ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XXVII, № 3 РАДИОФИЗИКА 1984

УДК 621.372.826

МЕТОД ПОВЕРХНОСТНОГО АДМИТАНСА В ТЕОРИИ ПЛАНАРНЫХ ОПТИЧЕСКИХ ВОЛНОВОДОВ

В. Г. Полевой

Методом поверхностного адмитанса рассмотрены некоторые общие вопросы теории планарных оптических волноводов. Получено уравнение, определяющее зависимость поверхностного адмитанса от поперечной координаты. Исходя из этого определена также и зависимость электромагнитного поля от поперечной координаты. Показано, что плотность и поток энергии непосредственно выражаются через поверхностный адмитанс.

Планарные оптические волноводы являются одним из основных элементов систем интегральной оптики. Их исследованию посвящена обширная литература — как оригинальные статьи, так и монографии (см., например, [1–3] и цитированную там литературу).

Обычно, рассматривая распространение волн в планарных оптических волноводах, исходят непосредственно из уравнений Максвелла. В данной статье для этих целей мы воспользуемся методом поверхностного адмитанса. Хорошо известно, что при рассмотрении задач распространения волн в слоистых системах — как в электродинамике, так и в теории упругости, часто пользуются понятием поверхностного адмитанса (см., например, [4–6]). Однако в электродинамике, как правило, используется так называемый сторонний адмитанс, т. е адмитанс, который в представлении Фурье не зависит от волнового вектора. Но для задач интегральной оптики основным является противоположный случай. Возможно, это явилось одной из причин того, что метод поверхностного адмитанса не нашел здесь должного применения.

Как будет видно из последующего изложения, поверхностный адмитанс является очень удобной характеристикой планарных волноводов. Использование поверхностного адмитанса позволяет свести задачу распространения волн к двум отдельным задачам, а именно: к исследованию характеристик поверхностных электромагнитных волн при известном адмитансе и нахождению самого адмитанса для конкретно рассматриваемой структуры.

К достоинствам метода поверхностного адмитанса следует отнести и то, что для описания поля используется минимально необходимое число переменных (тангенциальные компоненты электрического или магнитного поля). При этом сразу же учитываются условия на бесконечности (условия излучения), соответствующие физической постановке задачи.

Метод поверхностного адмитанса, как показано в [7], может быть эффективно использован и при рассмотрении рассеяния поверхностных волн на неоднородностях границ раздела сред в планарных волноводах.

1. Определение поверхностного адмитанса и некоторые его свойства. Для определения поверхностного адмитанса рассмотрим некоторую среду, заполняющую все пространство. Выберем декартову систему координат с осями x_1, x_2, $x_3=z$ и разделим рассматриваемую среду на два полупространства плоскостью, перпендикулярной оси z, проведенной на произвольном уровне $z=z_0$. Рассмотрим электромагнитное поле в одном из полупространств. Для определенности будем брать верхнее полупространство. Электрическое и магнитное поля обозначим через $\tilde{\mathbf{E}}$ и $\tilde{\mathbf{H}}$, а индукции — соответственно через $\tilde{\mathbf{D}}$ и $\tilde{\mathbf{B}}$. Для тангенциальных компонент электрического и магнитного полей на верхней стороне границы раздела введем обозначения $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$.

Возможность введения поверхностного адмитанса опирается на единственность решения следующей краевой задачи. Поля $\tilde{\mathbf{E}}$ и $\tilde{\mathbf{H}}$ в верхнем полупространстве будут однозначно определяться через $\boldsymbol{E}$, если ограничиваться только решениями, уносящими энергию от границы. Из выражения для $\tilde{\mathbf{H}}$, устремляя z к границе, получим связь между $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$. В рамках линейной макроскопической электродинамики эта связь линейна, и ее удобно записать в виде

$$I_\alpha(t, \boldsymbol{x}) = \int dt' \int d^2x' \zeta_{\alpha\beta}(t-t', \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}'; z_0) E_\beta(t', \boldsymbol{x}') \qquad (1)$$

Здесь введено обозначение $\boldsymbol{I}=[\boldsymbol{H}, \boldsymbol{n}]$, где $\boldsymbol{n}$ — вектор единичной нормали к границе, направленный внутрь верхнего полупространства, $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{x}'$ — двумерные векторы, лежащие в плоскости раздела. Греческие индексы пробегают значения 1, 2, а по повторяющимся индексам, как обычно, производится суммирование. При записи формулы (1) мы предположили, что среда стационарна. В силу этого $\zeta_{\alpha\beta}$ зависит только от разности $(t-t')$. Тензор $\zeta_{\alpha\beta}$ называется тензором поверхностного адмитанса (точнее, входным тензором поверхностного адмитанса) рассматриваемого полупространства. Он зависит от координаты z_0, определяющей уровень, на котором проведена плоскость раздела. В дальнейшем, если не будет необходимо, этот аргумент будем опускать.

Если среда однородна при сдвигах в плоскости среза (будем называть такую среду поперечно-однородной), то тензор $\zeta_{\alpha\beta}$ будет зависеть только от разности $(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')$. В этом случае (1) принимает вид

$$I_\alpha(t, \boldsymbol{x}) = \int dt' \int d^2x' \zeta_{\alpha\beta}(t', \boldsymbol{x}') E_\beta(t-t', \boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'). \qquad (2)$$

Перейдем в формуле (2) от величин $I_\alpha(t, \boldsymbol{x})$, $E_\beta(t, \boldsymbol{x})$ к их трансформантам Фурье:

$$\begin{Bmatrix} I_\alpha(t, \boldsymbol{x}) \\ E_\beta(t, \boldsymbol{x}) \end{Bmatrix} = \int d\omega \int d^2\varkappa \begin{Bmatrix} I_\alpha(\omega, \varkappa) \\ E_\beta(\omega, \varkappa) \end{Bmatrix} e^{i\varkappa\boldsymbol{x}-i\omega t}.$$

Тогда из (2) получим

$$I_\alpha(\omega, \varkappa) = \zeta_{\alpha\beta}(\omega, \varkappa) E_\beta(\omega, \varkappa), \qquad (3)$$

где

$$\zeta_{\alpha\beta}(\omega, \varkappa) \equiv \int dt \int d^2x \zeta_{\alpha\beta}(t, \boldsymbol{x}) e^{-i\varkappa\boldsymbol{x}+i\omega t}$$

— тензор поверхностного адмитанса в $\omega, \varkappa$-представлении. Конкретное выражение для адмитанса $\zeta_{\alpha\beta}(\omega, \varkappa)$ определяется структурой рассматриваемой среды.

В частном случае, когда среда изотропна относительно вращений вокруг оси z (такую среду будем называть поперечно-изотропной), тензорная структура адмитанса определяется лишь тензорами $\delta_{\alpha\beta}$ и $\varkappa_\alpha \varkappa_\beta$. Поэтому тензор $\zeta_{\alpha\beta}(\omega, \varkappa)$ в этом случае может быть записан в виде

$$\zeta_{\alpha\beta}(\omega, \varkappa) = (\delta_{\alpha\beta} - \varkappa_\alpha \varkappa_\beta \varkappa^{-2}) \zeta_t(\omega, \varkappa) + \varkappa_\alpha \varkappa_\beta \varkappa^{-2} \zeta_l(\omega, \varkappa), \qquad (4)$$

где величины $\zeta_t(\omega, \varkappa)$ и $\zeta_l(\omega, \varkappa)$ — так называемые поперечный и продольный по отношению к волновому вектору $\boldsymbol{\varkappa}$ адмитансы — зависят (помимо ω) только от модуля волнового вектора $\varkappa \equiv |\boldsymbol{\varkappa}|$.

Для того чтобы продемонстрировать роль поверхностного адмитанса в задаче о распространении поверхностных волн, рассмотрим поперечно-однородную структуру и проведем в ней на произвольном уровне z плоскость, перпендикулярную оси z. Обозначим через $\boldsymbol{E}^{(+)}, \boldsymbol{H}^{(+)}$ и $\boldsymbol{E}^{(-)}, \boldsymbol{H}^{(-)}$ тангенциальные компоненты полей соответственно на верхней и нижней сторонах границы раздела. Адмитансы верхнего и нижнего полупространства обозначим посредством $\zeta^{(+)}_{\alpha\beta}$ и $\zeta^{(-)}_{\alpha\beta}$. Тогда, согласно (1), имеем импедансные условия:

$$[\boldsymbol{H}^{(+)}, \boldsymbol{n}]_\alpha = \int dt' \int d^2x' \zeta^{(+)}_{\alpha\beta}(t', \boldsymbol{x}'; z) E^{(+)}_\beta (t - t', \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}') \qquad (5)$$

— на верхней стороне границы раздела и

$$-[\boldsymbol{H}^{(-)}, \boldsymbol{n}]_\alpha = \int dt' \int d^2x' \zeta^{(-)}_{\alpha\beta}(t', \boldsymbol{x}'; z) E^{(-)}_\beta (t - t', \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}') \qquad (6)$$

— на нижней стороне. Здесь $\boldsymbol{n}$ — вектор единичной нормали, направленный внутрь верхнего полупространства, поэтому в (6) появился знак минус, так как адмитансы мы условились определять по отношению к нормали, направленной внутрь рассматриваемой среды.

Учтем теперь граничные условия. В том случае, когда вдоль границы раздела текут поверхностные токи с плотностью $\boldsymbol{J}$, граничные условия, как известно, состоят в том, что тангенциальные компоненты электрического поля непрерывны при переходе через границу раздела, а тангенциальные компоненты магнитного поля испытывают скачок, т. е.

$$\boldsymbol{E}^{(+)} = \boldsymbol{E}^{(-)} \equiv \boldsymbol{E}, \quad [\boldsymbol{H}^{(+)}, \boldsymbol{n}] - [\boldsymbol{H}^{(-)}, \boldsymbol{n}] = -4\pi c^{-1} \boldsymbol{J}.$$

С учетом этого, складывая (5) и (6), получаем уравнение, определяющее $\boldsymbol{E}(t, \boldsymbol{x})$:

$$\int dt' \int d^2x' Y_{\alpha\beta}(t', \boldsymbol{x}'; z) E_\beta (t - t', \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}') = -4\pi c^{-1} J_\alpha (t, \boldsymbol{x}). \qquad (7)$$

Мы ввели суммарный адмитанс

$$Y_{\alpha\beta}(t, \boldsymbol{x}; z) \equiv \zeta^{(+)}_{\alpha\beta}(t, \boldsymbol{x}; z) + \zeta^{(-)}_{\alpha\beta}(t, \boldsymbol{x}; z).$$

Пусть в рассматриваемой среде в отсутствие токов может распространяться плоская волна, т. е. волна вида

$$\boldsymbol{E}(t, \boldsymbol{x}; z) = \boldsymbol{E}(z)\, e^{i\boldsymbol{\varkappa x} - i\omega t}.$$

Тогда из (7) получаем

$$Y_{\alpha\beta}(\omega, \boldsymbol{\varkappa}; z) E_\beta (z) = 0, \qquad (8)$$

где $Y_{\alpha\beta}(\omega, \boldsymbol{\varkappa}; z)$ — суммарный адмитанс в ω, $\boldsymbol{\varkappa}$-представлении. Если в точке z поля не обращаются в нуль, то ω и $\boldsymbol{\varkappa}$ должны удовлетворять уравнению

$$\Delta(\omega, \boldsymbol{\varkappa}; z) \equiv \det Y_{\alpha\beta}(\omega, \boldsymbol{\varkappa}; z) = 0. \qquad (9)$$

Это дисперсионное уравнение определяет связь между ω и $\boldsymbol{\varkappa}$ для всех тех волн, которые не обращаются в нуль в точке z.

Отметим интересную особенность дисперсионного уравнения (9). Так как плоскость раздела является условной и может быть проведена на произвольном уровне, то корни дисперсионного уравнения не зависят от z.

Может случиться, что плоскость раздела проведена «неудачно» и некоторые из мод обращаются в нуль в этой точке. В этом случае может происходить потеря корней, т. е. уравнение (9) не будет определять корни именно для этих мод. Однако если известна функциональная зависимость суммарного адмитанса от z, то уравнение (9) позволяет найти все моды.

Рассмотрим несколько подробнее тот случай, когда среда является поперечно-изотропной. В этом случае суммарный адмитанс имеет тензорную структуру (4), причем $Y_t = \zeta_t^{(+)} + \zeta_t^{(-)}$, $Y_l = \zeta_l^{(+)} + \zeta_l^{(-)}$. Искомое поле $\boldsymbol{E}(z)$ удобно разложить на две составляющие $\boldsymbol{E}_t$ и $\boldsymbol{E}_l$, соответственно перпендикулярную и продольную по отношению к волновому вектору $\boldsymbol{\varkappa}$. Тогда уравнения (8) расщепляются на пару независимых уравнений:

$$Y_l(\omega, \varkappa; z)\, \boldsymbol{E}_l(z) = 0, \quad Y_t(\omega, \varkappa; z)\, \boldsymbol{E}_t(z) = 0.$$

Следовательно, продольные моды определяются дисперсионным уравнением $Y_l = 0$, а поперечные — уравнением $Y_t = 0$.

2. Уравнение для поверхностного адмитанса. Очевидно, что уравнение (8) не определяет зависимости полей от координаты z. Эту зависимость, как будет показано ниже, можно определить, если известно, как зависит от z суммарный адмитанс. В связи с этим выведем уравнение, определяющее функциональную зависимость адмитанса, ограничиваясь изотропной средой.

Если разложить все поля в среде в интегралы Фурье по времени и продольным координатам, то для их трансформант из уравнений Максвелла получим

$$i\,[\boldsymbol{\varkappa}, \tilde{\mathbf{E}}] + [\boldsymbol{n}, \boldsymbol{E}'] = ik\mu\tilde{\mathbf{H}}; \tag{10}$$

$$i\,[\boldsymbol{\varkappa}, \tilde{\mathbf{H}}] + [\boldsymbol{n}, \boldsymbol{H}'] = -ik\varepsilon\tilde{\mathbf{E}}, \tag{11}$$

где $k = \omega/c$ — вакуумное волновое число, $\boldsymbol{n}$ — единичный вектор, направленный по оси z в положительном направлении, а штрихами обозначены производные по z. Из уравнений (10) и (11) легко выразить нормальную компоненту поля $\tilde{\mathbf{E}}_n$ и $\boldsymbol{E}'$ через вектор $\boldsymbol{I}$:

$$\tilde{\mathbf{E}}_n = -(k\varepsilon)^{-1}(\boldsymbol{\varkappa I}), \quad \boldsymbol{E}' = ik\mu\boldsymbol{I} - i\boldsymbol{\varkappa}(k\varepsilon)^{-1}(\boldsymbol{\varkappa I}). \tag{12}$$

Далее удобно перейти к матричной форме записи, представляя адмитансы матрицами 2×2, а векторы — вектор-столбцами. Матрицы будем отмечать «шляпкой». В силу адмитансной связи выразим $\boldsymbol{I}$ через $\boldsymbol{E}$ с помощью адмитанса верхнего полупространства:

$$\boldsymbol{I}(\omega, \varkappa; z) = \hat{\zeta}^{(+)}(\omega, \varkappa; z)\, \boldsymbol{E}(\omega, \varkappa; z). \tag{13}$$

Тогда из (12) получим уравнение

$$\boldsymbol{E}' = -\hat{A}\hat{\zeta}^{(+)}\boldsymbol{E}, \tag{14}$$

где матрица $\hat{A}$ имеет компоненты

$$A_{\alpha\beta} = (\delta_{\alpha\beta} - \varkappa_\alpha\varkappa_\beta\varkappa^{-2})\, A_t + \varkappa_\alpha\varkappa_\beta\varkappa^{-2} A_l,$$

$$A_t = -ik\mu, \quad A_l = iq^2(k\varepsilon)^{-1}, \quad q^2 = \varkappa^2 - k^2\varepsilon\mu.$$

Уравнение (14) при известном $\hat{\zeta}^{(+)}$ определяет зависимость $\boldsymbol{E}$ от координаты z. Ниже мы рассмотрим это уравнение более детально.

Возвращаясь к выводу уравнения для адмитанса $\hat{\zeta}^{(+)}$, подставим $\tilde{H}$ из (10) в (11) и возьмем от получившегося выражения тангенциальную компоненту:

$$I' - ik\varepsilon E - i(k\mu)^{-1}\{\varkappa(\varkappa E) - \varkappa^2 E\} = 0.$$

Подставим теперь сюда I из (13) и исключим E' с помощью (14). В результате получим

$$[(\partial/\partial z)\hat{\zeta}^{(+)} - \hat{\zeta}^{(+)}\hat{A}\hat{\zeta}^{(+)} + q^2\hat{A}^{-1}]\,E(z) = 0.$$

Так как электромагнитное поле может быть задано в точке z произвольно, то отсюда следует уравнение

$$(\partial/\partial z)\hat{\zeta}^{(+)} - \hat{\zeta}^{(+)}\hat{A}\hat{\zeta}^{(+)} + q^2\hat{A}^{-1} = 0. \qquad (15)$$

Таким образом, адмитанс $\hat{\zeta}^{(+)}$ удовлетворяет нелинейному дифференциальному уравнению первого порядка. Уравнение для $\hat{\zeta}^{(-)}$ отличается от (15), очевидно, только знаком перед производной:

$$(\partial/\partial z)\hat{\zeta}^{(-)} + \hat{\zeta}^{(-)}\hat{A}\hat{\zeta}^{(-)} - q^2\hat{A}^{-1} = 0. \qquad (16)$$

Если рассматриваемая среда является изотропной только для z из некоторого слоя $a<z<b$, то уравнения (15) и (16) будут справедливы только внутри этого слоя. Предположим, что примыкающее сверху к слою полупространство поперечно-изотропно. Тогда, очевидно, адмитанс $\hat{\zeta}^{(+)}(z)$ при $a<z<b$ будет иметь «поперечно-изотропный» вид (4). Из уравнения (15) в этом случае следует, что $\zeta_t^{(+)}(z)$ и $\zeta_l^{(+)}(z)$ удовлетворяют двум независимым уравнениям:

$$\frac{\partial}{\partial z}\zeta_t^{(+)} - A_t(\zeta_t^{(+)})^2 + \frac{q^2}{A_t} = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial z}\zeta_l^{(+)} - A_l(\zeta_l^{(+)})^2 + \frac{q^2}{A_l} = 0.$$

Аналогичные уравнения будут справедливы и для адмитансов $\zeta_t^{(-)}$ и $\zeta_l^{(-)}$, если примыкающее снизу полупространство поперечно-изотропно.

Отметим, что в уравнениях для адмитанса ω и $\varkappa$ произвольны, а не связаны дисперсионным уравнением, так как при выводе не предполагалось, что поля удовлетворяют уравнениям Максвелла, однородным во всем пространстве.

Далее, в этом разделе, ограничимся случаем, когда оба примыкающих к слою полупространства поперечно-изотропны. Тогда, используя уравнения для $\zeta_t^{(+)}$, $\zeta_t^{(-)}$ и $\zeta_l^{(+)}$, $\zeta_l^{(-)}$, можно выразить эти адмитансы через суммарный адмитанс:

$$\zeta_{t,l}^{(\pm)} = \frac{1}{2}Y_{t,l} \pm \frac{1}{2A_{t,l}}\frac{\partial}{\partial z}\ln Y_{t,l}. \qquad (17)$$

Обратимся теперь к уравнению (14), определяющему зависимость E от z, и запишем его для поперечных и продольных компонент:

$$E'_{t,l} = -A_{t,l}\zeta_{t,l}^{(+)}E_{t,l}.$$

Подставим в это уравнение $\zeta_{t,l}^{(+)}$ из (17) и проинтегрируем его. В результате получим

$$E_{t,l}(z) = E_{t,l}(z_0)\left(\frac{Y_{t,l}(z_0)}{Y_{t,l}(z)}\right)^{1/2}\exp\left\{-\frac{1}{2}\int_{z_0}^{z} dz A_{t,l}Y_{t,l}\right\}. \qquad (18)$$

Если мы будем рассматривать распространение собственных поперечных или продольных мод, то в этом случае, как показано в предыдущем разделе, ω и $\varkappa$ связаны дисперсионными уравнениями $Y_t=0$ или $Y_l=0$. С учетом этого формула (18) упрощается и принимает вид

$$\boldsymbol{E}_{t,l}(z)=\boldsymbol{E}_{t,l}(z_0)\left(Y_{t,l}(z_0)/Y_{t,l}(z)\right)^{1/2}_{Y_{t,l}=0}. \tag{19}$$

Здесь необходимо сначала найти отношение $Y_{t,l}(z_0)/Y_{t,l}(z)$, а затем подставить $\omega=\omega(\varkappa)$ из соответствующего дисперсионного уравнения. Таким образом, если известна зависимость суммарного адмитанса от z, мы имеем для собственных мод простое выражение для $\boldsymbol{E}_{t,l}(z)$.

3. Адмитансы конкретных структур. Рассмотрим уравнение (15) в некоторых частных случаях. Пусть, как и выше, среда изотропна в слое $a<z<b$, и при этом ε, μ не зависят от z. Относительно примыкающих к этому слою полупространств предположим, что известны их адмитансы при $z=a$ и $z=b$. Эти адмитансы обозначим соответственно через $\hat{\tilde{\zeta}}^{(-)}$ и $\hat{\tilde{\zeta}}^{(+)}$. В рассматриваемом случае матрица $\hat{A}$ не зависит от z и решение уравнения (15), как можно убедиться прямой подстановкой, имеет вид

$$\hat{\zeta}^{(+)}=-q\hat{A}^{-1}(\hat{I}\operatorname{sh}qz+\hat{C}\operatorname{ch}qz)(\hat{I}\operatorname{ch}qz+\hat{C}\operatorname{sh}qz)^{-1}.$$

Здесь $\hat{I}$ — единичная матрица, а $\hat{C}$ — постоянная матрица, подлежащая определению из граничного условия $\hat{\zeta}^{(+)}(b)=\hat{\tilde{\zeta}}^{(+)}$. Определяя таким образом $\hat{C}$, получаем окончательно

$$\begin{aligned}\hat{\zeta}^{(+)}(z)=\hat{\zeta}^{(0)}\left[\hat{\tilde{\zeta}}^{(+)}\operatorname{sh}q(b-z)+\hat{\zeta}^{(0)}\operatorname{ch}q(b-z)\right]^{-1}\times\\ \times\left[\hat{\tilde{\zeta}}^{(+)}\operatorname{ch}q(b-z)+\hat{\zeta}^{(0)}\operatorname{sh}q(b-z)\right],\end{aligned} \tag{20}$$

где введено обозначение $\hat{\zeta}^{(0)}=q\hat{A}^{-1}$. Выбор знака радикала $q=\sqrt{\varkappa^2-k^2\varepsilon\mu}$ несуществен, но для определенности мы будем брать ту ветвь, для которой $\operatorname{Re}q>0$. Если устремить b в формуле (20) к бесконечности, то мы получим, очевидно, адмитанс полупространства, заполненного однородной изотропной средой с проницаемостями ε и μ. Он, как видно, равен $\hat{\zeta}^{(0)}$, причем

$$\zeta_t^{(0)}=iq/k\mu,\qquad \zeta_l^{(0)}=k\varepsilon/iq. \tag{21}$$

Если примыкающая сверху среда является поперечно-изотропной и, следовательно, $\hat{\zeta}^{(+)}(z)$ имеет структуру (4), то для $\zeta_{t,l}^{(+)}(z)$ из (20) получаем

$$\zeta_{t,l}^{(+)}(z)=\zeta_{t,l}^{(0)}\frac{\tilde{\zeta}_{t,l}^{(+)}\operatorname{ch}q(b-z)+\zeta_{t,l}^{(0)}\operatorname{sh}q(b-z)}{\tilde{\zeta}_{t,l}^{(+)}\operatorname{sh}q(b-z)+\zeta_{t,l}^{(0)}\operatorname{ch}q(b-z)}. \tag{22}$$

Выражение (22) дает правила пересчета адмитанса через слой и позволяет находить адмитансы систем, содержащих сколько угодно слоев.

Ясно, что выражение для адмитанса нижнего полупространства $\hat{\zeta}^{(-)}(z)$ можно получить из (20) (или (22) — для поперечно-изотропного случая), произведя в них замену: $\hat{\tilde{\zeta}}^{(+)} \to \hat{\tilde{\zeta}}^{(-)}$, $z \to -z$, $b \to -a$.

Для иллюстрации вида дисперсионного уравнения рассмотрим поперечно-изотропные среды. Пусть слой расположен симметрично, т. е $b = -a$, а адмитансы верхнего и нижнего полупространств одинаковы: $\tilde{\zeta}_{t,l}^{(+)} = \tilde{\zeta}_{t,l}^{(-)} \equiv \tilde{\zeta}_{t,l}$. Тогда с учетом (22) и следующего из него выражения для $\zeta_{t,l}^{(-)}(z)$ получим суммарный адмитанс вида

$$Y_{t,l}(z) = 2\zeta_{t,l}^{(0)} \frac{(\zeta_{t,l}^{(0)} + \tilde{\zeta}_{t,l} \operatorname{th} qa)(\tilde{\zeta}_{t,l} + \zeta_{t,l}^{(0)} \operatorname{th} qa)}{(\zeta_{t,l}^{(0)} + \tilde{\zeta}_{t,l} \operatorname{th} qa)^2 \operatorname{ch}^2 qz - (\tilde{\zeta}_{t,l} + \zeta_{t,l}^{(0)} \operatorname{th} qa)^2 \operatorname{sh}^2 qz}.$$

Согласно (9) дисперсионное уравнение, например для поперечных мод в данном случае дает

$$(\zeta_t^{(0)} + \tilde{\zeta}_t \operatorname{th} qa)(\tilde{\zeta}_t + \zeta_t^{(0)} \operatorname{th} qa) = 0$$

и распадается, следовательно, на два уравнения:

$$\zeta_t^{(0)} + \tilde{\zeta}_t \operatorname{th} qa = 0; \tag{23}$$

$$\tilde{\zeta}_t + \zeta_t^{(0)} \operatorname{th} qa = 0. \tag{24}$$

Зависимость поля от z в слое для собственных мод дается формулой (19). При этом, если ω, $\varkappa$ удовлетворяют ураваению (23), то

$$\boldsymbol{E}(z) = \boldsymbol{A} \operatorname{sh} qz,$$

а если ω, $\varkappa$ удовлетворяют уравнению (24), то

$$\boldsymbol{E}(z) = \boldsymbol{A} \operatorname{ch} qz.$$

Таким образом, уравнение (23) соответствует нечетным модам, а (24) — четным.

Конкретная зависимость ω от $\varkappa$, следующая из дисперсионных уравнений (23) и (24), определяется видом адмитансов $\tilde{\zeta}_{t,l}$.

4. Энергетические соотношения. Используя поверхностный адмитанс, можно получить энергетические соотношения для поверхностных волн, распространяющихся в поперечно-однородной среде. Рассмотрим вначале поток энергии, направленный по оси z. Проведем в среде плоскость раздела на уровне z. Пусть на этой плоскости задано электричекое поле

$$\boldsymbol{E}(t, \boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{E} e^{i\varkappa x - i\omega t} + \boldsymbol{E}^* e^{-i\varkappa x + i\omega t}). \tag{25}$$

Поток энергии внутрь верхнего полупространства определяется нормальной компонентой вектора Пойнтинга:

$$S_n^{(+)} = \frac{c}{4\pi} \boldsymbol{n}\,[\boldsymbol{E}, \boldsymbol{H}] = \frac{c}{4\pi} \boldsymbol{E}\,[\boldsymbol{H}, \boldsymbol{n}] = \frac{c}{4\pi} \boldsymbol{E}\boldsymbol{I}.$$

Подставим сюда электрическое поле (25), учитывая адмитансную связь (3) и производя усреднение по периоду и длине волны, получим

$$\tilde{S}_n^{(+)} = \frac{c}{16\pi}\left(\zeta_{\alpha\beta}^{(+)} + \zeta_{\beta\alpha}^{*(+)}\right) E_\alpha^* E_\beta. \tag{26}$$

Заменяя в этой формуле $\zeta_{\alpha\beta}^{(+)} \to \zeta_{\alpha\beta}^{(-)}$, найдем поток энергии в нижнее полупространство. Так как мы ограничиваемся только волнами, уносящими энергию от границы, то входной адмитанс должен быть таким, чтобы

$$(\zeta_{\alpha\beta}+\zeta_{\beta\alpha}^*) E_\alpha^* E_\beta \geqslant 0. \tag{27}$$

Это налагает определенные ограничения на $\zeta_{\alpha\beta}$ [6]. Мы не отмечаем здесь $\zeta_{\alpha\beta}$ значками (+), (—), так как (27) справедливо в обоих случаях.

Корни дисперсионного уравнения, отвечающие незатухающим собственным модам, могут, очевидно, лежать только в тех областях $\omega\,\varkappa$, где (27) обращается в равенство. В этих областях матрицы (+) и (—) адмитансов антиэрмитовы:

$$\zeta_{\alpha\beta} + \zeta_{\beta\alpha}^* = 0. \tag{27'}$$

Найдем теперь выражения для плотности и потока энергии. Для этого рассмотрим задачу о распространении волн в системе в том случае, когда вдоль плоскости раздела текут токи с поверхностной плотностью $\boldsymbol{J}$. При этом $\boldsymbol{E}(t, \boldsymbol{x}; z)$ и $\boldsymbol{J}$ связаны уравнением (7), где все величины берутся в точке z.

Как обычно, при выводе выражений для плотности и потока энергии в плоской волне необходимо рассмотреть вначале волновые пакеты, т. е. процесс «установления» плоской волны. В связи с этим ток в (7) возьмем в виде

$$\boldsymbol{J}(t, \boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}\left[\boldsymbol{j}(\mu t, \mu\boldsymbol{x})\, e^{i\varkappa x - i\omega t} + \boldsymbol{j}^*(\mu t, \mu\boldsymbol{x})\, e^{-i\varkappa x + i\omega t}\right], \tag{28}$$

где мы ввели «медленное» время $\tau = \mu t$ и «медленные» координаты $\boldsymbol{\xi} = \mu\,\boldsymbol{x}$. При $\mu \to 0$ волновой пакет становится бесконечно узким, т. е. переходит в плоскую волну. Электрическое поле, возбуждаемое током (28), будет иметь вид (25), где теперь амплитуда $\boldsymbol{E}$ зависит от τ и $\boldsymbol{\xi}$. Из уравнения (7) легко получить связь между амплитудами $\boldsymbol{E}(\mu t, \mu\boldsymbol{x})$ и $\boldsymbol{j}(\mu t, \mu\boldsymbol{x})$. Для этого необходимо разложить $\boldsymbol{E}[\mu(t-t'), \mu(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')]$ в ряд по степеням $\mu t'$ и $\mu\,\boldsymbol{x}'$, ограничиваясь первым порядком по μ. В результате получим

$$\left[Y_{\alpha\beta}(\omega, \varkappa) + i\mu\,\frac{\partial Y_{\alpha\beta}(\omega, \varkappa)}{\partial\omega}\,\frac{\partial}{\partial\tau} - i\mu\,\frac{\partial Y_{\alpha\beta}(\omega, \varkappa)}{\partial\varkappa_\gamma}\,\frac{\partial}{\partial\xi_\gamma}\right]\times$$

$$\times E_\beta(\tau, \boldsymbol{\xi}) = -\frac{4\pi}{c} j_\alpha(\tau, \boldsymbol{\xi}).$$

Величина $Q = -\boldsymbol{JE}$ представляет собой, очевидно, поверхностную плотность мощности, развиваемой током $\boldsymbol{J}$. Беря поле и ток в виде пакетов (25) и (28), получим для усредненной по периоду и длине волны мощности выражение

$$\tilde{Q} = \frac{c}{16\pi}\left[(Y_{\alpha\beta} + Y_{\beta\alpha}^*) E_\alpha^* \Gamma_\beta + i\mu E_\alpha^* \frac{\partial Y_{\alpha\beta}}{\partial\omega}\frac{\partial E_\beta}{\partial\tau} - i\mu\frac{\partial E_\alpha^*}{\partial\tau}\times\right.$$
$$\left.\times\frac{\partial Y_{\beta\alpha}^*}{\partial\omega} E_\beta - i\mu E_\alpha^* \frac{\partial Y_{\alpha\beta}}{\partial\varkappa_\gamma}\frac{\partial E_\beta}{\partial\xi_\gamma} + i\mu\frac{\partial E_\alpha^*}{\partial\xi_\gamma}\frac{\partial Y_{\beta\alpha}^*}{\partial\varkappa_\gamma} E_\beta\right]. \tag{29}$$

Для плоской волны ($\mu = 0$) отсюда имеем

$$\tilde{Q} = \frac{c}{16\pi} (Y_{\alpha\beta} + Y^*_{\beta\alpha}) E^*_\alpha E_\beta. \tag{30}$$

Этот результат следует, конечно, и из (26), если сложить потоки энергии в верхнее и нижнее полупространства. Выражение (30) представляет собой потери в системе, причем оно включает в себя как истинные (джоулевы) потери, так и потери, связанные с оттоком энергии от границы, что может иметь место и при отсутствии джоулевых потерь, т. е. при вещественных проницаемостях среды.

Рассмотрим теперь случай, когда джоулевы потери отсутствуют, а ω и $\varkappa$, таковы, что

$$Y_{\alpha\beta} + Y^*_{\beta\alpha} = 0.$$

Тогда (29) принимает следующий вид:

$$\tilde{Q} = \frac{ic}{16\pi} \left[\frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\partial Y_{\alpha\beta}}{\partial \omega} E^*_\alpha E_\beta \right) - \frac{\partial}{\partial \xi_\gamma} \left(\frac{\partial Y_{\alpha\beta}}{\partial \varkappa_\gamma} E^*_\alpha E_\beta \right) \right].$$

Это выражение представляет собой, очевидно, уравнение баланса энергии. Следовательно, величина

$$U = \frac{c}{16\pi} \frac{\partial i Y_{\alpha\beta}}{\partial \omega} E^*_\alpha E_\beta \tag{31}$$

является полной энергией, приходящейся на единицу площади поверхности $z = \text{const}$, а величина

$$\boldsymbol{W} = - \frac{c}{16\pi} \frac{\partial i Y_{\alpha\beta}}{\partial \boldsymbol{\varkappa}} E^*_\alpha E_\beta \tag{32}$$

— полным потоком энергии, протекающей через единицу длины линии, лежащей в плоскости $z = \text{const}$*.

Отметим следующую особенность выражений (31) и (32). Все входящие в них величины являются функциями z. В то же время U и $\boldsymbol{W}$ не должны, конечно, зависеть от произвола в выборе уровня проведения плоскости раздела, т. е. координатная зависимость $Y_{\alpha\beta}$ и $\boldsymbol{E}$ такова, что результат оказывается не зависящим от z.

Если ввести в рассмотрение объемную плотность энергии $u(z)$ и тангенциальную компоненту вектора Пойнтинга $\boldsymbol{P}(z)$, то U и $\boldsymbol{W}$ выразятся через них следующим образом:

$$U = \int_{-\infty}^{\infty} dz'\, u(z'), \quad \boldsymbol{W} = \int_{-\infty}^{\infty} dz'\, \boldsymbol{P}(z').$$

Исходя из обычных электродинамических выражений для вектора Пойнтинга и объемной плотности энергии в диспергирующих средах, можно показать, что

$$u(z) = - \frac{c}{16\pi} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial i \zeta^{(+)}_{\alpha\beta}}{\partial \omega} E^*_\alpha E_\beta \right) = \frac{c}{16\pi} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial i \zeta^{(-)}_{\alpha\beta}}{\partial \omega} E^*_\alpha E_\beta \right); \tag{33}$$

$$\boldsymbol{P}(z) = \frac{c}{16\pi} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial i \zeta^{(+)}_{\alpha\beta}}{\partial \boldsymbol{\varkappa}} E^*_\alpha E_\beta \right) = - \frac{c}{16\pi} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial i \zeta^{(-)}_{\alpha\beta}}{\partial \boldsymbol{\varkappa}} E^*_\alpha E_\beta \right). \tag{34}$$

---

* Вещественность выражений (31) и (32) следует из (27′).

Формулы (31) и (32)—(34) справедливы для произвольных анизотропных сред. Применяя их для собственных мод, вначале необходимо выполнить дифференцирование, а затем подставить ω и $\varkappa$ из дисперсионного уравнения.

Используя (31) и (32), можно показать, что для поверхностных волн поток энергии W обычным образом выражается через групповую скорость $V_g \equiv \partial\omega/\partial\varkappa$ и плотность энергии U:

$$W = V_g U.$$

В случае поперечно-изотропной среды общая формула (32) для потока энергии, переносимой поперечными или продольными волнами, принимает вид

$$W_{t,l} = -\frac{ic}{16\pi}\frac{\varkappa}{\varkappa}\left(\frac{\partial Y_{t,l}}{\partial\varkappa}\right)|E_{t,l}|^2.$$

Из всего предыдущего рассмотрения видно, что использование поверхностного адмитанса при рассмотрении планарных волноводов позволяет получать общие и компактные выражения для всех величин, относящихся к поверхностным волнам.

В заключение мне приятно поблагодарить С. М. Рытова за обсуждение результатов работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Унгер Х-Г. Планарные и волоконные оптические волноводы — М.: Мир, 1980
2. Введение в интегральную оптику. /Под ред. М. Барноски. — М.: Мир, 1977
3. Гончаренко А. М., Редько В. П. Введение в интегральную оптику — Минск: Наука и техника, 1975.
4. Бреховских Л. М. Волны в слоистых средах. — М: Наука, 1973.
5. Миллер М А., Таланов В. И. — Изв. вузов — Радиофизика, 1961, **4**, № 5, с. 795.
6. Курушин Е. П., Нефедов Е. И., Фиалковский А. Т. Дифракция электромагнитных волн на анизотропных структурах. — М.: Наука, 1975.
7. Бирюков С В. — Изв. вузов — Радиофизика, 1984, **27**, № 3, с. 363.

Поступила в редакцию
10 ноября 1982 г

THE SURFACE ADMITTANS METHOD IN THE THEORY OF THE OPTICAL PLANAR WAVEGUIDES

V. G. Polevoj

Some general problems of the optical planar waveguides theory are considered using the surface admittans method The equations determining dependence of the admittans and electromagnetic field from the transverse coordinate are derived. It is showed that the density and flux of energy may be directly expressed through the surface admittans.