ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XXVII, № 3 *РАДИОФИЗИКА* *1984*

УДК 621 372.826

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В ПЛАНАРНЫХ ВОЛНОВОДАХ С НЕРЕГУЛЯРНЫМИ ГРАНИЦАМИ (МЕТОД ПОВЕРХНОСТНОГО АДМИТАНСА)

С. В. Бирюков

Методом поверхностного адмитанса рассмотрены задачи рассеяния поверхностных электромагнитных волн на граничных нерегулярностях, а также распространение этих волн в периодических структурах и профильно-пленочных волноводах. Полученные результаты имеют более общую форму, чем известные, и включают в качестве параметров адмитансы, описывающие сколь угодно сложную слоистую структуру внешнего пространства.

Исследование распространения поверхностных электромагнитных волн в планарных многослойных волноводах является одной из важных задач интегральной оптики. К настоящему времени основные вопросы распространения волн в планарных структурах как с плоскими, так и с нерегулярными границами исследованы в значительной степени и изложены в ряде монографий [1–3]. При этом путь решения каждой конкретной задачи выглядит в большинстве случаев следующим образом: сначала формально записываются через неизвестные амплитуды решения уравнений Максвелла для полей в слоях, после чего эти решения сшиваются на границах, в том числе и нерегулярных, а затем вся полученная для амплитуд система уравнений решается каким-либо способом. Такая процедура чрезвычайно громоздка, особенно при большом количестве различных слоев.

Однако на практике, как правило, требуется знать поля не во всем пространстве, а лишь в ограниченном объеме или даже на какой-либо плоскости. В этом случае влияние внешнего пространства удобно учитывать с помощью тензора поверхностного адмитанса (или его обратной величины — импеданса [4]), связывающего тангенциальные составляющие электрического и магнитного полей на границе внутренней области. При таком подходе сложная задача распространения волн в слоистых структурах распадается на две более простые и самостоятельные задачи отыскания адмитанса на поверхности исследуемой области и решения уравнений движения в этой области с адмитансной связью на границе.

Для иллюстрации предлагаемого подхода ниже рассмотрены задачи рассеяния поверхностных волн на нерегулярностях границ, а также распространение этих волн в периодических структурах и профильно-пленочных волноводах.

1. Общие соотношения. Рассмотрим произвольную среду с плоской границей. Пусть $\boldsymbol{n}$ — внутренняя нормаль к поверхности этой среды. Выберем правую систему координат $x_1 x_2 z$ так, чтобы оси x_1 и x_2 лежали на поверхности и среда занимала область $z>0$. Обозначим через $\boldsymbol{x}=\{x_1, x_2\}$ вектор, лежащий в плоскости $z=0$, а через x — его модуль. Приведем некоторые общие соотношения метода поверхностного адмитанса, которые потребуются нам в дальнейшем.

Поверхностный адмитанс устанавливает на границе среды линейную связь между тангенциальными компонентами электрического $\boldsymbol{E}$- и магнитного $\boldsymbol{H}$-полей, удовлетворяющих условиям излучения [5]. Эту связь для однородной во времени t среды можно записать в виде

$$I_\alpha(\omega, \boldsymbol{\varkappa}) = \int \zeta_{\alpha\beta}(\omega, \boldsymbol{\varkappa}, \boldsymbol{q}) E_\beta(\omega, \boldsymbol{q})\, d^2 q, \tag{1}$$

где вместо аксиального вектора $\boldsymbol{H}$ введен полярный вектор $\boldsymbol{I} = [\boldsymbol{H}, \boldsymbol{n}]$, а $\zeta_{\alpha\beta}(\omega, \boldsymbol{\varkappa}, \boldsymbol{q})$ и $I_\alpha(\omega, \boldsymbol{\varkappa})$, $E_\beta(\omega, \boldsymbol{\varkappa})$ — тензор поверхностного адмитанса и поля в фурье-представлении (греческие индексы здесь и всюду ниже пробегают значения 1 и 2, причем по одинаковым индексам производится суммирование). Трансформанты фурье-полей связаны с самими полями соотношениями вида

$$E_\beta(t, \boldsymbol{x}) = \int d\omega \int d^2\varkappa E_\beta(\omega, \boldsymbol{\varkappa})\, e^{i\boldsymbol{\varkappa}\boldsymbol{x} - i\omega t}.$$

Для поперечно-однородной среды (однородной относительно смещений в плоскости $z=0$) адмитанс $\zeta_{\alpha\beta}(\omega, \boldsymbol{\varkappa}, \boldsymbol{q}) = \zeta_{\alpha\beta}(\omega, \boldsymbol{\varkappa})\,\delta(\boldsymbol{\varkappa} - \boldsymbol{q})$ и равенство (1) переходит в простую связь $I_\alpha(\omega, \boldsymbol{\varkappa}) = \zeta_{\alpha\beta}(\omega, \boldsymbol{\varkappa}) E_\beta(\omega, \boldsymbol{\varkappa})$ с адмитансом, зависящим только от одного векторного аргумента.

Если среда, кроме того, поперечно-изотропна (не меняет своих свойств при поворотах вокруг оси z), то адмитанс можно записать в виде [5]

$$\zeta_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\varkappa}) = \left(\delta_{\alpha\beta} - \frac{\varkappa_\alpha \varkappa_\beta}{\varkappa^2}\right) \zeta_t(\varkappa) + \frac{\varkappa_\alpha \varkappa_\beta}{\varkappa^2} \zeta_l(\varkappa), \tag{2}$$

где так называемые поперечный ζ_t и продольный ζ_l адмитансы зависят лишь от частоты и модуля двумерного волнового вектора $\varkappa = |\boldsymbol{\varkappa}|$ (в целях сокращения записи здесь и ниже частоту ω в аргументах будем опускать).

Пусть теперь плоскость $z=0$ представляет собой границу двух сред, возможно, неоднородных. Величины, относящиеся к верхней среде, будем отмечать знаком «+», а к нижней — знаком «—». При $z=0$ имеют место граничные условия $E_\alpha^{(+)} = E_\alpha^{(-)} \equiv E_\alpha$ и $I_\alpha^{(+)} + I_\alpha^{(-)} = 0$ (внутренние нормали к средам противоположны). Подставив в последнее условие векторы $I_\alpha^{(\pm)}(\boldsymbol{\varkappa})$ из (1) для каждой из сред, получим на границе $z=0$ уравнение для электрического поля

$$\int Y_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\varkappa}, \boldsymbol{q}) E_\beta(\boldsymbol{q})\, d^2\boldsymbol{q} = 0, \tag{3}$$

где введено обозначение для суммарного адмитанса

$$Y_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\varkappa}, \boldsymbol{q}) = \zeta_{\alpha\beta}^{(+)}(\boldsymbol{\varkappa}, \boldsymbol{q}) + \zeta_{\alpha\beta}^{(-)}(\boldsymbol{\varkappa}, \boldsymbol{q}).$$

В случае поперечно-однородной среды интегральное уравнение (3) превращается в алгебраическое

$$Y_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\varkappa}) E_\beta(\boldsymbol{\varkappa}) = 0 \tag{4}$$

с тензором суммарного адмитанса

$$Y_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\varkappa}) = \zeta_{\alpha\beta}^{(+)}(\boldsymbol{\varkappa}) + \zeta_{\alpha\beta}^{(-)}(\boldsymbol{\varkappa}). \tag{5}$$

Суммарный адмитанс неоднородной среды всегда можно представить в виде $Y_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\varkappa}, \boldsymbol{q}) = Y_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\varkappa})\,\delta(\boldsymbol{\varkappa} - \boldsymbol{q}) + Y_{\alpha\beta}^{\text{н}}(\boldsymbol{\varkappa}, \boldsymbol{q})$, где член $Y_{\alpha\beta}^{\text{н}}$ учитывает влияние неоднородностей и исчезает вместе с ними. При этом уравнение для поля (3) переходит в уравнение

$$Y_{\alpha\beta}(\varkappa)E_\beta(\varkappa) = -\int Y^{\text{н}}_{\alpha\beta}(\varkappa, q)E_\beta(q)\,d^2q, \tag{6}$$

являющееся основным для дальнейших расчетов и совпадающее с (4) при $Y^{\text{н}}_{\alpha\beta} = 0$.

Чтобы уравнение (4) имело отличные от нуля решения, необходимо выполнение условия

$$\Delta(\varkappa) \equiv \det Y_{\alpha\beta}(\varkappa) = 0, \tag{7}$$

которое представляет собой дисперсионное уравнение волновых мод, возможных в данной структуре.

В случае контакта двух поперечно-изотропных сред суммарный адмитанс (5) очевидно имеет вид (2), где вместо ζ_t и ζ_l стоят суммарные поперечный $Y_t(\varkappa) = \zeta_t^{(+)}(\varkappa) + \zeta_t^{(-)}(\varkappa)$ и продольный $Y_l(\varkappa) = \zeta_l^{(+)}(\varkappa) + \zeta_l^{(-)}(\varkappa)$ адмитансы. Для такой среды дисперсионное уравнение (7) переходит в более простое уравнение $\Delta(\varkappa) = Y_t(\varkappa)Y_l(\varkappa) = 0$, определяющее модуль волнового вектора. Корни его, удовлетворяющие условию $Y_t(\varkappa) = 0$, соответствуют поперечным TE-, а корни, определяемые равенством $Y_l(\varkappa) = 0$, — продольным TH- волнам.

Процедура получения адмитансов на поверхности поперечно-однородных структур подробно изложена в работе [5]. Ниже мы остановимся на вычислении адмитанса конкретной структуры, не являющейся поперечно-однородной и часто используемой в приложениях.

2. Адмитанс полупространства с неоднородным слоем. Рассмотрим неоднородное полупространство $z>0$, состоящее из поперечно-однородного полупространства, занимающего область $z>d$, и контактирующего с ним неоднородного слоя толщиной d. Пусть форма неоднородностей, заключенных в слое, описывается функцией $z=f(\boldsymbol{x})$, причем область $f(\boldsymbol{x}) < z < d$ занята средой с проницаемостями ε и μ, а область $0<z<f(\boldsymbol{x})$ — средой с проницаемостями ε_1 и μ_1. Предположим, что неоднородности имеют пологую форму и малы, т. е. $|\operatorname{grad} f(\boldsymbol{x})| \ll 1$ и $kd \ll 1$, где $k=\omega/c$. Определим адмитанс $\zeta^{(+)}_{\alpha\beta}(\varkappa, q)$ на поверхности $z=0$ такого полупространства, считая известным адмитанс $\zeta^{(+)}_{\alpha\beta}(\varkappa)$ этого же полупространства в отсутствие неоднородностей, а именно при $f(\boldsymbol{x}) = 0$.

На нерегулярной границе контакта двух сред должны выполняться условия равенства тангенциальных составляющих электрического и магнитного полей. Разлагая поля, входящие в эти условия, в ряд Тейлора по малым параметрам в окрестностях $z=0$ и $z=d$ и ограничиваясь первым порядком малости, получим равенство

$$E_\alpha(\boldsymbol{x}, d) + (f-d)\frac{\partial E_\alpha(\boldsymbol{x}, d)}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial x_\alpha}E_3(\boldsymbol{x}, d) =$$

$$= E_\alpha(\boldsymbol{x}, 0) + f\frac{\partial E_\alpha(\boldsymbol{x}, 0)}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial x_\alpha}E_3(\boldsymbol{x}, 0)$$

и аналогичное для магнитного поля, связывающие поля на границе $z=d$ с полями на границе $z=0$. Сделав далее в этих равенствах преобразование Фурье и выразив с помощью уравнений Максвелла нормальные компоненты и производные через касательные, получим соотношения, связывающие поля $E_\alpha(\boldsymbol{x}, d)$ и $I_\alpha(\varkappa, d)$ с полями $E_\alpha(\varkappa, 0)$ и $I_\alpha(\varkappa, 0)$. Пользуясь далее тем, что адмитанс $\zeta^{(+)}_{\alpha\beta}(\varkappa)$ известен, можно исключить из найденных соотношений поля на границе $z=d$ и получить с точностью до членов первого порядка малости связь (1) между полями на границе $z=0$ с адмитансом

$$\zeta_{\alpha\beta}^{(+)}(\varkappa, q) = \zeta_{\alpha\beta}^{(+)}(\varkappa)\delta(\varkappa - q) + ikF(\varkappa - q)C_{\alpha\beta}(\varkappa, q), \tag{8}$$

где

$$F(\varkappa) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int f(\boldsymbol{x})\, e^{-i\varkappa x}\, d^2\boldsymbol{x},$$

$$C_{\alpha\beta}(\varkappa, q) = \frac{1}{k^2}\left(\frac{1}{\mu_1} - \frac{1}{\mu}\right)(\varkappa_\gamma q_\gamma \delta_{\alpha\beta} - \varkappa_\beta q_\alpha) - (\varepsilon_1 - \varepsilon)\delta_\alpha{}^\beta +$$

$$+\left[(\mu_1 - \mu)\delta_{\lambda\gamma} - \frac{1}{k^2}\left(\frac{1}{\varepsilon_1} - \frac{1}{\varepsilon}\right)\varkappa_\lambda q_\gamma\right]\zeta_{\alpha\lambda}^{(+)}(\varkappa)\zeta_{\gamma\beta}^{(+)}(q).$$

Пусть теперь неоднородный слой граничит при $z=0$ с поперечно-однородным полупространством $z<0$, адмитанс которого $\zeta_{\alpha\beta}^{(-)}(\varkappa)$. В этом случае в уравнении (6) для определения поля на границе $z=0$ имеем

$$Y_{\alpha\beta}^{\text{н}}(\varkappa, q) = ikF(\varkappa - q)C_{\alpha\beta}(\varkappa, q) \tag{9}$$

и суммарный адмитанс $Y_{\alpha\beta}(\varkappa)$, определенный соотношением (5).

3. Рассеяние на неоднородностях. Рассмотрим вначале рассеяние волноводных мод, распространяющихся в слоистой структуре, на неоднородностях произвольного вида в предположении слабого рассеяния. Допустим, что среда в отсутствие неоднородностей представляет собой поперечно-однородную структуру, в которой могут распространяться волны, затухающие при $|z|\to\infty$. Пусть на область с неоднородностями падает какая-либо мода с электрическим полем в плоскости $z=0$:

$$E_\beta^0(\boldsymbol{x}) = E_\beta^0 e^{ip x}, \tag{10}$$

где двумерный волновой вектор $\boldsymbol{p}$ и амплитудные множители E_β^0 удовлетворяют уравнениям (4) и (7) (здесь и всюду ниже опускается временной множитель $\exp(-i\omega t)$).

Представив полное электрическое поле, входящее в уравнение (6), в виде суммы падающего и рассеянного полей, получим из этого уравнения в первом порядке метода возмущений выражение для рассеянного поля

$$E_\gamma(\boldsymbol{x}) = -E_\beta^0\int \frac{A_{\alpha\gamma}(\varkappa)}{\Delta(\varkappa)}Y_{\alpha\beta}^{\text{н}}(\varkappa, \boldsymbol{p})e^{i\varkappa x}\, d^2\varkappa, \tag{11}$$

где $A_{\alpha\gamma}(\varkappa)$ — алгебраические дополнения элементов матрицы тензора $Y_{\alpha\gamma}(\varkappa)$.

Пусть неоднородности занимают конечную область в плоскости $z=0$. Найдем в дальней зоне амплитуду рассеянного поля в какой-либо моде с волновым вектором $\boldsymbol{s}=s\boldsymbol{\tau}$, где единичный вектор $\boldsymbol{\tau}$ определяет направление рассеяния, а s удовлетворяет уравнению (7). Чтобы получить асимптотическую оценку поля этой моды в дальней зоне, перейдем в интеграле в (11) к полярным координатам и вычислим сначала методом стационарной фазы интеграл по углу. Далее, с помощью теоремы о вычетах, примененной к оставшемуся интегралу, получим при $sx\gg 1$ поле в рассеянной моде ($s=|\boldsymbol{s}|$, $p=|\boldsymbol{p}|$)

$$E_\gamma(x\boldsymbol{\tau}) = (2\pi)^{3/2}e^{-i3\pi/4}\sqrt{\frac{s}{x}}\,\frac{A_{\alpha\gamma}(s)}{\Delta'(s\boldsymbol{\tau})}Y_{\alpha\beta}^{\text{н}}(s, p)E_\beta^0 e^{isx}, \tag{12}$$

где $\Delta'(s\boldsymbol{\tau})$ означает производную $\Delta(\varkappa\boldsymbol{\tau})$ по $\varkappa$ при $\varkappa=s$.

Рассмотрим теперь рассеяние в описанной выше структуре с неоднородным слоем, адмитанс которого $Y^{\text{н}}_{\alpha\beta}$ определяется (9), предполагая, что вне области, занятой неоднородностями, среда поперечно-изотропна. Поскольку в этом случае каждая рассеянная мода распространяется во всех направлениях, то можно определить дифференциальное сечение рассеяния падающей моды в рассеянную формулой

$$d\sigma = x d\varphi \,|\, \boldsymbol{W}_s \,|\, / \,|\, \boldsymbol{W}_p \,|\,, \tag{13}$$

где $\boldsymbol{W}_s$ и $\boldsymbol{W}_p$ — потоки энергии [5] в рассеянном поле (12) и поле падающей волны (10) соответственно, а угол рассеяния φ есть угол между векторами $\boldsymbol{s}$ и $\boldsymbol{p}$. Общая формула (13) содержит в себе четыре различных случая рассеяния падающих поперечных или продольных волн в поперечные же и продольные волны. Проводя конкретные вычисления для волн различных типов, можно дифференциальное сечение рассеяния (13) представить в виде

$$d\sigma_a^b = (2\pi)^3 k^2 s \frac{|F(\boldsymbol{s}-\boldsymbol{p})|^2}{|Y_a'(p)\, Y_b'(s)|} (G_a^b)^2 \, d\varphi, \tag{14}$$

где индексы a и b обозначают типы падающего и рассеянного полей соответственно (оба индекса могут принимать «значения» l или t), а штрихи — производные от адмитансов по аргументу.

В формуле (14) фактор G_a^b описывает зависимость от угла рассеяния, не связанную с формой неоднородностей, и имеет следующие компоненты:

$$\begin{aligned}
G_t^t &= \left(\frac{1}{\mu_1} - \frac{1}{\mu}\right)\frac{sp}{k^2} - (\varepsilon_1 - \varepsilon)\cos\varphi + (\mu_1 - \mu)\,\zeta_t^{(+)}(s)\,\zeta_t^{(+)}(p)\cos\varphi, \\
G_l^t &= [\varepsilon_1 - \varepsilon - (\mu_1 - \mu)\,\zeta_t^{(+)}(s)\,\zeta_l^{(+)}(p)]\sin\varphi, \\
G_t^l &= [\varepsilon_1 - \varepsilon - (\mu_1 - \mu)\,\zeta_l^{(+)}(s)\,\zeta_t^{(+)}(p)]\sin\varphi, \\
G_l^l &= (\varepsilon_1 - \varepsilon)\cos\varphi - \left[(\mu_1 - \mu)\cos\varphi - \left(\frac{1}{\varepsilon_1} - \frac{1}{\varepsilon}\right)\frac{sp}{k^2}\right]\zeta_l^{(+)}(s)\,\zeta_l^{(+)}(p).
\end{aligned} \tag{15}$$

Здесь $\zeta_t^{(+)}$ и $\zeta_l^{(+)}$ — поперечный и продольный адмитансы верхнего полупространства в отсутствие неоднородностей (все адмитансы, входящие в (14) и (15), — чисто мнимые [5]).

Важной особенностью коэффициентов G_t^t и G_l^l в (15) является то, что они могут обращаться в нуль при углах рассеяния φ_t и φ_l, удовлетворяющих условиям

$$\cos\varphi_t = \frac{(\mu_1 - \mu)\, sp}{\mu_1 \mu k^2 \left[(\mu_1 - \mu)\,\zeta_t^{(+)}(s)\,\zeta_t^{(+)}(p) - (\varepsilon_1 - \varepsilon)\right]}; \tag{16}$$

$$\cos\varphi_l = \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon)\, sp\,\zeta_l^{(+)}(s)\,\zeta_l^{(+)}(p)}{\varepsilon_1 \varepsilon k^2 \left[\varepsilon_1 - \varepsilon - (\mu_1 - \mu)\,\zeta_l^{(+)}(s)\,\zeta_l^{(+)}(p)\right]}. \tag{17}$$

Поскольку значения этих углов не зависят от формы неоднородностей, то их можно трактовать как некоторые аналоги углов Брюстера для поверхностных волн. В выражения (16) и (17) входят адмитансы верхнего полупространства, которое может быть произвольной слоистой структурой. Влияние нижнего полупространства учитывается при решении дисперсионных уравнений для нахождения волновых чисел p и s.

Известны частные случаи формул (16) и (17), полученные лишь для трехслойной магнитно-однородной среды при анализе распространения волн в периодических структурах [6, 7]. Так если неоднородный слой магнитно-однороден ($\mu_1=\mu$), то из (16) получаем $\cos\varphi_t=0$, откуда $\varphi_t=\pm\pi/2$. Подчеркнем, что этот результат сохраняется не только для трехслойной среды, как подразумевалось в [6], но и для произвольной слоистой структуры.

Подставив в (17) при $\mu_1=\mu$ выражение из работы [5] для продольного адмитанса $\zeta_l^{(+)}$ в случае изотропного верхнего полупространства с проницаемостями ε и μ, находим

$$\cos\varphi_l=-\frac{\varepsilon}{\varepsilon_1}\frac{sp}{\sqrt{p^2-k^2\varepsilon\mu}\,\sqrt{s^2-k^2\varepsilon\mu}},$$

что совпадает с результатом, приведенным в работе [7]. При рассеянии в ту же моду, что и падающая, из последнего выражения при $p=s$ получаем [6]

$$\cos\varphi_l=-\frac{\varepsilon}{\varepsilon_1}\frac{p^2}{p^2-k^2\varepsilon\mu},$$

откуда видно, что угол φ_l существует в этом случае только при

$$\varepsilon_1(p^2-k^2\varepsilon\mu)\geqslant\varepsilon p^2 \quad \text{и} \quad |\varphi_l|>\pi/2.$$

Интересно отметить, что аналоги углов Брюстера для поверхностных волн имеют место и в акустике при рассеянии волн Рэлея на нерегулярностях границы упругого тела [8].

Что же касается коэффициентов G_l^t и G_t^l, то легко видеть, что они взаимны (переходят друг в друга при перемене местами p и s), максимальны при $\varphi=\pm\pi/2$ и обращаются в нуль при $\varphi=0,\pi$. В случае $\mu_1=\mu$ их вид не зависит от структуры слоистой среды.

Исследуем теперь рассеянное поле в случае двумерных неоднородностей, для которых $f(\boldsymbol{x})=f(x_1)$. Подставив в (11) выражение (9) и учитывая, что $F(\boldsymbol{\varkappa})=\delta(\varkappa_2)F_1(\varkappa_1)$, где

$$F_1(\varkappa_1)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x_1)\,e^{-i\varkappa_1x_1}\,dx_1,$$

легко вычислить интеграл по $\varkappa_2$. Оставшийся интеграл по $\varkappa_1$ оценим в дальней зоне. Для отраженной моды с волновым вектором $\boldsymbol{s}$ ($s_2=p_2>0$, $s_1<0$, $p_1>0$) с помощью теоремы о вычетах получаем при $s_1x_1\gg1$

$$E_\gamma(\boldsymbol{x})=-2\pi kF_1(s_1-p_1)\,A_{\alpha\gamma}(\boldsymbol{s})\left(\frac{\partial\Delta(\boldsymbol{s})}{\partial s_1}\right)^{-1}C_{\alpha\beta}(\boldsymbol{s},\boldsymbol{p})\,E_\beta^0e^{i\boldsymbol{s}\boldsymbol{x}}. \qquad (18)$$

Определим коэффициент трансформации по энергии R падающей моды (10) в отраженную (18) как модуль отношения составляющих по оси x_1 потоков энергии [5] в этих модах. Для поперечно-изотропной среды можно, как и выше, описать четыре случая отражения одной формулой

$$R_a^b=(2\pi k)^2\frac{|F_1(s_1-p_1)|^2}{|Y_a'(p)Y_b'(s)\cos\theta_p\cos\theta_s|}(G_a^b)^2.$$

Здесь, как и раньше, G_a^b определяются формулами (15), а угол φ между векторами $\boldsymbol{s}$ и $\boldsymbol{p}$ связан с углами падения θ_p и отражения θ_s соотношением $\varphi+\theta_p+\theta_s=\pi$, где $\cos\theta_p=p_1/p$, $\cos\theta_s=-s_1/s$.

4. Распространение волн в периодических структурах. Чтобы проиллюстрировать метод поверхностного адмитанса при анализе распространения волн в периодических структурах, ограничимся случаем нерегулярностей границы, описываемых синусоидальной функцией $f(\boldsymbol{x}) = (d/2)[1 - \cos(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x})]$, где $\boldsymbol{Q}$ — «волновой вектор» решетки. Подставив с учетом (9) это выражение в уравнение для поля (6), получим функциональное уравнение

$$\hat{Y}_{\alpha\beta}(\varkappa)E_\beta(\varkappa) = (ikd/4)[C_{\alpha\beta}(\varkappa, \varkappa - \boldsymbol{Q})E_\beta(\varkappa - \boldsymbol{Q}) + + C_{\alpha\beta}(\varkappa, \varkappa + \boldsymbol{Q})E_\beta(\varkappa + \boldsymbol{Q})], \tag{19}$$

где введено обозначение

$$\hat{Y}_{\alpha\beta}(\varkappa) = Y_{\alpha\beta}(\varkappa) + (ikd/2)C_{\alpha\beta}(\varkappa, \varkappa).$$

Нетрудно видеть, что адмитанс $\hat{Y}_{\alpha\beta}$ представляет собой суммарный адмитанс на поверхности $z=0$ в случае плоских границ, когда область $0<z<d/2$ в слое толщины d заполнена средой с проницаемостями ε_1 и μ_1, а область $d/2<z<d$ — средой с проницаемостями ε и μ.

Представим поле в структуре при $z=0$ в виде суммы бесконечного числа пространственных гармоник:

$$E_\beta(\boldsymbol{x}) = e^{i\boldsymbol{p}\boldsymbol{x}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} E_\beta^{(m)} e^{im\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}}, \tag{20}$$

где волновой вектор $\boldsymbol{p}$ и амплитуды $E_\beta^{(m)}$ подлежат определению. Подставив (20) в уравнение (19), придем к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений для амплитуд $E_\beta^{(m)}$:

$$\hat{Y}_{\alpha\beta}(\boldsymbol{p} + m\boldsymbol{Q})E_\beta^{(m)} - (ikd/4)[C_{\alpha\beta}(\boldsymbol{p} + m\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{p} + (m-1)\boldsymbol{Q})E_\beta^{(m-1)} + + C_{\alpha\beta}(\boldsymbol{p} + m\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{p} + (m+1)\boldsymbol{Q})E_\beta^{(m+1)}] = 0, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{21}$$

При решении системы уравнений типа (21) можно использовать [9] как численные, так и приближенные методы, одним из которых является метод связанных мод.

Пусть на частоте ω_0 в слоистой структуре с плоскими границами могут распространяться две моды с волновыми векторами $\boldsymbol{p}_0$ и $\boldsymbol{s}_0$. Эти векторы должны удовлетворять дисперсионным уравнениям $\hat{\Delta}(\omega_0, \boldsymbol{p}_0) = \hat{\Delta}(\omega_0, \boldsymbol{s}_0) = 0$, где в соответствии с (7) $\hat{\Delta} = \det \hat{Y}_{\alpha\beta}$. Однако если граница между средами с проницаемостями ε, μ и ε_1, μ_1 будет нерегулярной и периодической, то при условии резонанса $\boldsymbol{p}_0 - \boldsymbol{Q} = \boldsymbol{s}_0$ между этими модами будет происходить сильное взаимодействие [9]. При этом волновые векторы $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{p} - \boldsymbol{Q}$ таких мод в периодической структуре будут отличаться от соответствующих им векторов $\boldsymbol{p}_0$ и $\boldsymbol{s}_0$ в структуре с плоскими границами.

Получим уравнения для определения векторов $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{s}$ на частотах $\omega = \omega_0 + \delta\omega$, где $|\delta\omega| \ll \omega_0$, считая известными векторы $\boldsymbol{p}_0$ и $\boldsymbol{s}_0$. Оставив в ряду (20) только члены с $m = 0, -1$, соответствующие этим сильновзаимодействующим модам, получим вместо бесконечной системы уравнений (21) систему

$$\hat{Y}_{\alpha\beta}(\boldsymbol{p})E_\beta^0 - (ikd/4)C_{\alpha\beta}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{s})E_\beta^{(-1)} = 0,$$
$$-(ikd/4)C_{\alpha\beta}(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{p})E_\beta^{(0)} + \hat{Y}_{\alpha\beta}(\boldsymbol{s})E_\beta^{(-1)} = 0. \tag{22}$$

Раскрывая детерминант системы (22) и приравнивая его нулю, найдем уравнение для определения p или s:

$$\hat{\Delta}(p)\,\hat{\Delta}(s) + (kd/4)^2 C_{\alpha\lambda}(s, p)\,\hat{A}_{\gamma\lambda}(p)\,\hat{A}_{\alpha\beta}(s)\,C_{\gamma\beta}(p, s) + \\ + (kd/4)^4 \det C_{\gamma\lambda}(s, p) \det C_{\gamma\beta}(p, s) = 0, \tag{23}$$

где $\hat{A}_{\alpha\beta}$ есть алгебраические дополнения элементов матрицы $\hat{Y}_{\alpha\beta}$.

Чтобы получить решение этого уравнения, воспользуемся методом возмущений, учитывая, что $k_0 d \ll 1$, где $k_0 = \omega_0/c$. Введем поправки $\delta p = p - p_0 \equiv s - s_0 = \delta s$ и представим их в виде $\delta p = (dp_0/d\omega_0)\,\delta\omega + Q\chi_p$, $\delta s = (ds_0/d\omega_0)\,\delta\omega + Q\chi_s$, где производные $(dp_0/d\omega_0)$ и $(ds_0/d\omega_0)$ определены дисперсионными уравнениями, а χ_p и χ_s — неизвестны. Разлагая определители $\hat{\Delta}$ в (23) в ряд Тейлора в окрестности ω_0, p_0 и s_0 и учитывая, что $\delta p = \delta s$, приходим, оставляя старшие члены, к простым уравнениям $\chi_p \chi_s = \chi^2$ и $\chi_s - \chi_p = \delta\chi$ для определения χ_p и χ_s. Здесь введены параметр фазового рассогласования $\delta\chi = Q Q^{-2}(dp_0/d\omega_0 - ds_0/d\omega_0)\,\delta\omega$ и коэффициент связи χ, квадрат которого

$$\chi^2 = -\left(\frac{k_0 d}{4}\right)^2 \frac{C_{\alpha\lambda}(s_0, p_0)\,\hat{A}_{\gamma\lambda}(p_0)\,\hat{A}_{\alpha\beta}(s_0)\,C_{\gamma\beta}(p_0, s_0)}{(Q\partial\hat{\Delta}(p_0)/\partial p_0)(Q\partial\hat{\Delta}(s_0)/\partial s_0)}. \tag{24}$$

Если в отсутствие неоднородностей среда поперечно-изотропна, то выражение (24) упрощается и принимает вид

$$(\chi_a^b)^2 = -\left(\frac{k_0 d}{4}\right)^2 \frac{p_0 s_0 (G_a^b)^2}{\hat{Y}'_a(p_0)(Qp_0)\,\hat{Y}'_b(s_0)(Qs_0)},$$

где опять одной формулой описаны четыре случая взаимодействия различных типов волн (индексы a и b обозначают типы волн с волновыми векторами $\boldsymbol{p}_0$ и $\boldsymbol{s}_0$ соответственно). Здесь $p_0 = |\boldsymbol{p}_0|$, $s_0 = |\boldsymbol{s}_0|$, а $\hat{Y}_a$ и $\hat{Y}_b$ — продольные или поперечные суммарные адмитансы в структуре с плоскими границами на поверхности $z=0$, причем $\hat{Y}_a(p_0) = \hat{Y}_b(s_0) = 0$. Компоненты G_a^b характеризуют связь между модами и определены выражениями (15), в которые надо вместо p и s подставить p_0 и s_0.

Если $\hat{Y}'_a(p_0)(Qp_0)\hat{Y}'_b(s_0)(Qs_0) > 0$ (составляющие вдоль Q потоков энергии [5] в модах направлены в разные стороны), то величины $(\chi_a^b)^2 < 0$. Это означает, что поправка δp при не слишком больших $\delta\omega$ имеет мнимую часть и с ростом величины (Qx) обе связанные моды экспоненциально затухают. Если же $\hat{Y}'_a(p_0)(Qp_0)\hat{Y}'_b(s_0)(Qs_0) < 0$, имеем $(\chi_a^b)^2 > 0$ и поправка δp — чисто действительна, т. е. обе моды распространяются без затухания. Амплитуды полей определяются с помощью системы (22). В случае трехслойной среды коэффициенты χ_a^b пропорциональны коэффициентам связи из работы [6].

Пользуясь полученными результатами, можно найти и коэффициенты отражения и прохождения волн через конечную периодическую структуру. Мы на этом, однако, останавливаться не будем, поскольку такая процедура хорошо известна [1].

5. Профильно-пленочные волноводы. Пусть в произвольной слоистой структуре имеется описанный выше неоднородный слой с функцией $f(x_1)$, зависящей лишь от координаты x_1. Если в отсутствие неоднородности вдоль оси x_2 в такой структуре могут распространяться какие-либо моды, то при наличии замедляющей неоднородности ($\varepsilon_1\mu_1>\varepsilon\mu$) эти моды должны локализоваться в области, где она сосредоточена. При этом их постоянные распространения изменятся и будут зависеть от вида функции $f(x_1)$. Таким образом, появляются дополнительные возможности создавать структуры без дифракционного уширения пучков распространяющихся волн и в некоторых пределах регулировать дисперсионные свойства планарных волноводов [3].

Для исследования таких профильно-пленочных волноводов также удобно использовать метод поверхностного адмитанса и исходить в анализе из уравнения (6) для полей на границе $z=0$. Будем искать решение этого уравнения в виде бегущей вдоль оси x_2 волны $E_\beta(\boldsymbol{x})=$ $=E_\beta(x_1)\exp(ip_2x_2)$ с постоянной распространения p_2.

Функция $E_\beta(x_1)$ в силу пологости и малости неоднородности должна плавно зависеть от координаты x_1, а ее трансформанта Фурье $E_\beta(x_1)$, наоборот, должна быть δ-образной функцией, сосредоточенной вблизи $\varkappa_1=0$ (в случае $f=0$ функция $E_\beta(x_1)=\mathrm{const}$, а $E_\beta(\varkappa_1)\sim\delta(\varkappa_1)$). Обозначим

$$E_\beta^{\mathrm{in}}=\int\limits_{-\infty}^{\infty}E_\beta(\varkappa_1)\,d\varkappa_1. \tag{25}$$

Воспользуемся для решения уравнения (6) методом возмущений и подставим в его правую часть выражение для поля в нулевом приближении $E_\beta(\boldsymbol{\varkappa})=E_\beta^{\mathrm{in}}\,\delta(\varkappa_1)\,\delta(\varkappa_2-p_2)$, соответствующем случаю $f=0$. В результате для поля получим с учетом (9) выражение

$$E_\gamma(p_1)=-ikF_1(p_1)\,Y_{\gamma\alpha}^{-1}(\boldsymbol{p})\,C_{\alpha\beta}(\boldsymbol{p},\,\boldsymbol{p}^0)\,E_\beta^{\mathrm{in}}, \tag{26}$$

где вместо $\varkappa_1$ использовано обозначение p_1, $\boldsymbol{p}=(p_1,p_2)$ и $\boldsymbol{p}^0=(0,p_2)$. Проинтегрировав обе части равенства (26) по p_1, придем с учетом (25) к системе двух линейных алгебраических уравнений для определения амплитуд E_β^{in}. Приравняв нулю детерминант этой системы, получим для нахождения постоянной распространения p_2 дисперсионное уравнение

$$\det\left[\delta_{\gamma\beta}+ik\int\limits_{-\infty}^{\infty}F_1(p_1)\frac{A_{\alpha\gamma}(\boldsymbol{p})}{\Delta(\boldsymbol{p})}C_{\alpha\beta}(\boldsymbol{p},\,\boldsymbol{p}^0)\,dp_1\right]=0. \tag{27}$$

Находя из (27) возможные значения p_2 и определив соответствующие им амплитуды E_β^{in}, нетрудно далее, обращая (26) по Фурье, рассчитать зависимость полей от поперечной координаты x_1. Поскольку в работе [10] подробно изложена совершенно аналогичная методика расчета тонкопленочных акустических волноводов с плавной границей, ограничим изложение этого пункта сказанным.

В заключение отметим, что хотя плодотворность применения понятия адмитанса при анализе распространения поверхностных волн в слоистых структурах подчеркивалась в обзоре [4], в интегральной оптике это понятие, к сожалению, практически не используется.

В данной работе показано, что введение поверхностного адмитанса позволяет, с одной стороны, упрощать выкладки, а с другой, — получать результаты более общие, чем при прямых расчетах полей. Подчеркнем, что такой подход в ряде случаев дает возможность получать полезные результаты и без конкретизации адмитансов внешнего пространства, поскольку легко разделяются эффекты, связанные со структурой слоистой среды и с параметрами неоднородностей.

Автор благодарен С. М. Рытову за обсуждение результатов работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Введение в интегральную оптику. / Под ред. М. Барноски. — М· Мир, 1977
2. Гончаренко А. М., Редько В. П. Введение в интегральную оптику. — Минск: Наука и техника, 1975.
3. Унгер Х.-Г. Планарные и волоконные оптические волноводы. — М.: Мир, 1980.
4. Миллер М. А., Таланов В. И. — Изв. вузов — Радиофизика, 1961, 4, № 5, с. 795.
5. Полевой В. Г. — Изв. вузов — Радиофизика, 1984, 27, № 3, с. 373
6. Сычугов В. А., Тищенко А. В., Хакимов А. А. — Письма в ЖТФ, 1979, 5, № 15, с. 937.
7. Сычугов В. А., Тищенко А. В. — Квантовая электроника, 1980, 7, № 2, с. 326.
8. Бирюков С. В., Горышник Л. Л. — Акуст. журн, 1977, 23, № 3, с 461.
9. Элаши Ш. — ТИИЭР, 1976, 64, № 12, с. 22.
10. Бирюков С. В. — Акуст. журн., 1979, 25, № 1, с. 36.

Поступила в редакцию
10 ноября 1982 г.

PROPAGATION OF ELECTROMAGNETIC WAVES IN PLANAR WAVEGUIDES WITH NONREGULAR BOUNDARIES (SURFACE ADMITTANS METHOD)

S. V. Birjukov

Problems of surface electromagnetic wave scattering on boundary irregularities and propagation of these waves in periodic structures and planar waveguides of variable thickness are considered by the surface admittans method. Results obtained are applicable for abitrary planar structures.

ИНСТРУКЦИЯ ПО СОСТАВЛЕНИЮ РЕФЕРАТОВ

1. В реферате кратко излагается основное содержание статьи. Реферат должен дать читателю представление о характере освещаемой работы, оригинальности постановки вопроса, методике проведения исследования и его основных результатах.

2. Реферату должно предшествовать библиографическое описание в следующем виде: название статьи, фамилия и инициалы автора, название журнала, где помещается статья. Текст реферата начинается непосредственно с изложения существа работы без повторения заголовка. Форма изложения материала не обязательно должна повторять форму изложения оригинальной статьи.

3. Если оригинал содержит большое количество цифровых данных, их следует обобщить и систематизировать

4. Средний объем реферата 1,5—2 страницы машинописного текста, отпечатанного через два интервала на белой писчей бумаге обычного формата (30×21) в двух экземплярах с полем 4 *см* с левой стороны.

5. Таблицы, схемы, графики и пр. могут быть включены в том случае, если они отражают основное содержание работы или сокращают текст реферата. Сообщение о наличии в реферируемой работе таблиц, схем, графиков, фотографий, карт, рисунков необходимо давать в конце реферата. Например, табл. 2, илл. 10.

6. Формулы приводятся только в том случае, если они необходимы для понимания статьи. Громоздкие математические выражения помещать не следует. Формулы следует вписывать четко, не изменяя принятых в оригинале обозначений величин. Формулы и буквенные обозначения вписываются **черными чернилами во второй экземпляр.** Вписывание формул и буквенных обозначений, а также исправление замеченных опечаток в **первом экземпляре не делается.**

7. В конце реферата в квадратных скобках указывается название учреждения или предприятия, в котором автор реферируемой работы (если эти данные приводятся в статье) провел работу. Подпись автора и дату написания реферата следует ставить в левом нижнем углу на обоих экземплярах реферата.