

УДК 535. 343

## ФОРМА ДОПЛЕРОВСКОЙ ЛИНИИ В СИЛЬНОМ ПОЛЕ СТОЯЧЕЙ ВОЛНЫ

Л. А. Будкин, В. В. Митюгов, А. И. Пихтелев, А. П. Протогенов

Изложено точное решение задачи о поглощении энергии стоячей волны движущейся двухуровневой системой. На этой основе уточняется форма доплеровски-уширенной линии поглощения.

Исследование нелинейного поглощения света веществом стало в последние годы одним из важных разделов оптической спектроскопии высокого разрешения [1]. В рамках двухуровневой модели теоретически вопрос о различных механизмах уширения линии поглощения в поле монохроматической бегущей волны достаточно хорошо изучен [2-4]. Вместе с тем известно, что поглощение стоячей волны атомами вещества далеко не во всех случаях сводится к этой задаче. Эффекты насыщения в стоячей волне обнаруживают ряд специфических особенностей, например, образование провала Лэмба в центре доплеровски-уширенной линии.

Исследование формы доплеровской линии в поле стоячей волны проводилось различными приближенными и численными методами. Качественное описание лэмбовского провала обычно получают на основе феноменологических скоростных уравнений. Известно также точное решение для интенсивности нелинейного поглощения в центре доплеровской линии [5-8]. Некоторые данные получены численным расчетом на ЭВМ [5]. Анализ перечисленных результатов показывает, что их совместное использование позволяет с удовлетворительной точностью описывать реальные процессы поглощения не только в слабом, но и в сильном поле стоячей волны.

Тем не менее очевидно, что получение общего точного решения задачи всегда желательно как для уточнения пределов применимости существующих методов, так и для проведения численных расчетов. Именно такое решение предлагается в настоящей статье, хотя записать его удастся в довольно громоздкой и не совсем удобной для вычисления форме.

Аналогичный подход использован в [9], где в отличие от нашей работы получено точное решение относительно разности населенностей как функции частотной расстройке и интенсивности излучения лазера, и на его основе графически исследуется зависимость формы линии генерации\*.

**1. Уравнение для амплитуд поляризации.** Рассмотрим поведение двухуровневой системы, состояние которой будем характеризовать матрицей плотности  $\rho_{ij}$  ( $i, j = 1, 2$  в порядке возрастания энергии). Нondiagonalные элементы этой матрицы определяют, в частности, дипольный момент системы и с ним поляризацию вещества:

$$P(\mathbf{r}, t) = nd(\rho_{12} + \text{к. с.}), \quad (1)$$

\* Интересные результаты для разности населенностей в доплеровски-уширенной двухуровневой системе получены в представлении многофотонного поглощения (испускания) [10].

где  $n$  — концентрация двухуровневых атомов, а  $d = \langle 1|d|2 \rangle$  — матричный элемент диполя.

Пусть атом имеет скорость  $v$  вдоль оси  $x$  в поле стоячей волны с напряженностью  $\mathcal{E}(x, t) = \mathcal{E} \cos \omega t \cos kx$ . Введем обозначения  $R = \rho_{22} - \rho_{11}$ ,  $\epsilon = \omega - \omega_{21}$ ,  $\delta = \omega v/c$ . Тогда в системе отсчета, связанной с атомом, уравнения релаксации без учета нерезонансных членов  $\sim \exp[\pm i(\omega + \omega_{21})t]$  примут вид [5]

$$\frac{dR}{dt} = \left( \frac{2\mathcal{E}d}{\hbar} \right) \text{Im} [\rho_{12} (e^{-i(\epsilon+\delta)t} + e^{-i(\epsilon-\delta)t})] - \frac{R - R_0}{T}, \quad (2)$$

$$\frac{d\rho_{12}}{dt} = \left( \frac{\mathcal{E}d}{2i\hbar} \right) R (e^{i(\epsilon+\delta)t} + e^{i(\epsilon-\delta)t}) - \frac{\rho_{12}}{\tau},$$

где  $T$  и  $\tau$  — времена соответственно продольной и поперечной релаксации,  $R_0$  — равновесное значение  $R$  в отсутствие поля. Обозначим  $\rho_{12} e^{-i\epsilon t} = x + iy$ ,  $\tau^{-1} = \nu$ ,  $T^{-1} = \gamma$ ,  $\mathcal{E}d/2\hbar = a$ . Тогда вместо (2) получим

$$\dot{y} + \epsilon x = -aR \cos \delta t - \nu y, \quad \dot{x} - \epsilon y = -\nu x, \quad (3)$$

$$\dot{R} = 4ay \cos \delta t - \gamma(R - R_0).$$

Мы интересуемся установившимся процессом поглощения в поле монохроматической стоячей волны. Поэтому будем искать частное решение системы (3), представив его в виде разложения:

$$R(t) = r_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (g_n \sin n\delta t + f_n \cos n\delta t); \quad (4)$$

$$x(t) = x_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (u_n \sin n\delta t + v_n \cos n\delta t); \quad (5)$$

$$y(t) = y_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \sin n\delta t + \beta_n \cos n\delta t). \quad (6)$$

Подставляя (4)–(6) в (3), исключая из полученных соотношений  $u_n$ ,  $v_n$  и вводя комплексные амплитуды  $q_n = \alpha_n + i\beta_n$ ,  $F_n = g_n + if_n$ , придем к рекуррентным уравнениям

$$2a\beta_1 = \gamma(r_0 - R_0); \quad (7)$$

$$\Delta_1 F_1 = 2aq_1 + 4ia y_0; \quad (8)$$

$$(\Gamma_1 + \epsilon^2/\Gamma_1) q_1 = -iar_0 - (a/2) F_2, \quad (9)$$

а при  $n \geq 2$  —

$$(\Gamma_n + \epsilon^2/\Gamma_n) q_n = -(a/2) (F_{n-1} + F_{n+1}); \quad (10)$$

$$\Delta_n F_n = 2a(q_{n-1} + q_{n+1}), \quad (11)$$

где  $\Gamma_n = \nu + in\delta$ ,  $\Delta_n = \gamma + in\delta$ . В дальнейшем для сокращения записи будем полагать  $\Gamma_n = \Delta_n$ , хотя последующий метод решения к этому упрощению не критичен.

Обратимся к первому из уравнений (2). Производная  $dR/dt$ , будучи умножена на  $\hbar\omega_{21}$ , представляет собой суммарную скорость изменения энергии атома. Напомним, что мы в основном интересуемся усредненным за достаточно большое время поглощением в установив-

шемся режиме. В этом случае среднее значение величины  $dR/dt$  равно нулю и соотношение (7) есть просто закон сохранения энергии. Действительно, левая часть (7) описывает среднее изменение энергии атома под воздействием поля (поглощение), а правая часть — перевод этой энергии в тепло за счет релаксационных процессов. Из сказанного ясно, что среднее по времени поглощение энергии поля атомом дается величиной  $2a\hbar\omega_2\beta_1$  поэтому при решении системы (7) — (11) в конечном счете нас будет интересовать лишь вычисление  $\beta_1$ .

2. Вычисление  $\beta_1$ . Подставляя в (9)  $F_2$  из (11), получим

$$\Gamma_1\Gamma_2(1 + \epsilon^2/\Gamma_1^2)q_1 + ia\Gamma_2r_0 = -a^2(q_1 + q_3). \quad (12)$$

Наша задача теперь будет состоять в том, чтобы с помощью бесконечной системы (10), (11) выразить  $q_3$  в (12) через  $q_1$  (мнимая часть последнего и есть искомое  $\beta_1$ ). Для этого сначала исключим  $F_n$ , записав

$$q_n = A_n q_{n-2} + B_n q_{n+2}, \quad (13)$$

где

$$A_n = -\frac{a^2\Gamma_n\Gamma_{n+1}}{(\Gamma_n^2 + \delta^2)(\Gamma_n^2 + \epsilon^2) + 2a^2\Gamma_n^2},$$

$$B_n = -\frac{a^2\Gamma_{n-1}\Gamma_n}{(\Gamma_n^2 + \delta^2)(\Gamma_n^2 + \epsilon^2) + 2a^2\Gamma_n^2}.$$

Из (13) следует  $q_3 = A_3q_1 + B_3q_5$ , а  $q_5$  можно выразить через  $q_1$ ,  $q_7$  и т. д. В результате вместо (13) получим рекуррентную формулу

$$q_{2n+1} = \prod_{k=1}^n \frac{A_{2k+1}}{\eta_{2k+1}} q_1 + \frac{B_{2n+1}}{\eta_{2n+1}} q_{2n+3}, \quad (14)$$

где  $\eta_{2n+1}$  определены соотношением

$$\eta_{2n+1} = 1 - A_{2n+1}B_{2n-1}/\eta_{2n-1}$$

с  $\eta_3 = 1$ . Это так называемые цепные дроби.

Обозначим  $Z_{2n+1}$  множитель перед  $q_1$  в правой части (14) и поступим следующим образом:

$$q_3 = Z_3q_1 + B_3\eta_3^{-1}q_5 = (Z_3 + B_3\eta_3^{-1}Z_5)q_1 + B_3B_5\eta_3^{-1}\eta_5^{-1}q_7 =$$

$$= (Z_3 + B_3\eta_3^{-1}Z_5 + B_3B_5\eta_3^{-1}\eta_5^{-1}Z_7)q_1 + B_3B_5B_7\eta_3^{-1}\eta_5^{-1}\eta_7^{-1}q_9. \quad (15)$$

Продолжая подобную процедуру «отодвигания» последнего члена, получим

$$q_3 = \left( Z_3 + \sum_{m=2}^n \prod_{k=2}^m \frac{B_{2k-1}}{\eta_{2k-1}} Z_{2m+1} \right) q_1 + \prod_{k=1}^n \frac{B_{2k+1}}{\eta_{2k+1}} q_{2n+3}. \quad (16)$$

Из физических соображений естественно ожидать, что  $q_{2n+3} \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ . Однако нам достаточно допущения, что  $q_{2n+3}$  ограничены. Тогда сходимость указанной процедуры очевидна, и мы вправе отбросить второе слагаемое в (16), одновременно устремив предел суммирования по  $m$  в первом до бесконечности. Отсюда, используя (12) и (7), найдем окончательно

$$\beta_1 = -R_0/2\tilde{a}(1 + F). \quad (17)$$

Здесь

$$F = (D^2 + C^2)/2\tilde{a} (C + 2\tilde{\delta}D); \quad (18)$$

$$C = \text{Re} [\tilde{\Gamma}_1 \tilde{\Gamma}_2 (1 + \tilde{\varepsilon}^2/\tilde{\Gamma}_1^2) + \tilde{a}^2 (1 + N)]; \quad (19)$$

$$D = \text{Im} [\tilde{\Gamma}_1^2 \tilde{\Gamma}_2^2 (1 + \tilde{\varepsilon}^2/\tilde{\Gamma}_1^2) + \tilde{a}^2 (1 + N)]; \quad (20)$$

$$N = Z_3 + \sum_{m=2}^{\infty} \prod_{k=2}^m \frac{B_{2k-1}}{\eta_{2k-1}} Z_{2m+1} \quad (21)$$

и введены безразмерные переменные  $\tilde{a} = a\tau$ ,  $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon\tau$ ,  $\tilde{\Gamma}_n = 1 + in\tilde{\delta}$ ,  $\tilde{\delta} = \delta\tau$ .

**3. Приближение слабого поля.** Коэффициент поглощения  $G(\varepsilon, \delta)$  стоячей световой волны атомом, движущимся со скоростью  $v$ , обычно находят с помощью скоростных уравнений для диагональных элементов матрицы плотности [11, 12]. Кроме этого, привлекается также гипотеза об аддитивности поглощения монохроматических компонент, для которых, в свою очередь, из системы (2) при  $\delta=0$  и условия квазистационарности получают

$$dR/dt = -v(4\tilde{a}^2 L(\tilde{\varepsilon})R + R - R_0), \quad (22)$$

где  $L(\tilde{\varepsilon}) = (1 + \tilde{\varepsilon}^2)^{-1}$ . В рамках упомянутой гипотезы записывают и уравнение для переходов при двухчастотном возбуждении ( $\omega = \omega_{21} + \varepsilon \pm \delta$ ), просто заменяя  $L(\tilde{\varepsilon})$  в (22) на  $(1/2)[L(\tilde{\varepsilon} + \tilde{\delta}) + L(\tilde{\varepsilon} - \tilde{\delta})]$  [13]. В результате решения полученного таким образом уравнения находят

$$G(\tilde{\varepsilon}, \tilde{\delta}) = -R_0 v \{1 + [2\tilde{a}^2 [L(\tilde{\varepsilon} - \tilde{\delta}) + L(\tilde{\varepsilon} + \tilde{\delta})]]\}^{-1}. \quad (23)$$

Известно, что такой подход приводит к наиболее удовлетворительным результатам при слабой накачке ( $\tilde{a}^2 \ll 1$ ), и в этих условиях обнаруживается хорошее согласие с экспериментом. Здесь нам представляется уместным уточнить формулу (23), сравнив линейный член по  $\tilde{a}^2$  в ее разложении с результатом, следующим в линейном по  $\tilde{a}^2$  приближении из решения (17). С указанной точностью (23) принимает вид

$$G(\tilde{\varepsilon}, \tilde{\delta}) = - \frac{2R_0 v \tilde{a}^2 (1 + \tilde{\varepsilon}^2 + \tilde{\delta}^2)}{1 + 2\tilde{\varepsilon}^2 + 2\tilde{\delta}^2 + \tilde{\varepsilon}^4 + \tilde{\delta}^4 - 2\tilde{\varepsilon}^2 \tilde{\delta}^2}. \quad (24)$$

С другой стороны, из (17) в том же приближении получим

$$G(\tilde{\varepsilon}, \tilde{\delta}) = -2R_0 v \tilde{a}^2 (1 + \tilde{\varepsilon}^2 + 6\tilde{\delta}^2 + 5\tilde{\varepsilon}^2 \tilde{\delta}^2 + 9\tilde{\delta}^4 + 4\tilde{\varepsilon}^2 \tilde{\delta}^4 + 4\tilde{\delta}^6) (1 + 2\tilde{\varepsilon}^2 + \tilde{\delta}^2 + \tilde{\varepsilon}^4 + 15\tilde{\delta}^4 + 8\tilde{\varepsilon}^2 \tilde{\delta}^2 + 14\tilde{\delta}^6 + 5\tilde{\delta}^2 \tilde{\varepsilon}^4 + 2\tilde{\varepsilon}^2 \tilde{\delta}^4 + 4\tilde{\delta}^8 - 8\tilde{\varepsilon}^2 \tilde{\delta}^6)^{-1}. \quad (25)$$

Из (24) и (25) видно, что даже при слабом поле эти выражения наиболее заметно отличаются характером их зависимости от  $\tilde{\delta}$ . Нетрудно видеть, что это различие не будет существенным, если использовать формулы (24) либо (25) для усреднения по скоростям со значительным разбросом, т. е. при достаточно большой величине доплеровского уши-

рения. Тем не менее, для проведения численных расчетов формы линии поглощения в слабом поле следует пользоваться более точным выражением (25). Аналогичное различие можно получить и в приближении с точностью до  $\tilde{a}^4$ , которое необходимо для расчета формы лэмбовского провала в центре доплеровски-уширенной линии поглощения. Мы, однако, не будем выписывать соответствующих формул из-за их громоздкости, предполагая, что при необходимости они могут быть выведены непосредственно из (17). В следующем разделе мы приведем результаты численного расчета коэффициента поглощения, найденного непосредственно из (17).

**4. Расчет формы линии.** Воспользуемся выражением (17) для вычисления усредненного по скоростям коэффициента поглощения стоячей волны. Связь между коэффициентом поглощения света атомом, имеющим скорость  $v$ , и коэффициентом  $\beta_1$  имеет вид

$$G = 2\tilde{a}\nu\beta_1. \quad (26)$$

После усреднения с максвелловской функцией распределения получим

$$\bar{G} = \frac{2\nu}{V\pi} \int_0^\infty \frac{e^{-t} dt}{1 + F(t, \delta_0, \tilde{\epsilon}, \tilde{a})}, \quad (27)$$

где  $\delta_0 = v_0\omega_{21}\tau/c$ ,  $v_0$  — средняя тепловая скорость и принято, что  $R_0 = -1$ . При вычислении функции  $F(t, \delta_0, \tilde{\epsilon}, \tilde{a})$  и численном интегрировании выберем следующие значения параметров:  $\tau = 10^{-8}$  с,  $\omega_{21} = 10^{15}$  рад/с,  $\delta_0 = 10$ ,  $\tilde{a}_1 = 1$ ,  $\tilde{a}_2 = 0,5$ ,  $\tilde{a}_3 = 10^{-1}$  (для  $\tilde{a} = 1$ ,  $\epsilon = 10^3$  В/м), численные оценки показывают, что с выбранными значениями параметров при

вычислении  $F(t, \delta_0, \tilde{\epsilon}, \tilde{a})$  достаточно оставить в сумме (21) одно первое слагаемое. Зависимость безразмерного коэффициента поглощения  $I(\tilde{\epsilon}, \tilde{a}) = \tau\bar{G}$  от величины расстройки  $\tilde{\epsilon}$  при трех указанных значениях амплитуды накачки  $\tilde{a}$  показана на рисунке. Для сравнения пунктиром показаны результаты расчета по формуле (23). В случае  $\tilde{a}_2$  при  $\tilde{\epsilon} > 0,2$  обе кривые совпадают, что показано пунктиром.

Простые манипуляции с масштабом позволяют убедиться, что характер зависимости поглощения от  $\tilde{\epsilon}$  в обоих случаях в основном одинаков. Исключение составляет область  $0 \leq \tilde{\epsilon} \leq 0,2$  внутри провала Лэмба, где точное решение (17) дает результаты, несколько отличные от данных расчета по скоростному методу.

Обращают на себя внимание существенные отличия высоты кривых, вычисленных различными методами при одинаковых параметрах накачки. Здесь, однако, нет очевидного противоречия. Дело в том, что при расчете формы доплеровски-уширенной линии на основе феноменологических

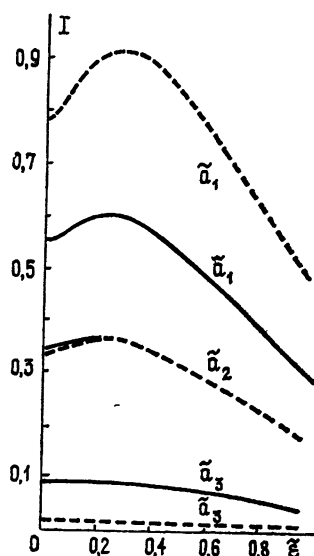


Рис. 1.

уравнений численные значения масштабных (полуэмпирических) коэффициентов определяют опять-таки на основе опытных данных.

Разумеется, существует и независимый теоретический метод вычисления (а не оценки) вероятностей переходов, что делает задачу об уточнении правильной зависимости поглощения от амплитуды поля заслуживающей внимания. К сожалению, необходимость усреднения двухчастотного решения по распределению скоростей сильно усложняет расчеты, поэтому соответствующий анализ заслуживает отдельной статьи.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Летохов В. С., Чеботаев В. П. Принципы нелинейной лазерной спектроскопии.— М.: Наука, 1975.
2. Weiskopf V.— Ann Phys., 1931, 9, № 1, p. 23.
3. Собельман И. И. Введение в теорию атомных спектров.— М.: Физматгиз, 1963.
4. Karplus R., Schwinger J.— Phys. Rev., 1948, 73, № 4, p. 1020.
5. Feldman B. J., Feld M. S.— Phys. Rev., 1970, A1, № 6, p. 1375.
6. Раутиан С. Г., Собельман И. И. — ЖЭТФ, 1963, 44, № 6, с. 834.
7. Stenholm S.— Phys. Rev., 1970, B1, № 1, p. 15.
8. Uchida K., Shimoda K.— Japan J. Appl. Phys., 1971, 10, № 3, p. 623.
9. Stenholm S., Lamb W. E.— J. Phys. Rev., 1969, 181, № 2, p. 618.
10. Kyölä E., Stenholm S.— Opt. Comm., 1977, 22, № 2, p. 123.
11. Greenstein H.— Phys. Rev., 1968, 175, № 2, p. 438.
12. Бакланов Е. В., Чеботаев В. П. — ЖЭТФ, 1972, 62, № 3, с. 541.
13. Lamb W. E.— Phys. Rev., 1964, 134A, № 7, p. 1429.

Горьковский политехнический институт

Поступила в редакцию  
27 апреля 1983 г.

#### THE FORM OF THE DOPPLER LINE IN A STRONG FIELD OF THE STANDING WAVE

*L. A. Budkin, V. V. Mityugov, A. I. Pikhtele, A. P. Protogenov*

An accurate solution is given for the problem on energy absorption of a standing wave by a moved two-level system. The form of Doppler broadening of the absorption line is specified on this basis.

#### XV ВСЕСОЮЗНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ ПО ГАЛАКТИЧЕСКОЙ И ВНЕГАЛАКТИЧЕСКОЙ РАДИОАСТРОНОМИИ

(Продолжение)

Получили дальнейшее развитие наблюдения рекомбинационных линий в декаметровом диапазоне длин волн (эти работы начаты в ОР ИРЭ АН УССР, а теперь предприняты и в ФИАН). Хорошее согласие модели с диэлектронной рекомбинацией и результатов наблюдений делает, как показала прошедшая дискуссия, наблюдения длинноволновых рекомбинационных линий эффективным средством исследования физических условий в межзвездной среде. Можно считать вероятными наблюдения линий с квантовыми числами до  $n \sim 900$  (сейчас наблюдаются линии с  $n \sim 600$ ).

Продолжаются работы по обзорам небесной сферы. Они ведутся на сантиметровых волнах на РАТАН-600 и в декаметровом диапазоне на УТР-2 в Харькове. Чувствительность этих обзоров такова, что на сантиметровых волнах, по-видимому, становится заметным эффект «обратной эволюции» радиосточников — кривая  $\log N - \log S$  сильно уплощается в области малых плотностей потока.

В наблюдениях на радиотелескопах РАТАН-600 и БСА ФИАН получены новые данные о свойствах скоплений галактик. Так, поиск эффекта Сюняева — Зельдовича на волне 7,6 см в направлении нескольких скоплений галактик дал отрицательный результат ( $|\Delta T| < 0,1$  мК). Показано, что мощные радиогало не являются типичными для скоплений.

(Продолжение см. с. 455).