

УДК 621.372 852

## РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ТОКА И РЕЗОНАНС СТЕРЖНЕВЫХ ПРОВОДНИКОВ В ПРЯМОУГОЛЬНОМ ВОЛНОВОДЕ

*В. А. Петленко, М. В. Нестеренко*

Проведено исследование распределения тока и резонансных характеристик тонких стержневых проводников, произвольно расположенных в прямоугольном волноводе. Обнаружено, что при определенных положениях даже электрически короткие стержни становятся резонансными.

Задача о рассеянии (излучении) электромагнитных волн тонкими проводниками, находящимися в прямоугольном волноводе, принадлежит к числу весьма сложных внутренних краевых задач электродинамики, поскольку в строгой постановке она включает как необходимый этап решения выяснение закона распределения тока в проводниках. После того как найден ток, определение поля сводится к вычислению соответствующих интегралов, что не встречает принципиальных трудностей [1, 2].

Наиболее общее асимптотическое выражение для тока в тонком проводнике при произвольном его возбуждении и положении в волноводе получено в работе [3] методом усреднения:

$$J(s) = \bar{A}(-L) \cos ks + \bar{B}(-L) \sin ks + \alpha \int_{-L}^s \left\{ \frac{i\omega}{k} E_{0s}(s') + \bar{F}_p[s', \bar{A}, \bar{B}] \right\} \sin k(s - s') ds' \quad (1)$$

Здесь  $\bar{A}$  и  $\bar{B}$  — постоянные интегрирования,  $\alpha = 1/2 \ln(r_e/2L)$  — малый параметр.

$$\bar{F}_p[s, \bar{A}, \bar{B}] = [\bar{A}(s') \sin ks' - \bar{B}(s') \cos ks'] G_s(s|s')|_{-L}^L \quad (2)$$

— усредненное собственное поле проводника,  $G_s(s|s')$  — компонента электрической функции Грина вдоль координаты  $s$ , связанной с проводником, а  $E_{0s}(s)$  — тангенциальная составляющая стороннего поля, параллельная его оси. Выражение (1) справедливо для стержневых проводников, не перегораживающих полностью прямоугольный волновод. Последнее означает, что проводник либо совсем не касается стенок волновода (свободный проводник), либо касается их одним из концов (связанный проводник). В данной работе проведен электродинамический анализ функции распределения тока и резонансных характеристик таких проводников. Аналогичные вопросы изучались численно в [4, 5] только для центрального расположения проводника ( $x_0 = a/2$ ), перпендикулярного широкой стенке волновода ( $\varphi = 90^\circ$ ).

Рассмотрим тонкий стержневой проводник длиной  $2L$  в форме прямого кругового цилиндра (полоски), эквивалентный радиус которого совпадает с радиусом его поперечного сечения:  $r_e = r$  (для полоски,

ширина которой  $d$  значительно больше ее толщины,  $r_e = d/4$ ). Не теряя общности, предположим, что ось стержня произвольно ориентирована лишь в плоскости  $z=0$  (рис. 1), а в волноводе может распространяться только основная  $H_{10}$ -волна ( $a > 2b$ ,  $a < \lambda < 2a$ ). Для нахождения тока воспользуемся формулой (1), принимая во внимание как симметричную, так и антисимметричную составляющие стороннего поля. Тогда, пренебрегая величинами второго порядка малости, получим следующее выражение:

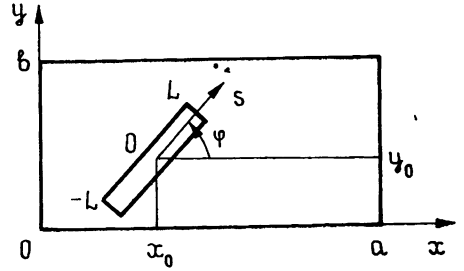


Рис. 1.

$$J(s) = - \alpha \frac{i\omega/k}{\sin 2kL + \alpha W_0(kr_e, 2kL)} \left\{ \sin k(L-s) \int_{-L}^s E_{0s}(s') \sin k(L+s') ds' + \right. \\ \left. + \sin k(L+s) \int_s^L E_{0s}(s') \sin k(L-s') ds' \right\}, \quad (3)$$

в котором

$$W_0(kr_e, 2kL) = \int_{-L}^L [G_s(s|L) + G_s(s|-L)] \sin k(L-s) ds \quad (4)$$

— функция собственного поля проводника, учитывающая нелокальные эффекты, связанные с рассеянием (излучением) волн. После интегрирования она приобретает вид

$$W_0(kr_e, 2kL) = 2\pi \sum_{m,n} \frac{\epsilon_m \epsilon_n}{abk_z} e^{-k_z r_e} \left\{ [\sin(k_x x_0 + k_y y_0) \cos k_1 L - \right. \\ \left. - \cos 2\varphi \sin(k_x x_0 - k_y y_0) \cos k_2 L] \left[ \sin(k_x x_0 + k_y y_0) \sin kL \times \right. \right. \\ \left. \times \frac{k \sin kL \cos k_1 L - k_1 \cos kL \sin k_1 L}{k^2 - k_1^2} + \right. \\ \left. + \cos(k_x x_0 + k_y y_0) \cos kL \frac{k \cos kL \sin k_1 L - k_1 \sin kL \cos k_1 L}{k^2 - k_1^2} \right] + \\ \left. + [\sin(k_x x_0 - k_y y_0) \cos k_2 L - \cos 2\varphi \sin(k_x x_0 + k_y y_0) \cos k_1 L] \times \right. \\ \left. \times \left[ \sin(k_x x_0 - k_y y_0) \sin kL \frac{k \sin kL \cos k_2 L - k_2 \cos kL \sin k_2 L}{k^2 - k_2^2} + \right. \right. \\ \left. \left. + \cos(k_x x_0 - k_y y_0) \cos kL \frac{k \cos kL \sin k_2 L - k_2 \sin kL \cos k_2 L}{k^2 - k_2^2} \right] \right\}, \quad (5)$$

где  $k_z = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 - k^2}$ ,  $k_1 = k_x \cos \varphi + k_y \sin \varphi$ ,  $k_2 = k_x \cos \varphi - k_y \sin \varphi$ , а точка компенсации [6] взята с координатами  $x_0$ ,  $y_0$ ,  $r_e$ . Расположение этой точки в другом месте периметра поперечного сечения проводника приводит в расчетах к таким же значениям функции  $W_0$ , как и по формуле (5), хотя она и имеет несколько иной вид. Объясняется это

тем, что в принятом здесь приближении тонкого проводника изменением стороннего поля на его поверхности при  $s = \text{const}$  можно пренебречь, поэтому целесообразно положить эквивалентный радиус равным нулю всюду, где его влияние мало. Однако величина  $r_e$  и определенный выбор точки компенсации могут существенно сократить необходимое количество слагаемых двойной суммы при вычислении  $W_0$ . Иллюстрацией этому служит рис. 2а, на котором кривая  $x$  соответствует действительной части  $W_0$  с координатами точки компенсации  $x_0 + r_e$ ,  $y_0$ , 0, а кривая  $z$  рассчитана по формуле (5) для  $a/b = 2,118$ ;  $\lambda/\lambda_{\text{кр}} = 0,75$ ;  $2L/b = 0,94$ ;  $r_e/b = 0,016$ ;  $x_0/a = y_0/b = 0,5$ ;  $\varphi = 90^\circ$ . Как видно, своего истинного значения  $W'_{0z}$  достигает при  $m, n \sim 100$ , тогда как  $W'_{0x}$  — при  $m, n \sim 900$ . К такому результату приводит наличие быстро убывающего с ростом  $m$  и  $n$  экспоненциального множителя в (5), причем сходимость ряда улучшается с увеличением  $r_e$ .

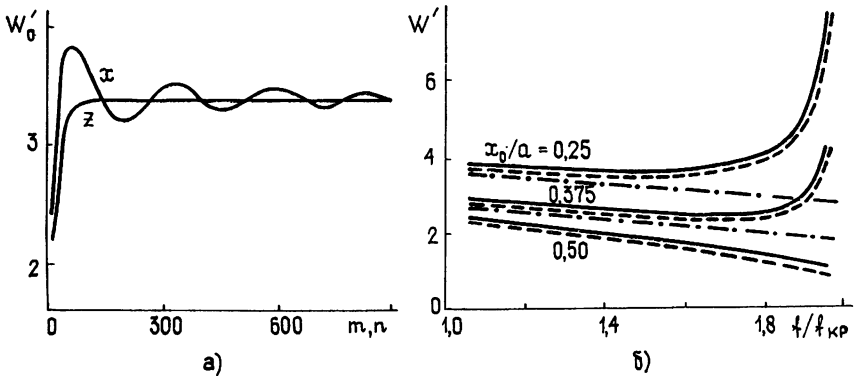


Рис 2.

В общем виде функция собственного поля довольно громоздка, однако она приводится к выражениям, не содержащим рядов. Для этого используем процедуру суммирования, предложенную в [3], распространив ее на случай  $a=b$  и любые  $x_0$ . Полагая  $\varphi = 90^\circ$  и  $y_0 = b/2$ , имеем  $W_0(kr_e, 2kL) = 2 \sin kL W(kr_e, kL)$ , где

$$W(kr_e, kL) = 4\pi \sum_{m,n} \frac{\epsilon_m \epsilon_n}{ab k_z} \sin k_x x_0 \sin k_x (x_0 + r_e) \cos^2 k_y y_0 \cos k_y L \times \\ \times \frac{(k \sin kL \cos k_y L - k_y \cos kL \sin k_y L)}{k^2 - k_y^2}. \quad (6)$$

Действительную часть  $W$  преобразуем следующим образом:

$$W'(kr_e, kL) = \frac{4\pi}{ab} \left\{ \frac{\sin kL}{k} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos k_x r_e - \cos 2k_x x_0}{\sqrt{k_x^2 - k^2}} + \right. \\ \left. + \sum_{m=1}^{\infty} [1 + (-1)^m] \frac{k \sin kL (1 + \cos 2k_y L) - k_y \cos kL \sin 2k_y L}{k^2 - k_y^2} \times \right. \\ \left. \times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin k_x x_0 \sin k_x (x_0 + r_e)}{k_z} \right\}, \quad (7)$$

тогда двойная сумма легко сворачивается с помощью известных соотношений [3], дополненных первым членом ряда из 8.526 [7]:

$$\sum_{m=1}^{\infty} K_0(mx) \cos mxt \approx \frac{1}{2} \left( 0,577 + \ln \frac{x}{4\pi} \right) + \frac{\pi}{2x\sqrt{1+t^2}} + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{1 - (xt/2\pi)^2} - 1 \right) \quad (8)$$

(формула (8) справедлива при условиях  $x \ll \pi$ ,  $xt < 2\pi$ , которые в нашем случае,  $-x/\pi = 2r_e/b$ ,  $xt/2\pi = 2L/b$ , выполняются всегда). Что же касается оставшейся суммы по  $n$ , то наряду со слагаемыми, полученными в [6],

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos(n\pi r_e/a) - \cos(2n\pi x_0/a)}{\sqrt{n^2 - (ka/\pi)^2}} \approx \ln \left( \frac{2a}{\pi r_e} \sin \frac{\pi x_0}{a} \right) + (kx_0)^2 \left[ \ln \frac{a}{2\pi x_0} + \frac{3}{2} + \left( \frac{\pi x_0}{6a} \right)^2 \right] - \left[ 2 + \left( \frac{ka}{\pi} \right)^2 \right] \sin^2 \frac{\pi x_0}{a}, \quad (9)$$

в правой части (9) необходимо учитывать добавочный член

$$N = - \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{ka}{2\pi} \right)^2 - 1 / \sqrt{1 - \left( \frac{ka}{2\pi} \right)^2} \right] \sin^2 \frac{2\pi x_0}{a}, \quad (10)$$

физический смысл которого состоит в сохранении особенности функции собственного поля, обращающей в нуль амплитуду наведенного в стержне тока на критических частотах возбуждаемых им типов колебаний [8].

Принимая все это во внимание, ряды в (7) свернем к выражению

$$\begin{aligned} W'(kr_e, kL) = & \frac{4 \sin kL}{kb} \left\{ \ln \left( \frac{2a}{\pi r_e} \sin \frac{\pi x_0}{a} \right) + (kx_0)^2 \left[ \ln \frac{a}{2\pi x_0} + \frac{3}{2} + \left( \frac{\pi x_0}{6a} \right)^2 \right] - \left[ 2 + \left( \frac{ka}{\pi} \right)^2 \right] \sin^2 \frac{\pi x_0}{a} - \right. \\ & \left. - 1 / \sqrt{1 - \left( \frac{ka}{2\pi} \right)^2} \right\} \sin^2 \frac{2\pi x_0}{a} + kL \sin kL \left\{ \frac{4L}{b} \left( 0,577 + \ln \frac{r_e}{2b} \right) + \right. \\ & + 2 \left( \ln \frac{4L}{r_e} - 1 \right) + \frac{b}{L} \ln \left[ 1 - \left( \frac{2L}{b} \right)^2 \right] - 2 \left( \ln \frac{1 - 2L/b}{1 + 2L/b} + \frac{2L}{b} \right) - \\ & \left. - \frac{2b}{\pi^2 L} \left[ K_0 \left( r_e \frac{2\pi}{b} \right) \sin^2 \frac{2\pi L}{b} + \frac{1}{4} K_0 \left( r_e \frac{4\pi}{b} \right) \right] - \right. \quad (11) \\ & \left. - \left( \frac{8}{bL} \right) \frac{\cos^2(2\pi L/b)}{(2\pi/b)^2 - k^2} \left[ K_0 \left( r_e \sqrt{(2\pi/b)^2 - k^2} \right) - K_0 \left( 2x_0 \sqrt{(2\pi/b)^2 - k^2} \right) \right] + \right. \\ & + \cos kL \left\{ \frac{4L}{b} \left( 0,577 + \ln \frac{r_e}{2b} \right) + \ln \frac{4L}{r_e} - \left( \ln \frac{1 - 2L/b}{1 + 2L/b} + \frac{4L}{b} \right) - \right. \\ & \left. - \frac{2}{\pi} K_0 \left( r_e \frac{2\pi}{b} \right) \sin \frac{4\pi L}{b} + \left( \frac{8\pi}{b^2} \right) \frac{\sin(4\pi L/b)}{(2\pi/b)^2 - k^2} \times \right. \end{aligned}$$

$$\times [K_0 (r_e \sqrt{(2\pi/b)^2 - k^2}) - K_0 (2x_0 \sqrt{(2\pi/b)^2 - k^2})] \}.$$

Точность аппроксимации и целесообразность введения добавки в (9) можно оценить по графикам на рис. 2б, где представлены частотные зависимости функции  $W'$  в одномодовом диапазоне при тех же размерах структуры, что и для рис. 2а. Сплошные кривые рассчитаны с помощью (7), пунктирные — по формуле (11), а штрихпунктирные — по той же формуле, но без учета (10).

Если на стержень падает волна  $H_{10}$ , единственную составляющую стороннего электрического поля на его поверхности запишем в виде

$$E_{0s}(s) = C \sin \varphi \sin [(\pi/a)(x_0 + s \cos \varphi)], \quad (12)$$

где  $C$  — постоянная возбуждения. Тогда из (3) находим искомое распределение тока

$$J(s) = -\alpha C \frac{(i\omega/k^2) \sin \varphi}{[1 - (\pi/ka)^2 \cos^2 \varphi] [\sin 2kL + \alpha W_0(kr_e, 2kL)]} \times \\ \times \{ \sin [(\pi/a)(x_0 - L \cos \varphi)] \sin k(L - s) + \sin [(\pi/a) \times \\ \times (x_0 + L \cos \varphi)] \sin k(L + s) - \sin 2kL \sin [(\pi/a)(x_0 + s \cos \varphi)] \}, \quad (13)$$

полностью определяющее рассеянное поле

$$E_y^{\text{расс}}(x, y, z) = \frac{2\pi}{i\omega} \sum_{m, n} \frac{\epsilon_m \epsilon_n}{ab k_z} \sin k_x x \cos k_y y e^{-k_z |z|} \times \\ \times \int_{-L}^L J(s) [(k^2 - k_y^2) \sin \varphi \sin k_x (x_0 + s \cos \varphi) \cos k_y (y_0 + s \sin \varphi) - \\ - k_x k_y \cos \varphi \cos k_x (x_0 + s \cos \varphi) \sin k_y (y_0 + s \sin \varphi)] ds \quad (14)$$

и коэффициент отражения [1, 2].

Полное поле в волноводе в присутствии стержня существует в виде падающей, отраженной и прошедшей волн основного типа, а также суперпозиции местных колебаний высших порядков. Благодаря запасу энергии в этих колебаниях, стержень ведет себя как некая реактивность, эквивалентная емкости или индуктивности в зависимости от того, превышает ли в среднем за период энергия электрического поля энергию магнитного: при равенстве энергий наступает резонанс.

Анализ показывает, что резонанс стержневых проводников в прямоугольном волноводе вызывается двумя причинами — изменением электрической длины проводника (частотный резонанс) и изменением его местоположения внутри волновода (пространственный резонанс). В первом случае, как известно, появление резонанса обусловлено тем, что достаточно короткий проводник концентрирует в основном электрическое поле и обладает поэтому емкостным сопротивлением, которое по мере увеличения длины (частоты) все в большей степени компенсируется индуктивным, связанным с возрастающим магнитным полем, пока реактанс не обратится в нуль. Имеется, однако, и другая возможность приобретения проводником дополнительной емкости или индуктивности, которая реализуется за счет перераспределения электромагнитной энергии между  $E$ - и  $H$ -типами колебаний в окрестности стержня фиксированных электрических размеров в результате его смещения или наклона относительно стенок волновода. В этом случае при компенсации реактивности обнаруживается явление пространственного резонанса.

Все сказанное учитывается функцией собственного поля проводника, которая и вносит особенность в поведение наведенного в нем тока. На рис. 3а, б для различных значений смещения и частоты приведены рассчитанные по формуле (13) амплитуды и фазы тока в центре свободного проводника ( $2L/b=0,94$ ,  $r_e/b=0,016$ ), перпендикулярного ( $\varphi=90^\circ$ ,  $y_0=b/2$ ) широкой стенке волновода ( $a/b=2,118$ ). Из графиков видно, что при резонансе амплитуда тока максимальна, а фаза равна нулю, но если для частотного резонанса ( $x_0/a=\text{const}$ ) это

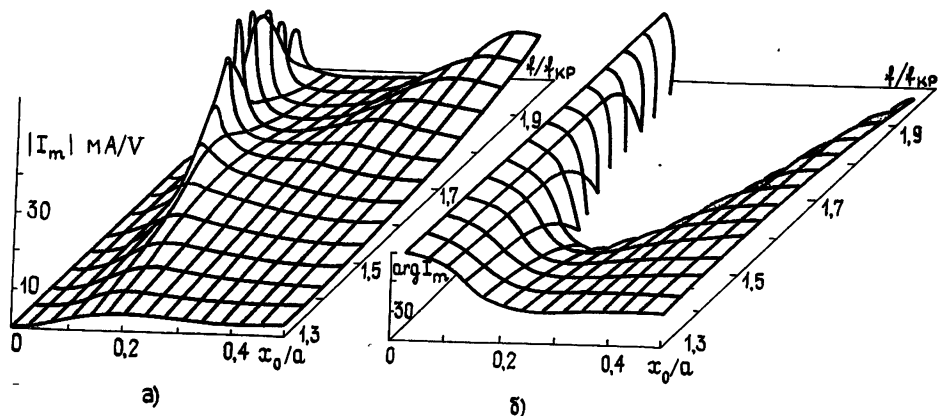


Рис. 3.

достигается при неизменном стороннем поле, то для пространственного резонанса ( $f/f_{кр}=\text{const}$ ) ток возрастает, даже когда действующее значение стороннего поля падает. Знание величины тока в точке  $s=0$  оказывается достаточным, поскольку при  $\varphi=90^\circ$  (или для других углов при  $x_0=a/2$ ) функция его распределения чисто симметрична, а фаза постоянна. Необходимо подчеркнуть, что хотя в общем случае распределение тока содержит и антисимметричную составляющую, для полуволнового стержня ( $kL=\pi/2$ ) асимметрия исчезает, равно как и явление пространственного резонанса.

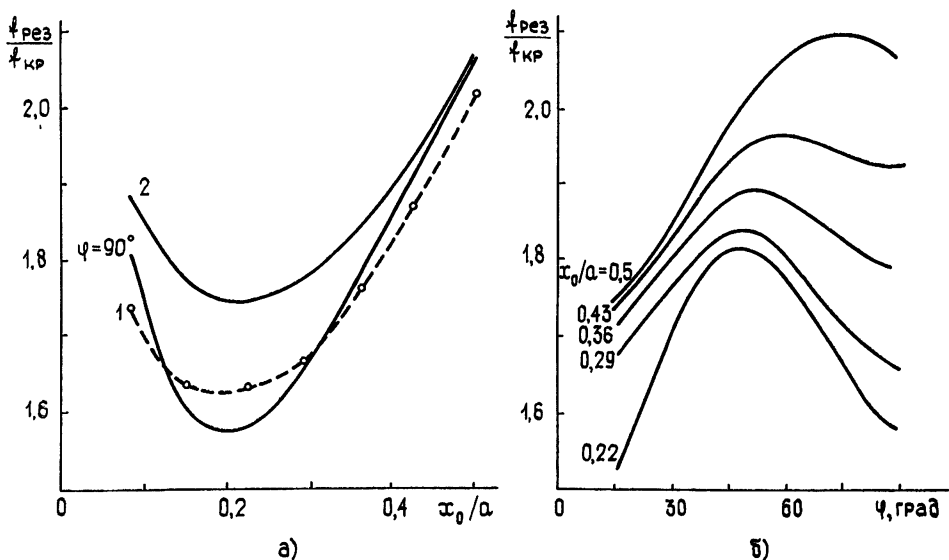


Рис. 4.

Резонансные частоты стержня, т. е. координаты нулевых фаз на рис. 3б, определяются следующим дисперсионным уравнением [3]:

$$\sin 2kL + \alpha W'_0(kr_e, 2kL) = 0, \quad (15)$$

решение которого соответствует кривой 1 на рис. 4а (пунктирная линия — эксперимент, согласующийся с результатами работы [9]). Здесь же нанесены резонансные частоты связанного проводника длиной вдвое меньше свободного (кривая 2).

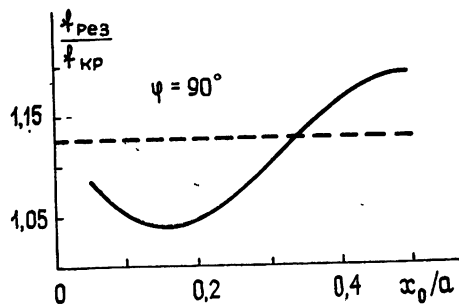


Рис. 5

свободном пространстве. Последнее обстоятельство приводит к тому, что даже электрически короткий проводник становится резонансным при определенном его положении в волноводе.

Остается отметить, что с увеличением длины связанного проводника ( $L > b/2$ ) наряду с укорочением имеет место его резонансное удлинение [3] по сравнению с четвертьволновым стержнем (пунктирная линия на рис. 5), которое по мере смещения проводника ( $L/b = 0,94$ ) из центра волновода за счет пространственного резонанса переходит в укорочение. В этом состоит основное отличие резонансных свойств, а следовательно, и амплитудно-фазовых распределений свободного и связанного проводников в прямоугольном волноводе.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Петленко В. А., Хижняк Н. А. — Изв. вузов — Радиофизика, 1978, 21, № 9, с. 1325.
2. Петленко В. А., Хижняк Н. А. — Изв. вузов — Радиофизика, 1979, 22, № 11, с. 1382.
3. Петленко В. А., Хижняк Н. А. — Изв. вузов — Радиофизика, 1981, 24, № 4, с. 472.
4. Захария И. А., Пишарас Х. Н. — Теоретическая электротехника, 1978, вып. 24, с. 79.
5. Гарб Х. Л., Фридберг П. Ш., Яковер И. М. — Радиотехника и электроника, 1980, 25, № 10, с. 2079.
6. Левин Л. Современная теория волноводов. — М.: ИЛ, 1954.
7. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. — М.: Физматгиз, 1963.
8. Курашов А. Г. — Радиотехника и электроника, 1981, 26, № 7, с. 1405.
9. Денисов Д. С., Седых В. М., Ужик В. Ф., Шаулов Е. А. — Вестник Харьк. ун-та, Внутренние и внешние задачи электродинамики, 1982, № 227, с. 42.

Харьковский государственный университет

Поступила в редакцию 19 апреля 1983 г.

#### CURRENT DISTRIBUTION AND RESONANCE OF ROD CONDUCTORS IN A RECTANGULAR WAVEGUIDE

V. A. Petlenko, M. V. Nesterenko

Current distribution and resonance characteristics of thin rod conductors arbitrarily located in a rectangular waveguide have been investigated. Under certain locations even electrically short rods is found to become resonant.