

УДК 538. 574. 4

О НЕКОТОРЫХ ПРИБЛИЖЕННЫХ МЕТОДАХ РЕШЕНИЯ СКАЛЯРНОЙ ЗАДАЧИ РАССЕЯНИЯ ВОЛН НА ПЛАВНО НЕОДНОРОДНЫХ ОБЪЕКТАХ ПЛАЗМЕННОГО ТИПА

А. В. Мороз

На примере радиально неоднородного плазменного цилиндра рассматриваются некоторые приближенные методы дифракционного описания поля в скалярной задаче рассеяния волн на неоднородных объектах, характерные размеры которых велики по сравнению с длиной волны. Для параболического профиля диэлектрической проницаемости проведено сравнение результатов вычислений дифференциального сечения рассеяния, полученных по приближенным формулам и по методу представления непрерывной неоднородной среды кусочно-однородной.

В задаче рассеяния волн неоднородными плазменными объектами, характерные размеры которых велики по сравнению с длиной волны, хорошее приближение к решению часто удается получить с помощью метода геометрической оптики (ГО) [1]. Однако известны случаи, когда для решения такой задачи этот метод неприменим, и нужно пользоваться другими, более общими методами. Одним из них является метод интерференционного интеграла [2], основанный на представлении поля в виде суперпозиции локально-плоских волн. К задаче рассеяния на плазменных образованиях он применялся в работах [3, 4], причем рассматривался случай неоднородностей с закритической областью, когда внутри неоднородности существует каустика. В отсутствие закритической области каустика обычно расположена на больших расстояниях от неоднородности [5], тогда как внутри неоднородности поле может быть устроено достаточно просто и описано в терминах ГО. Учитывая это, можно построить приближенные алгоритмы решения задачи рассеяния, в которых поле, вычисленное внутри неоднородности в ГО приближении, продолжается во внешнюю область по точным формулам и которые представляют собой обобщения таких известных методов теории дифракции, как приближение Кирхгофа (ПК) и борновское приближение.

Что касается обобщения ПК, то оно было рассмотрено в работе [6] на примере двумерной задачи рассеяния на радиально неоднородном плазменном цилиндре. Однако в [6] не проводилось подробного сравнения этого приближения с другими методами, которое позволило бы выявить область его применимости. В данной работе такое сравнение проводится путем исследования того же примера радиально неоднородного плазменного цилиндра. В качестве эталонных используются результаты, полученные по методу замены непрерывной неоднородной среды кусочно-однородной [7].

Обобщение борновского приближения на случай неслабых неоднородностей по рецепту, указанному выше, можно назвать модифицированным борновским приближением (в дальнейшем для краткости МБП). Существенно, что в МБП, так же, как и в ПК, геометрооптическое поле используется лишь под интегралом, что позволяет перейти к интегрированию по лучевым координатам, избавившись тем самым от

обращения лучевых уравнений. По сравнению с ПК, где нужно вычислять поверхностные интегралы от ГО поля, МБП, требующее вычисления объемных интегралов, оказывается более громоздким, но и более точным, как показывает сопоставление его с эталонным решением.

Постановка задачи. Пусть ось z прямоугольной декартовой системы координат направлена вдоль оси плазменного цилиндра с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon(r)$ и радиусом a ($r = \sqrt{x^2 + y^2}$; функция $\varepsilon(r) = 1$ при $r > a$ и непрерывна при $r = a$), а ось x ориентирована в направлении распространения падающей волны, зависимость от времени в которой описывается множителем $\exp(-i\omega t)$. Считая падающую волну поляризованной вдоль оси z , найдем, что единственная отличная от нуля z -компонента U полного поля удовлетворяет уравнению Гельмгольца, которое в безразмерных переменных $x/a, \dots$, обозначенных теми же буквами, что и исходные размерные переменные, имеет вид

$$(\Delta + \kappa^2 \varepsilon)U = 0. \quad (1)$$

Здесь $\varepsilon = 1$ при $r > 1$, $\kappa = k_0 a \gg 1$, $k_0 = \omega c^{-1}$ — волновое число в свободном пространстве. Пусть R, θ — полярные координаты точки наблюдения R . Тогда рассеянное поле $U_s(R) = U(R) - U_0(R)$, где $U_0(R) = \exp(i\kappa R \cos \theta)$ — поле падающей волны, при $R \rightarrow \infty$ имеет вид расходящейся цилиндрической волны:

$$U_s(R, \theta) = f(\theta) e^{i\kappa R} R^{-1/2},$$

и задача состоит в определении амплитуды рассеяния $f(\theta)$.

Решение задачи в приближении Кирхгофа. Согласно [6] решение можно записать следующим образом:

$$f(\theta) = \sqrt{\frac{8}{\pi^3 \kappa}} e^{-i\pi/4} \left(\frac{1}{2} \frac{\Phi_0}{H_0^{(1)}(\kappa)} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-i)^m \Phi_m}{H_m^{(1)}(\kappa)} \cos m\theta \right) + \Delta, \quad (2)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi_m &= \int_0^1 \frac{V \dot{\vartheta}(\rho)}{\sqrt{1 - \rho^2}} e^{i\kappa \sigma(\rho)} \cos m\vartheta(\rho) d\rho + \sqrt{\frac{2 + \varepsilon'_1}{2 - \varepsilon'_1}} \int_{\pi/2}^{\pi} e^{i\kappa \cos \varphi} \cos m\varphi d\varphi - \\ &- \pi i^m J_m(\kappa), \quad \Delta = \sqrt{\frac{1}{2} \sin \frac{\theta}{2}} e^{-i\kappa \sin(\theta/2)} \left(1 - \sqrt{\frac{2 + \varepsilon'_1}{2 - \varepsilon'_1}} \right), \end{aligned}$$

$H_m^{(1)}$ и J_m — функции Ганкеля и Бесселя, $\vartheta(\rho)$ — угол точки выхода из неоднородности луча с прицельным параметром ρ (см. рис. 1), $\dot{\vartheta}(\rho) = d\vartheta(\rho)/d\rho$, $\sigma(\rho)$ — эйконал на луче с прицельным параметром ρ в точке выхода этого луча из неоднородности, $\varepsilon'_1 < 2$ — разрыв градиента диэлектрической проницаемости на границе. Квадратурные выражения для $\vartheta(\rho)$ и $\sigma(\rho)$ известны [1] и могут быть представлены в виде

$$\vartheta(\rho) = \pi - \arcsin \rho - 2\alpha(\rho); \quad (3)$$

$$\sigma(\rho) = -\sqrt{1 - \rho^2} + 2\alpha(\rho) + 2\beta(\rho), \quad (4)$$

где $\alpha(\rho) = \rho \int_{r_n}^1 d\eta/\eta \sqrt{\varepsilon(\eta) \eta^2 - \rho^2}$, $\beta(\rho) = \int_{r_n}^1 \sqrt{\varepsilon(\eta) \eta^2 - \rho^2} \eta^{-1} d\eta$, а радиус точки поворота $r_n = r_n(\rho)$ определяется уравнением $\varepsilon(r_n) r_n^2 = \rho^2$. Для применимости ГО внутри неоднородности наряду с отмечен-

ными выше условиями $\varepsilon(r) > 0$ (отсутствие закритической области) и $\varepsilon_1' < 2$ необходима также монотонность «приведенной» диэлектрической проницаемости $\varepsilon(r)r^2$ [6].

Решение с использованием модифицированного борновского приближения. Представляя диэлектрическую проницаемость в виде $\varepsilon = 1 - E$, где функция $E = E(r)$ отлична от нуля в круге K единичного радиуса, и переходя от уравнения (1) к эквивалентному интегральному уравнению, получим

$$U_s(R) = x^2 \int_K E(r) U(r) W(R, r) d^2r, \quad (5)$$

где $W(R, r) = -(i/4) H_0^{(1)}(x|R-r|)$ — функция точечного источника. Для точек наблюдения, лежащих вне K , соотношение (5) связывает рассеянное поле вне неоднородности с полем внутри неоднородности. Устремляя $R \rightarrow \infty$ и учитывая симметрию задачи, для амплитуды рассеяния получим следующее выражение:

$$f(\theta) = \sqrt{\frac{x^3}{8\pi}} e^{-i3\pi/4} \int_0^1 E(r) r \Phi(r, \theta) dr, \quad (6)$$

где

$$\Phi(r, \theta) = \int_0^\pi U(r, \varphi) h(r, \varphi, \theta) d\varphi, \quad (7)$$

$h(r, \varphi, \theta) = \exp[-ixr \cos(\varphi - \theta)] + \exp[-ixr \cos(\varphi + \theta)]$. Поскольку на каждом луче определена функция $\varphi = \varphi(r, \rho)$, состоящая из двух ветвей $\varphi_< = \varphi_<(r, \rho)$ и $\varphi_> = \varphi_>(r, \rho)$, применимых соответственно до и после прохождения точки поворота [1], то в интеграле (7) можно перейти к интегрированию по ρ . Считая также, что U в (7) есть геометрическое поле, и учитывая, что якобиан D , описывающий изменение амплитуды поля вдоль лучей, определяется выражением $|D| = \sqrt{\varepsilon(r)r^2 - \rho^2} |\partial\varphi/\partial\rho|$, найдем

$$\begin{aligned} \Phi(r, \theta) = \int_0^{\tilde{\rho}} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon(r)r^2 - \rho^2}} \left[\sqrt{\left| \frac{\partial\varphi_<}{\partial\rho} \right|} e^{ix\sigma_<} h(r, \varphi_<, \theta) + \right. \\ \left. + \sqrt{\left| \frac{\partial\varphi_>}{\partial\rho} \right|} e^{ix\sigma_>} h(r, \varphi_>, \theta) \right] d\rho, \end{aligned} \quad (7a)$$

где $\tilde{\rho} = \tilde{\rho}(r) = r\sqrt{\varepsilon(r)}$ — прицельный параметр луча, для которого радиус точки поворота равен r , $\sigma_{<} = \sigma_{<}(r, \rho)$ — ветви эйконала на луче с прицельным параметром ρ . Квадратурные выражения для $\varphi_{<}$ и $\sigma_{<}$ известны [1] и могут быть записаны в виде

$$\varphi_<(r, \rho) = \pi - \arcsin \rho - \alpha(r, \rho); \quad (8a)$$

$$\varphi_>(r, \rho) = \vartheta(\rho) + \alpha(r, \rho); \quad (8b)$$

$$\sigma_<(r, \rho) = -\sqrt{1 - \rho^2} + \rho\alpha(r, \rho) + \beta(r, \rho); \quad (9a)$$

$$\sigma_>(r, \rho) = \sigma(\rho) - \rho\alpha(r, \rho) - \beta(r, \rho), \quad (9b)$$

где $\vartheta(\rho)$ и $\sigma(\rho)$ определены соотношениями (3), (4), $a(r, \rho) = \rho \int_r^1 \frac{d\eta}{\eta \sqrt{\varepsilon(\eta)\eta^2 - \rho^2}}$, $\beta(r, \rho) = \int_r^1 \frac{\sqrt{\varepsilon(\eta)\eta^2 - \rho^2}}{\eta} d\eta$. Дифференцируя (8) по ρ , можно получить явные квадратурные выражения для $\frac{\partial \varphi_{\leq}}{\partial \rho}$, которые мы здесь не приводим.

Формулы (6), (7а), (8), (9) представляют решение задачи в модифицированном борновском приближении.

Неоднородность с параболическим профилем диэлектрической проницаемости. Рассмотрим неоднородность вида

$$\varepsilon(r) = \begin{cases} 1 - \xi(1 - r^2), & r \leq 1 \\ 1, & r > 1 \end{cases}, \quad (10)$$

где ξ — положительный параметр. В этом случае величины, характеризующие ГО поле, могут быть вычислены явно; мы приведем лишь некоторые из относящихся сюда результатов. Так, угол точки выхода из неоднородности луча с прицельным параметром ρ равен

$$\vartheta(\rho) = \arccos \left[\sqrt{1 - \rho^2} (1 - \xi) / \sqrt{4\xi\rho^2 + (1 - \xi)^2} \right].$$

Это соотношение показывает, что ГО описание поля внутри неоднородности справедливо при $\xi < 1$. Угол разворота луча в неоднородности (см. рис. 1) равен $\chi(\rho) = \vartheta(\rho) - \arcsin \rho$, а его производная по ρ определена выражением

$$\dot{\chi}(\rho) = 2\xi(1 - \xi - 2\rho^2) / [\sqrt{1 - \rho^2} \times (4\xi\rho^2 + (1 - \xi)^2)].$$

Отсюда следует, что прицельный параметр луча, отклоняющегося на наибольший угол, равен $\sqrt{(1 - \xi)/2}$. Этот луч касается каустики в бесконечно удаленной точке, которая характеризуется углом θ_k («к» — каустический), равным

$$\theta_k = \arcsin \xi.$$

Таким образом, на больших расстояниях от неоднородности ГО если и применима, то лишь в интервале углов $0 \leq \theta < \theta_k$.

Для профиля (10) нами были проведены численные расчеты дифференциального сечения рассеяния $\sigma(\theta) = |f(\theta)|^2$ по приближенным формулам (2) — (4), (6) — (9) и по методу, основанному на представлении непрерывной неоднородной среды кусочно-однородной [7], который рассматривался как эталонный. Результаты вычислений для $\kappa = 20$, $\xi = 10^{-2}$, 10^{-1} , $5 \cdot 10^{-1}$, $9 \cdot 10^{-1}$ представлены на рис. 2а—2г соответственно. Здесь сплошные кривые относятся к эталонному решению, а кресты и пунктир — к МБП и ПК. Кружком на оси абсцисс отмечены значения θ_k .

Из рис. 2 видно, что обобщение ПК [6] дает неплохие результаты для не слишком больших углов рассеяния. При $\theta \gtrsim \pi/2$ это приближение не описывает осцилляций, характерных для эталонного решения. Что касается МБП, то оно удовлетворительно описывает поле также и в области больших углов рассеяния. Однако с ростом ξ точность МБП в этой области углов падает (рис. 2г). Причина, по-видимому, заклю-

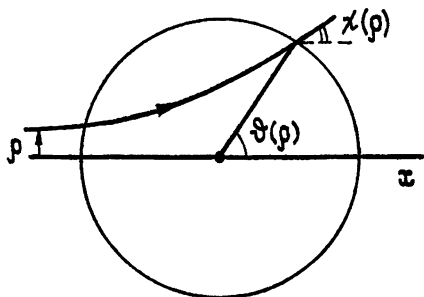


Рис. 1.

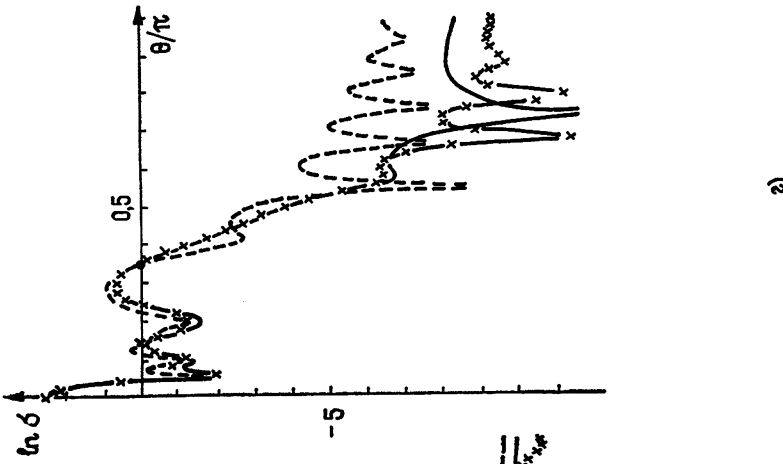
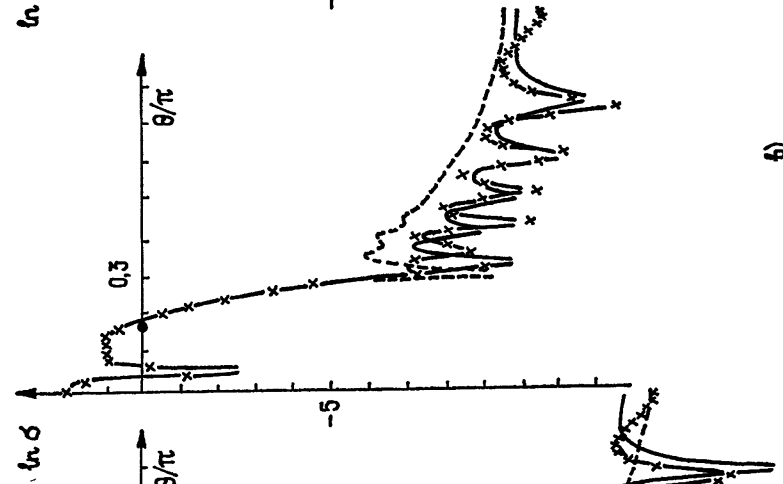
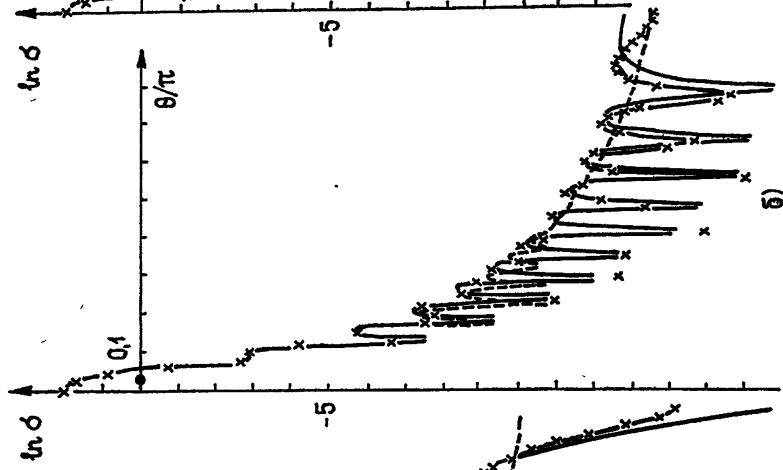
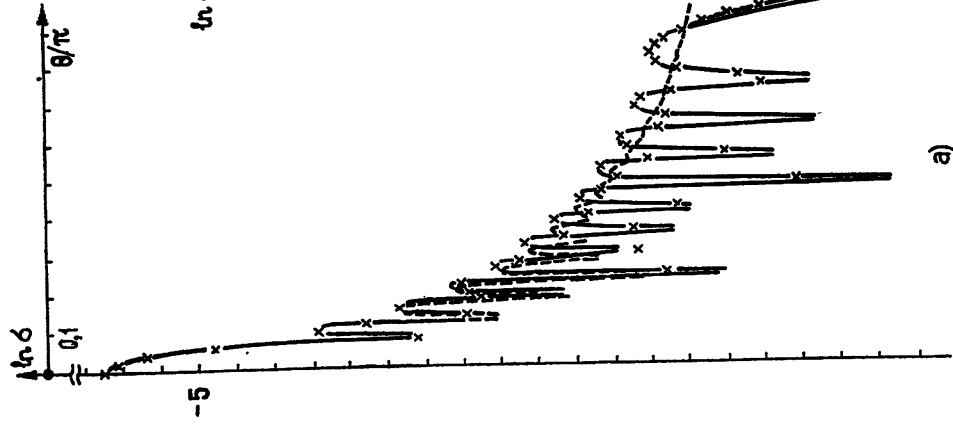


Рис. 2.

чается в том, что в этом случае становятся существенными отражения от разрыва градиента диэлектрической проницаемости на границе ($\epsilon'_1 = 2\xi$), которые нами не учитываются.

Автор признателен З. И. Фейзулину за руководство работой.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кравцов Ю. А., Орлов Ю. И. Геометрическая оптика неоднородных сред. — М.: Наука, 1980
2. Орлов Ю. И. — Труды МЭИ, 1972, вып. 119, с. 82.
3. Пермяков В. А. — Изв. вузов — Радиофизика, 1980, 23, № 9, с. 1075.
4. Орлов Ю. И., Демин А. В. — Труды МЭИ, 1980, вып. 497, с. 10.
5. Shmoys J. — J. Appl. Phys, 1961, 32, № 4, p. 689.
6. Мороз А. В., Фейзулин З. И. — Труды Радиотехнического ин-та АН СССР, 1982, вып. 44, с. 161.
7. Крепак В. Н., Назаренко Л. А., Якименко И. П. — Радиотехника и электроника, 1973, 18, № 11 с. 2225.

Поступила в редакцию
3 мая 1983 г.

ON SOME APPROXIMATE PROCEDURES SOLVING THE SCALAR PROBLEM OF WAVE SCATTERING BY SLIGHTLY INHOMOGENEOUS PLASMA TYPE OBJECTS

A. V. Moroz

By an example of radially inhomogeneous plasma cylinder some approximate procedures of the diffractive field description are considered in the scalar problem of scattering by inhomogeneous objects having sizes much more than the wavelength. For the parabolic profile of the dielectric permeability the results of calculations of the differential scattering cross section on the basis of approximate formulae are compared with those obtained by the method of continuous inhomogeneous medium replacing by a set of homogeneous layers.

XV ВСЕСОЮЗНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ ПО ГАЛАКТИЧЕСКОЙ И ВНЕГАЛАКТИЧЕСКОЙ РАДИОАСТРОНОМИИ

(Продолжение)

В широком диапазоне — от дециметровых волн до миллиметровых — исследуется радиоизлучение квазаров и активных галактик. Исследования включают в себя изучение структуры объектов, их спектров, переменности и т. п. Сообщалось о наблюдениях протяженных деталей ($\sim 1'$) вблизи некоторых мощных радиоисточников на сантиметровых волнах при помощи РАТАН-600. В них может быть заключена энергия, на несколько порядков превышающая энергию ядерных компонент. На сантиметровых и миллиметровых волнах наблюдалась быстрая (с характерным временем порядка нескольких дней) переменность активных внегалактических объектов. Наблюдения такой переменности позволяют продвинуться в исследовании динамики выбросов до масштабов $\sim 3 \cdot 10^{16}$ см, что на порядок меньше достигнутых методом РСДБ

Активно продолжаются исследования остатков сверхновых. Сотрудниками НИРФИ в результате многолетних наблюдений установлено, что изменения плотности потока Кассиопеи А и Крабовидной туманности носят немонотонный характер. Обнаружены периодические затухающие колебания интенсивности излучения Кассиопеи А с периодом 6 лет и амплитудой 5%

В НИРФИ и ОР ИРЭ АН УССР проведены наблюдения Крабовидной туманности на дециметровых волнах, вплоть до частот 5,6 и 8,8 МГц, на которых в излучении этого объекта доминирует вклад пульсара. В результате впервые получены данные об его спектре на столь низких частотах.

В наблюдениях на РАТАН-600 вокруг ряда остатков сверхновых обнаружены расширяющиеся облака нейтрального водорода. По их параметрам удалось оценить энергию взрыва ($10^{50} \div 10^{51}$ эрг) и возраст (сотни тысяч лет).

Большое внимание привлекает к себе пекулярный объект SS 433. Он наблюдался на волнах от 3 м до 8,2 мм при помощи радиотелескопов БСА ФИАН, РАТАН-600, РТ-22 КраО АН СССР. Обнаружена переменная линейная поляризация на сантиметровых волнах. Отмечается корреляция вариаций радиопотока с фотометрической кривой блеска.

(Продолжение см. с. 468)