6.1) также сводятся заменой переменных (6.3) к однородной системе (1), (6.1) в пространстве — времени  $(x, \tau)$ , если  $R(t)$  в (6.3) удовлетворяет уравнению

$$R'' + (4/3)\pi g\bar{\rho}(t)R = 0.$$

Таким образом, анализ развития инерционной неустойчивости в рамках уравнений (6.5), (6.1) с учетом расширения Хаббла и усредненных сил гравитации сводится к анализу уравнений (1), (6.1) без учета расширения.

Как показано в предыдущих разделах, поведение  $v(r, t)$  качественно различно в случаях  $\langle\Phi^2\rangle = \sigma^2 < \infty$  и  $S_\Phi(k) \sim k^{-\alpha}$  ( $\alpha > 3$ ). Какой случай реализуется во Вселенной, зависит от начальных флуктуаций плотности. Пусть их спектр имеет вид  $S_\rho(k) \sim k^d \rho^2(k)$  ( $0 < \rho^2(0) < \infty$ ). Флуктуации плотности приводят, из-за гравитационной неустойчивости, к флуктуациям действия скорости. Расчет их спектра в линейном приближении дает  $S_\Phi(k) \sim S_\rho(k)k^{-4} \sim k^{d-4}$ . Отсюда  $\alpha = 4 - d$ , и если  $d > 1$ , то реализуется первый случай, статистические свойства автомодельной ячеистой структуры в котором подробно разобраны в разд. 4.

Оценим перераспределение плотности вещества, за счет инерционной неустойчивости, на автомодельной ячеистой стадии. Плотность в окрестности фиксированной частицы с начальной координатой  $r'$  равна

$$\rho(t, r') = \rho_0/D, \quad D = |\partial r / \partial r'| \equiv |D_{ij}|, \quad (6.6)$$

где  $\rho_0$  — начальная плотность. Со временем большая часть вещества «слипается» в блины ударных фронтов, переходящие при  $t \gg t_n$  в связную структуру граней ячеек. В итоге плотность вещества внутри ячеек (в «черных» областях) становится меньше начальной  $\rho_0$ . Плотность внутри ячеек нетрудно оценить, заметив, что частицы внутри ячеек никогда не испытывали торможения. Поэтому их координаты задаются равенством (1.5), а плотность — выражением (6.6), где

$$D_{ij} = \delta_{ij} + a_{ij}t, \quad a_{ij} = \Phi''_{ij}(r'). \quad (6.7)$$

Необходимо учесть еще, что внутри ячеек выживают лишь те частицы, начальные действия которых лежат в узкой окрестности  $\Delta H$  характерного значения действия  $-H_0$  (4.7) ( $\Delta H \ll \sigma$ ,  $H_0/\sigma \simeq \sqrt{3 \ln(t/t_n)} \gg 1$ ).

Таким образом, для определения характерной плотности в «черных» областях нужно усреднить (6.6), (6.7) с помощью условной плотности вероятности  $w_0(a_{ij}, -H_0)/w_0(-H_0)$ , где  $w_0(a_{ij}, h)$  — совместное распределение  $a_{ij}$  и  $\Phi$ . Представим корреляционную функцию начального гауссова действия в виде

$$\langle \Phi(r) \Phi(r + \rho) \rangle = \sigma^2 (1 - \rho^2/2l_1^2 + \rho^4/4! l_2^4 - \dots).$$

Тогда справедливы равенства

$$\langle a_{ij} \Phi \rangle = -\delta_{ij} \sigma^2/l_1^2, \quad \langle a_{ij} a_{mk} \rangle = (\delta_{mk} \delta_{ij} + \delta_{kj} \delta_{ml} + \delta_{jm} \delta_{kl}) \sigma^2/3l_2^4.$$

Следовательно, при  $t \gg t_h$  условное среднее диагональных элементов тензора  $\langle a_{ij} \rangle_{H_0} = \delta_{ij} H_0 / l_1^2$  много больше его среднеквадратичного отклонения  $\sqrt{\langle a_{ij}^2 \rangle} \simeq \sigma/l_2^2$  ( $H_0 \gg \sigma$ ). Таким образом, средняя плотность в «черных» областях примерно равна

$$\begin{aligned} \langle \rho \rangle &= \rho_0 \langle 1/D(a_{ij}) \rangle \simeq \rho_0 / D(\langle a_{ij} \rangle_{H_0}) \simeq \\ &\simeq \frac{\rho_0}{t^3 \langle a_{11} \rangle_{H_0} \langle a_{22} \rangle_{H_0} \langle a_{33} \rangle_{H_0}} \simeq \rho_0 \left( \frac{t_h}{t} \right)^3 [\ln(t/t_h)]^{-3/2}. \end{aligned}$$

Объем же «черных» областей за счет поглощения более «слабых» ячеек с течением времени растет. Тем не менее масса вещества в них уменьшается как  $m \sim \rho_0 l_0^3 (t_h/t)^{3/2}$ , поскольку все большая часть вещества концентрируется в «светлых» областях — на гранях ячеек.

Отметим еще, что в силу универсальной структуры поля скорости в ячейках (2.1), для наблюдателя, находящегося внутри ячейки, все частицы данной ячейки обладают изотропным — локальным хаббловским — расширением.

Авторы признательны Г. И. Баренблату и А. Н. Малахову за обсуждение работы и полезные замечания.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Burgers J. M. — Proc. Roy. Neth. Acad. Sci., 1940, 43, p. 2.
2. Burgers J. M. The Nonlinear Diffusion Equation. — Dordrecht, Reidel, 1974.
3. Tatsumi T., Kida S. — J. Fluid. Mech., 1972, 55, p. 659.
4. Tatsumi T. — Adv. Appl. Mech., 1980, 20, p. 39.
5. Mizushima J., Segami A. — Phys. Fluids, 1980, 23, p. 2259.
6. Kida S. — J. Fluid. Mech., 1979, 93, p. 337.
7. Монсеев С. С., Тур А. В., Яновский В. В. — Изв. вузов — Радиофизика, 1980, 23, с. 68.
8. Гурбатов С. Н., Саичев А. И. — ЖЭТФ, 1981, 80, с. 689; ДАН СССР, 1981, 259, с. 73.
9. Якушкин И. Г. — ЖЭТФ, 1981, 81, с. 967.
10. Монин А. С., Яглом А. М. Статистическая гидромеханика. Ч. II. — М.: Наука, 1965.
11. Мирабель А. П., Монин А. С. — Успехи механики, 1979, 2, с. 47.
12. Зельдович Я. Б. — В кн.: Крупномасштабная структура Вселенной. — М.: Мир, 1981, с. 452.
13. Ийвээр М., Эйнасто Я. — В кн.: Крупномасштабная структура Вселенной. — М.: Мир, 1981, с. 270.
14. Зельдович Я. Б., Шандарин С. Ф. — Письма в Астрон. журн., 1982, 8, с. 131.
15. Шандарин С. Ф., Дорошевич А. Г., Зельдович Я. Б. — УФН, 1983, 139, с. 83.
16. Hopf E. — Comm. Pure Appl. Math., 1950, 3, p. 201.
17. Cole J. D. — Quart. Appl. Math., 1951, 9, p. 226.
18. Кузнецов Н. Н., Рождественский Б. Л. — ЖВММФ, 1961, 1, с. 217.
19. Rosenblatt M. — J. Math. Phys., 1968, 9, p. 1229.
20. Струминский В. В. — В кн.: Турбулентные течения. — М.: Наука, 1974.
21. Тихонов В. И., Миронов М. А. Марковские процессы. — М.: Сов. радио, 1977.
22. Гурбатов С. Н., Дубков А. А., Малахов А. Н. — ЖЭТФ, 1977, 72, с. 456.

23. Руденко О. В., Чиркин А. С. — ДАН СССР, 1974, 214, с. 1045.  
24. Санчев А. И.—Изв. вузов — Радиофизика, 1974, 17, с. 1025.  
25. Зельдович Я. Б. — Астрофизика, 1970, 6, с. 319.

Горьковский государственный  
университет

Поступила в редакцию  
6 мая 1983 г.

## PROBABLE DISTRIBUTIONS AND SPECTRA OF POTENTIAL HYDRODYNAMIC TURBULENCE

S. N. Gurbatov, A. I. Saichev

Characteristics are considered for a chaotic potential vector field described by three-dimensional Burgers equation. It is shown that after the transition regime the cell structure occurs in such a field with the universal behaviour of the field inside each cell, which is characterized by two parameters — «center» and «action». Plane faces of cells move with a constant velocity in the direction to the cell corresponding to smaller minimum of the action. Due to multiple absorption of «weaker» cells the characteristic dimension of cells increases — the external scale of the field and the cell structure is established with automodel statistical properties. One point and two point probable distributions, the correlation function and spectra of chaotic vector potential field at this stage have been found and a comparatively high coherency of the cell structure is noted. A detailed asymptotic analysis is given for the case when the initial disturbances satisfy the condition of strong mixing. A possible relation is discussed between the cell structure and large-scale structure of the Universe. The mean density of the matter inside the cells is calculated.

## XV ВСЕСОЮЗНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ ПО ГАЛАКТИЧЕСКОЙ И ВНЕГАЛАКТИЧЕСКОЙ РАДИОАСТРОНОМИИ

(Продолжение)

Значительное место в программе конференции заняли работы, посвященные пульсарам — наблюдениям и теоретическим моделям. Большой интерес присутствующих привлекли выполненные в ФИАНе исследования строения магнитосферы пульсаров. Найдены самосогласованные решения, описывающие структуру магнитного поля и потоков заряженных частиц, на основе чего получены качественно новые оценки скорости торможения пульсаров и объяснен ряд особенностей их радиоизлучения.

Проведенные в ФИАНе и ОР ИРЭ наблюдения тонкой частотно-временной структуры излучения пульсаров, по-видимому, могут прояснить вопрос о механизме генерации радиоизлучения.

В НИРФИ по наблюдениям линейно поляризованного галактического радиоизлучения получены новые данные о структуре магнитного поля в некоторых областях Галактики и о пространственном положении источников поляризованного излучения.

В ЛФ САО выполнены обзоры внешней части Галактики на сантиметровых волнах с высокой чувствительностью ( $\sim 20 \text{ мJy}$ ) при помощи РАТАН-600. В результате обнаружено около 100 новых источников, значительная часть которых, вероятно, находится в пределах Галактики. По полученным данным оценена скорость звездообразования в этих областях.

Большое число докладов было посвящено исследованиям областей HII и их взаимодействия с окружающей средой. Проведены наблюдения областей HII на волнах декаметрового диапазона, где их оптическая толщина обычно велика (ОР ИРЭ). В ФИАНе по наблюдениям рекомбинационной линии водорода H56 $\alpha$  определены физические параметры ряда ярких областей HII. Результаты указывают на рост электронной температуры в этих областях с удалением от центра Галактики.

В ГАО АН УССР успешно разрабатываются модели эволюции компактных зон HII и CII, создаваемых молодыми массивными звездами, а также модели строения гигантских молекулярных облаков.

Наблюдается определенный прогресс в исследованиях молекулярных облаков, в которых заключена значительная часть межзвездного вещества. На РТ-22 (Серпухов) проведены наблюдения линии  $J=4-3$   $\text{HC}_3\text{N}$  в нескольких темных облаках, что позволило определить их физические параметры.

(Окончание см. с. 511).