

УДК 621 315 391 592

МНОГОЧАСТОТНАЯ ДИФРАКЦИЯ СВЕТА НА УЛЬТРАЗВУКЕ*В. Ю. Петрунькин, И. А. Водоватов*

Рассматривается дифракция света на ультразвуковом возмущении, состоящем из ряда гармонических составляющих, в изотропной среде при произвольной длине акустооптического взаимодействия. Анализ основан на решении интегрального уравнения, полученного путем введения эквивалентных токов в объеме взаимодействия. Даны границы применимости полученных выражений для дифрагированного поля. Проведена оценка динамического диапазона акустооптических устройств при различном количестве входных сигналов.

Одним из актуальных вопросов теории дифракции света на ультразвуке является многочастотная дифракция.

Дифракция света на сложном ультразвуковом возмущении, состоящем из ряда гармонических составляющих, имеет место во многих приложениях акустооптики. спектральном анализе [1], обработке сигналов в реальном масштабе времени [2], распознавании образов [3] и т. д.

Вопросы дифракции на нескольких гармонических сигналах рассматривались рядом авторов [2, 4, 5]. В работе [2] был рассмотрен режим дифракции Рамана—Ната на двух гармонических ультразвуковых волнах. Более общий подход, основанный на решении обобщенных уравнений Рамана—Ната, предложен в [4]. В [4] приведены аналитические выражения для случая малых сигналов в предельных режимах дифракции Рамана—Ната и Брэгга, позволяющие оценить нелинейные эффекты, обусловленные особенностями многочастотной дифракции. Аналогичный подход содержится в работе [5], где приведены численные расчеты дифракции света на ультразвуке сложного спектрального состава. При этом оценка точности принятого приближения при расчетах промежуточного режима дифракции затруднительна и в [5] не приводится. Однако при практических применениях акустооптические устройства в целом ряде случаев работают в широкой полосе частот, в промежуточном режиме дифракции, что обуславливает актуальность детального исследования этого режима.

В работе [6] предложен другой подход к рассмотрению общей задачи дифракции света на ультразвуковом возмущении произвольного вида, основанный на решении интегрального уравнения, полученного в результате разложения искомого поля по плоским волнам. Изложенный в [6] подход позволяет с известной точностью получить аналитические выражения для дифрагированного поля в большинстве практически важных случаев, включая и промежуточный режим дифракции. Ниже приводится рассмотрение многочастотной дифракции света на ультразвуке, основанное на результатах работы [6]. Полученная форма решения позволяет осуществить как детерминистский, так и статистический подход к оценке нелинейных эффектов многочастотной дифракции.

Постановка задачи. Рассмотрим ультразвуковое возмущение вида

$$f(\Omega t, x) = \sum_{p=1}^{N+1} a_p \cos(\Omega_p t - q_p x - \varphi_p), \quad (1)$$

распространяющееся в неограниченной изотропной среде с диэлектрической проницаемостью ϵ_0 вдоль оси x в области $|y| \leq Y_0$ и состоящее из $N+1$ гармонических сигналов с амплитудами a_p , частотами Ω_p , начальными фазами φ_p и волновыми числами $q_p = 2\pi/\Lambda_p$. Аналогично [4] будем рассматривать лишь те нелинейные эффекты, которые обусловлены многократным акустооптическим взаимодействием света и ультразвука, пренебрегая влиянием фотоупругих и акустических нелинейностей. Положим также, что модуляция диэлектрической проницаемости среды, обусловленная синусоидальным сигналом, является синусоидальной, так что диэлектрическая проницаемость среды в области распространения ультразвука может быть представлена в виде

$$\epsilon = \epsilon_0 + \sum_{p=1}^{N+1} \Delta\epsilon_p \cos(\Omega_p t - q_p x - \varphi_p). \quad (2)$$

Пусть в плоскости xy под углом θ_0 к оси y падает плоская световая волна $E_i = E_i \mathbf{u}_{k_0} \exp[i(\omega t - \mathbf{k}_0 \mathbf{r})]$ с амплитудой E_i , вектором поляризации \mathbf{u}_{k_0} , частотой ω и волновым вектором $\mathbf{k}_0 = \{k_0 \sin \theta_0, k_0 \cos \theta_0\}$, $k_0 = 2\pi/\lambda$. Полагая $\Omega_p \ll \omega$, будем рассматривать временную переменную t в выражении (2) как некоторый параметр. Сформулировав, таким образом, задачу как квазистатическую, воспользуемся для ее решения результатами работы [6].

В дальнейшем будем рассматривать влияние нескольких гармонических сигналов на дифрагированное поле в плюс первом дифрагированном порядке дифракции одного из них, например $(N+1)$ -го, принимая его за основной сигнал с амплитудой a_s , частотой Ω_s , волновым числом q_s и начальной фазой φ_s , т. е. полагая $N+1=s$.

Вывод выражений для дифрагированного поля в области дифракции первого порядка основного сигнала. Используя результаты работы [6], запишем выражение для дифрагированного светового поля в виде

$$\mathbf{E} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{E}^{(n)}; \quad (3)$$

$$\mathbf{E}^{(n)} = \left(\frac{ix}{2}\right)^n E_i \exp[i(\mathbf{k}_n - \mathbf{k}_0)_x vt] \prod_{m=0}^{n-1} \int_{*_{m+1} y^0 > 0} \mathbf{u}_{k_n} e^{i\mathbf{k}_n \mathbf{r}} F(\xi_m) \times \quad (4)$$

$$\times \int_{-1}^{y_{m+1}} \exp[ik_0 Y_0 (\cos \theta_{m+1} - \cos \theta_m) y_m] dy_m d(\mathbf{k}_{m+1} \mathbf{x}^0),$$

где $y_n = 1$, \mathbf{k}_n , \mathbf{u}_{k_n} — волновой вектор и вектор поляризации плоской волны, v — скорость звука в среде, \mathbf{x}^0 , \mathbf{y}^0 — орты осей x, y , $\kappa = 2\pi \Delta\epsilon Y_0 (\lambda n_0 \cos \theta_0)^{-1}$ — индекс модуляции при гармоническом сигнале единичной амплитуды, $n_0 = \sqrt{\epsilon_0}$ — показатель преломления невозмущенной среды, $F(\xi_m)$ — пространственный спектр ультразвукового возмущения,

$$\xi_m = k_0 (\sin \theta_m - \sin \theta_{m+1}), \quad m \in [0, n-1]. \quad (5)$$

Тогда с учетом (1) и (2) вместо (4) найдем

$$E^{(n)} = \left(\frac{ix_s}{2}\right)^n E_l \sum_{k_n} e^{-ik_n r} u_{k_n} \left[\sum_{p=1}^{N+1} a'_p \cos(\Omega_p t - \varphi_p) \right]^n \times \\ \times \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{y_{n-1}} \dots \int_{-1}^{y_1} \exp \left[ik_0 Y_0 \sum_{m=0}^{n-1} (\cos \theta_{m+1,p} - \cos \theta_{m,p}) y_m \right] \times \quad (6) \\ \times dy_0 dy_1, \dots, dy_{n-1},$$

где углы $\theta_{m,p}$ определяются равенством

$$k_0 (\sin \theta_{m+1,p} - \sin \theta_{m,p}) = \pm q_l, \quad p, l \in [1, N+1], \quad m \in [0, n-1], \quad (7)$$

$\kappa_s = 2\pi\Delta\epsilon_s Y_0 (\lambda n_0 \cos \theta_0)^{-1}$ — индекс модуляции основного сигнала, а внешнее суммирование ведется по всем $k_n = (k_0 \sin \theta_n, k_0 \cos \theta_n)$, для которых верно равенство (7).

Выражения (3) и (6) с учетом (7) дают общее решение задачи. Из приведенных формул следует, что при дифракции света на ультразвуковом возмущении из ряда гармонических составляющих в общем случае в дифрагированном поле, обладающем дискретной линейчатой структурой, присутствует бесконечное множество частот, обусловленных различными комбинациями частотных составляющих ультразвукового возмущения (см. [4, 5]).

Рассматривая узкополосные сигналы, положим

$$|(\Omega_s - \Omega_p) \Omega_s^{-1}| \ll 1, \quad p \in [1, N].$$

В этом случае дифрагированное поле имеет полосчатую структуру и понятие дифракционного порядка приобретает смысл. Ограничиваясь аналогично [6] приближением третьего порядка взаимодействия ($n \leq 3$), получим следующие выражения для относительной комплексной амплитуды поля в плюс первом порядке дифракции основного сигнала:

$$E_{+1s} = \frac{x_s}{2} \frac{\sin \gamma_s}{\gamma_s} - \frac{x_s^3}{2} \Phi_s - \frac{x_s}{2} \sum_{p=1}^N \left(\frac{x_p}{2}\right)^2 \Phi_{sp}, \quad (8)$$

где

$$E_{+1s} = E_{+1s} [l E_l u_{k_l} e^{-ik_l r} e^{i(\Omega_s t - \varphi_s)}]^{-1},$$

$$k_1 = \{k_0 \sin \theta_1, k_0 \cos \theta_1\} \quad x_p = 2\pi\Delta\epsilon_p Y_0 (\lambda n_0 \cos \theta_0)^{-1}, \quad (9)$$

$$\gamma_s = k_0 Y_0 (\cos \theta_1 - \cos \theta_0);$$

$$\Phi_s = \sum_{l=1}^3 \frac{1}{2^3} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{y_2} \int_{-1}^{y_1} \exp \left(i \sum_{m=0}^2 \gamma_{ml} y_m \right) dy_0 dy_1 dy_2, \\ \gamma_{ml} = k_0 Y_0 (\cos \theta_{m+1,l} - \cos \theta_{m,l}), \quad (10)$$

$$\Phi_{sp} = \sum_{j=1}^6 \frac{1}{2^3} \int_{-1}^1 \int_{-1}^{y_2} \int_{-1}^{y_1} \exp \left(i \sum_{m=0}^2 \gamma_{mj}^p y_m \right) dy_0 dy_1 dy_2, \\ \gamma_{mj}^p = k_0 Y_0 (\cos \theta_{m+1,j}^p - \cos \theta_{m,j}^p),$$

углы определяются соотношениями

$$k_0(\sin \theta_1 - \sin \theta_0) = q_s, \quad k_0(\sin \theta_{m+1,l} - \sin \theta_{m,l}) = \pm q_s, \quad (11)$$

$$m \in [0, 2], \quad l \in [1, 3];$$

$$k_0(\sin \theta_{m+1,j}^p - \sin \theta_{m,j}^p) = q_s, \quad k_0(\sin \theta_{m+1,j}^p - \sin \theta_{m,j}^p) = \pm q_p, \quad (12)$$

$$m \in [0, 2], \quad j \in [1, 6], \quad p \in [1, N].$$

При этом $\sin \theta_{3l} = \sin \theta_{3j}^p = \sin \theta_0 + \lambda(n_0 \Lambda_s)^{-1}$ при любых l, j, p . Из (8) следует, что первые два члена описывают дифракцию света на одиночном основном сигнале, а третий член учитывает наличие во входном сигнале еще N гармонических составляющих. На рис. 1 приведены соответствующие условиям (12) парциальные дифракционные порядки, отражающие влияние p -й входной гармонической составляющей на дифрагированное поле в первом порядке дифракции основного сигнала. Для малых углов дифракции выражения для коэффициентов γ могут быть упрощены. В частности, в этом случае для γ_s имеем

$$\gamma_s = \frac{Q_s}{2} \left(\alpha_s + \frac{1}{2} \right), \quad Q_{s(p)} = \frac{2\pi}{n_0} \frac{2Y_0 \lambda}{\Lambda_{s(p)}^2}, \quad \alpha_{s(p)} = \frac{\theta_0 n_0}{\lambda} \Lambda_{s(p)}.$$

Интересуясь интенсивностью поля в плюс первом порядке дифракции основного сигнала и пренебрегая величинами порядка $(\kappa_s/2)^6$ по сравнению с $(\kappa_s/2)^2$, из (8) получим

$$I_s = \left(\frac{\kappa_s}{2} \right)^2 \frac{\sin \gamma_s}{\gamma_s} \left[\frac{\sin \gamma_s}{\gamma_s} - 2 \left(\frac{\kappa_s}{2} \right)^2 \left(\operatorname{Re} \Phi_s + \sum_{p=1}^N \frac{1}{R_p^3} \operatorname{Re} \Phi_{s,p} \right) \right], \quad (13)$$

где введено обозначение $\kappa_p/\kappa_s = 1/R_p$.

Рассмотрим в том же приближении с учетом третьего порядка взаимодействия ближайшие к плюс первому порядку дифракции s -го гармонического сигнала дифракционные порядки комбинационных частот. Очевидно, что эти порядки дифракции оказываются трех видов [4]:

порядки с амплитудой, пропорциональной $\epsilon_s \epsilon_p^2$, и частотой $2\Omega_p - \Omega_s$, обусловленные одним взаимодействием с основной s -й гармоникой и двойным взаимодействием с p -й гармоникой;

порядки с амплитудой, пропорциональной $\epsilon_s^2 \epsilon_p$, и частотой $2\Omega_s - \Omega_p$, обусловленные двойным взаимодействием с s -й гармоникой и одним с p -й;

порядки с амплитудой, пропорциональной $\epsilon_s \epsilon_p \epsilon_l$, и частотой $\Omega_s + \Omega_p - \Omega_l$, обусловленные последовательным однократным взаимодействием s -й, p -й и l -й гармониками.

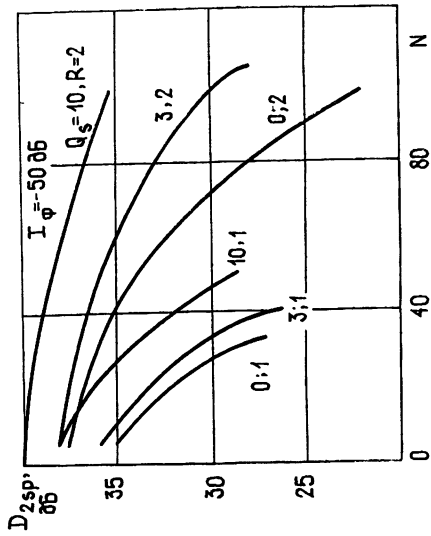
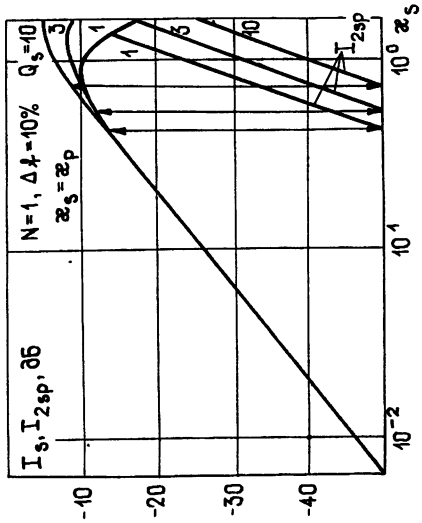
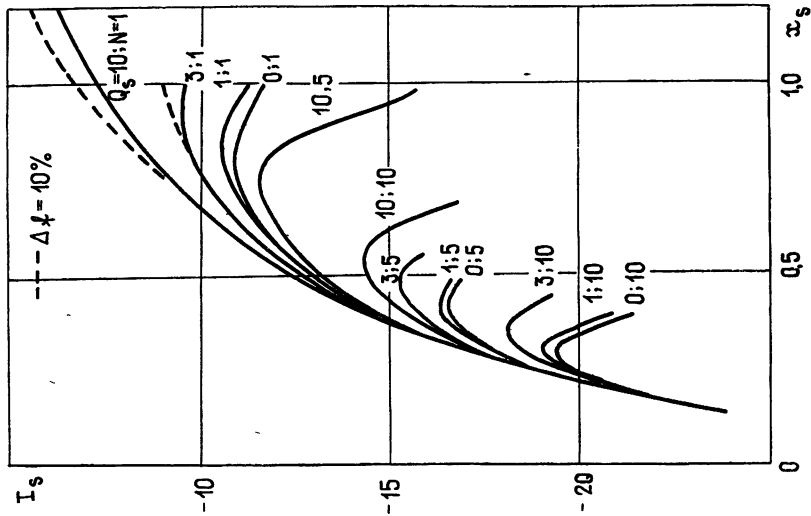
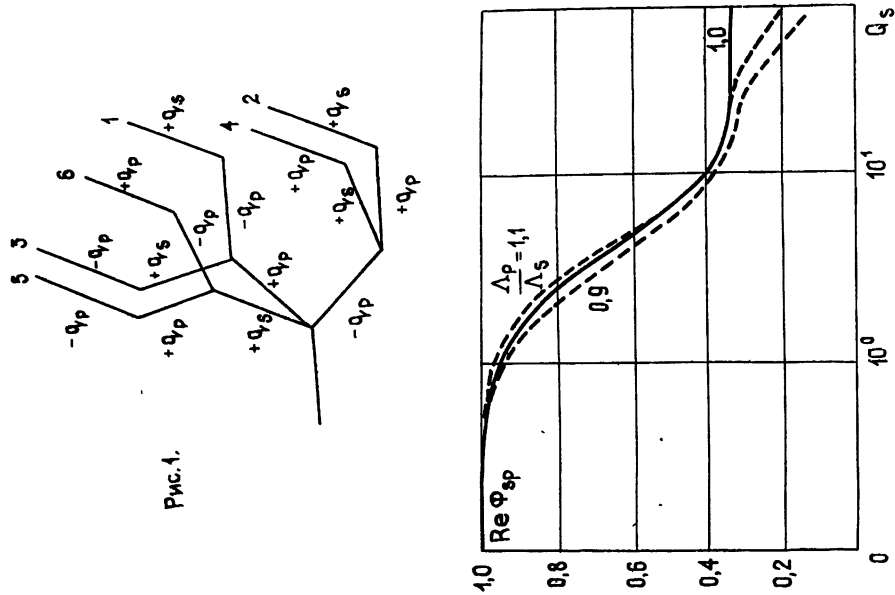
Вводя в рассмотрение аналогично предыдущему относительную комплексную амплитуду дифрагированного поля, найдем следующие выражения для относительных комплексных амплитуд комбинационных составляющих:

$$E_{+12sp} = (\kappa_s/2)^2 (\kappa_p/2) \Phi_{2sp}, \quad (14)$$

$$\Phi_{2sp} = \sum_{j=1}^3 \frac{1}{2^3} \int_{-1}^1 \int_{-1}^{y_2} \int_{-1}^{y_1} \exp \left(i \sum_{m=0}^2 \gamma_{mj}^{(2sp)} y_m \right) dy_0 dy_1 dy_2;$$

$$E_{+12ps} = (\kappa_s/2) (\kappa_p/2)^2 \Phi_{2ps}, \quad (15)$$

$$\Phi_{2ps} = \sum_{j=1}^3 \frac{1}{2^3} \int_{-1}^1 \int_{-1}^{y_2} \int_{-1}^{y_1} \exp \left(i \sum_{m=0}^2 \gamma_{mj}^{(2ps)} y_m \right) dy_0 dy_1 dy_2;$$



$$E_{+1spl} = (x_s x_p x_l / 8) \Phi_{spl}, \quad (16)$$

$$\Phi_{spl} = \sum_{j=1}^6 \frac{1}{2^3} \int_{-1}^1 \int_{-1}^{y_2} \int_{-1}^{y_1} \exp \left(i \sum_{m=0}^2 \gamma_{mj}^{(spl)} y_m \right) dy_0 dy_1 dy_2,$$

где $\gamma_{mj}^{(\ast)} = k_0 Y_0 (\cos \theta_{m+1,j}^{(\ast)} - \cos \theta_{m,j}^{(\ast)})$ и $\theta_{mj}^{(\ast)}$ определяются из условий

$$k_0 (\sin \theta_{m+1,j}^{(2sp)} - \sin \theta_{m,j}^{(2sp)}) = q_s, \quad k_0 (\sin \theta_{m+1,j}^{(2sp)} - \sin \theta_{m,j}^{(2sp)}) = -q_p, \quad (17)$$

$$\sin \theta_{3j}^{(2sp)} = \sin \theta_0 + 2\lambda (n_0 \Lambda_s)^{-1} - \lambda (n_0 \Lambda_p)^{-1}, \quad m \in [0, 2], \quad j \in [1, 6];$$

$$k_0 (\sin \theta_{m+1,j}^{(2ps)} - \sin \theta_{m,j}^{(2ps)}) = -q_s, \quad k_0 (\sin \theta_{m+1,j}^{(2ps)} - \sin \theta_{m,j}^{(2ps)}) = q_p, \quad (18)$$

$$\sin \theta_{3j}^{(2ps)} = \sin \theta_0 + 2\lambda (n_0 \Lambda_p)^{-1} - \lambda (n_0 \Lambda_s)^{-1}, \quad m \in [0, 2], \quad j \in [1, 6];$$

$$k_0 (\sin \theta_{m+1,j}^{(spl)} - \sin \theta_{m,j}^{(spl)}) = q_s, \quad k_0 (\sin \theta_{m+1,j}^{(spl)} - \sin \theta_{m,j}^{(spl)}) = q_p,$$

$$k_0 (\sin \theta_{m+1,j}^{(spl)} - \sin \theta_{m,j}^{(spl)}) = -q_l, \quad \sin \theta_{3j}^{(spl)} = \sin \theta_0 + \frac{\lambda}{n_0 \Lambda_s} + \frac{\lambda}{n_0 \Lambda_p} - \frac{\lambda}{n_0 \Lambda_l}, \quad (19)$$

$$p, l \in [1, N], \quad p \neq l.$$

Выражения (16) и (19) при соответствующей перестановке индексов позволяют найти остальные комбинационные порядки, обусловленные однократным последовательным взаимодействием света с тремя различными гармониками.

Таким образом, выражения (8), (14), (16) дают решение задачи дифракции света на ультразвуковом возмущении вида (1), определяя относительные комплексные амплитуды дифрагированных полей в области плюс первого дифракционного порядка s -й гармонической составляющей.

Анализ выражений для дифрагированного поля в области первого порядка дифракции основного сигнала. Положим, что частоты ультразвукового возмущения и геометрии задачи таковы, что величина $Q_s \ll 1$, т. е. имеет место режим дифракции Рамана — Ната. В этом случае, полагая $\gamma_s = \gamma_{ml} = \gamma_{mj}^{(\ast)} = 0$ и учитывая, что

$$\frac{1}{2^3} \int_{-1}^1 \int_{-1}^{y_2} \int_{-1}^{y_1} dy_0 dy_1 dy_2 = \frac{1}{3!},$$

получим $\Phi_s = 1/2$, $\Phi_{sp} = 1$, $\Phi_{2sp} = \Phi_{2ps} = 1/2$, $\Phi_{spl} = 1$. Тогда выражения для относительных амплитуд полей рассматриваемых дифракционных порядков примут вид

$$E_{+1s} = \frac{x_s}{2} \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{x_s}{2} \right)^2 - \sum_{p=1}^N \left(\frac{x_p}{2} \right)^2 \right]; \quad (20)$$

$$E_{+12sp} = \frac{1}{2} \left(\frac{x_s}{2} \right)^2 \frac{x_p}{2}, \quad E_{+12ps} = \frac{1}{2} \frac{x_s}{2} \left(\frac{x_p}{2} \right)^2, \quad (21)$$

$$E_{+1spl} = x_s x_p x_l / 8.$$

Учитывая, что при дифракции Рамана — Ната принятое приближение удовлетворительно до значения $x_s \leq 1,5$ [6], найдем, что погрешность вычислений по формуле (20) не превышает 5%, если

$$\kappa_s \leq 1,5 \left(1 + 2 \sum_{p=1}^N \frac{1}{R_p^2} \right)^{-1/8}, \quad (22)$$

где $R_p = \kappa_s / \kappa_p$.

Рассмотрим более общий случай, полагая, что по основному сигналу осуществлена настройка по углу Брэгга, т. е. $\alpha_s = -1/2$. В этом случае вычисление (13) дает

$$\Phi_s |_{\alpha_s = -1/2} = \frac{1}{6} + \frac{2}{Q_s^2} \left(1 - \frac{\sin Q_s}{Q_s} \right) + \frac{i}{Q_s} \left[1 - \left(\frac{\sin Q_s/2}{Q_s/2} \right)^2 \right]; \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \Phi_{sp} |_{\alpha_s = -1/2} = & \frac{4}{Q_s^2 z_p^2} \left\{ \frac{2(z_p^2 + 3)}{(z_p^2 - 1)^2} - \frac{\sin [Q_s z_p (z_p - 1)/2]}{Q_s z_p (z_p - 1)^{3/2}} (3 - z_p) - \right. \\ & \left. - \frac{\sin [Q_s z_p (z_p + 1)/2]}{Q_s z_p (z_p + 1)^{3/2}} (3 + z_p) \right\} + \frac{i}{Q_s z_p} \left\{ \frac{4z_p}{z_p^2 - 1} - \frac{3 - z_p}{z_p - 1} \times \right. \\ & \left. \times \left(\frac{\sin [Q_s z_p (z_p - 1)/4]}{Q_s z_p (z_p - 1)/4} \right)^2 - \frac{3 + z_p}{z_p + 1} \left(\frac{\sin [Q_s z_p (z_p + 1)/4]}{Q_s z_p (z_p + 1)/4} \right)^2 \right\}, \quad (24) \end{aligned}$$

где введено обозначение $z_p = \Lambda_s / \Lambda_p$. Нетрудно показать, что при $\Lambda_p \rightarrow \Lambda_s$ ($z_p \rightarrow 1$) $\Phi_{sp} = 2\Phi_s$.

На рис. 2 приведены зависимости $\text{Re } \Phi_{sp}$, рассчитанные по формуле (24), от величины параметра Q_s при расстройке по частоте, равной $\pm 10\%$. Как следует из рассмотрения приведенных кривых, величина $\text{Re } \Phi_{sp}$ слабо зависит от расстройки по частоте вплоть до $Q_s \leq 20$, и можно полагать, что в первом приближении $\text{Re } \Phi_{sp} = 2\text{Re } \Phi_s$. Тогда, раскладывая (13) в ряд Тейлора в окрестностях точки $z_p = 1$ ограничиваясь первыми членами, найдем

$$I_s = \left(\frac{\kappa_s}{2} \right)^2 \left[1 - 2\text{Re } \Phi_s \left(\frac{\kappa_s}{2} \right)^2 \left(1 + 2 \sum_{p=1}^N \frac{1}{R_p^2} \right) \right]. \quad (25)$$

Как легко видеть из (23), для $Q_s < 1$ ($\Phi_s \simeq 1/2$) и $Q_s \geq 10$ при подстройке по углу Брэгга по основному сигналу ($\alpha_s = -1/2$, $\Phi_s = 1/6$) выражение (25) совпадает с результатами работы [4] для малых сигналов. Однако в нашем случае (22) дает оценку применимости (25). При этом для $Q_s > 3$ в формуле (22) вместо коэффициента 1,5 следует взять коэффициент 2,8. На рис. 3 приведены результаты расчета I_s по формуле (25) при различных значениях параметра Q_s , числа сигналов N и $\kappa_p = \kappa_s$. Здесь же для сравнения приведены значения I_s , полученные при расчете по формуле (11) с учетом (23) и (24) для случая $N=1$ и расстройке по частоте 10%. Как видно, принятая аппроксимация является достаточно хорошей. При больших расстройках и достаточно больших Q_s необходимо учитывать следующие члены в разложении в ряд Тейлора.

Рассмотрим интенсивность полей сигналов комбинационных частот. В этом случае аналогично предыдущему из (14), (15) и (16) имеем с точностью до членов порядка $(z_p - 1)$ включительно

$$\begin{aligned} I_{2sp} = & (\kappa_s/2)^4 (\kappa_p/2)^2 \times \\ & \times \left[|\Phi_s|^2 + 2 \left(\text{Re } \Phi_s \frac{d \text{Re } \Phi_{2sp}}{dz_p} \Big|_{z_p=1} + \text{Im } \Phi_s \frac{d \text{Im } \Phi_{2sp}}{dz_p} \Big|_{z_p=1} \right) (z_p - 1) \right]; \quad (26) \end{aligned}$$

$$I_{2ps} = (\kappa_s/2)^2 (\kappa_p/2)^4 \times \quad (27)$$

$$\times \left[|\Phi_s|^2 + 2 \left(\operatorname{Re} \Phi_s \frac{d \operatorname{Re} \Phi_{2ps}}{dz_p} \Big|_{z_p=1} + \operatorname{Im} \Phi_s \frac{d \operatorname{Im} \Phi_{2ps}}{dz_p} \Big|_{z_p=1} \right) (z_p - 1) \right];$$

$$I_{spl} = 4 \frac{\kappa_s}{2} \frac{\kappa_p}{2} \frac{\kappa_l}{2} \left\{ |\Phi_s|^2 + \operatorname{Re} \Phi_s \left[\frac{\partial \operatorname{Re} \Phi_{spl}}{\partial z_p} \Big|_{z_p=1} (z_p - 1) + \right. \right.$$

$$\left. + \frac{\partial \operatorname{Re} \Phi_{spl}}{\partial z_l} \Big|_{z_l=1} (z_l - 1) \right] + \operatorname{Im} \Phi_s \left[\frac{\partial \operatorname{Im} \Phi_{spl}}{\partial z_p} \Big|_{z_p=1} (z_p - 1) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial \operatorname{Im} \Phi_{spl}}{\partial z_l} \Big|_{z_l=1} (z_l - 1) \right] \Big\}. \quad (28)$$

Полученные формулы позволят определить интенсивность полей комбинационных частот и найти возможный динамический диапазон акустооптических устройств. В качестве примера на рис. 4 приведены зависимости интенсивностей полей основного сигнала и сигнала частоты $2\Omega_s - \Omega_p$ от величины индекса модуляции для двух сигналов одинаковой амплитуды с расстройкой по частоте, равной 10%, рассчитанные по формулам (25) и (26) при различных значениях параметра дифракции Q_s . Задаваясь различными значениями фона, из рис. 4 можно определить возможный динамический диапазон при работе с двумя сигналами. Как видно из приведенных кривых, при уровне фона $I_\Phi = -50$ дБ и изменении Q_s от 1 до 10 динамический диапазон изменяется от 36,5 дБ до 41,5 дБ. Выражения (25)–(28) позволяют осуществить статистический подход к определению динамического диапазона. Положим, что амплитуды всех гармонических составляющих, за исключением основного сигнала, независимы и распределены по равномерному закону с плотностью вероятности $\psi(\kappa_p) = 1/\kappa_{\max}$. Полагая число сигналов достаточно большим, так что можно считать I_s распределенным по нормальному закону, найдем из (25), (26), что при пренебрежении расстройкой по частоте с вероятностью 95% верны следующие неравенства:

$$I_s \geq \left(\frac{\kappa_s}{2} \right)^2 \left[1 - 2 \operatorname{Re} \Phi_s \left(\frac{\kappa_s}{2} \right)^2 - \frac{4}{3} \operatorname{Re} \Phi_s \left(\frac{\kappa_{\max}}{2} \right)^2 N \left(1 \pm \frac{4}{\sqrt{5N}} \right) \right]; \quad (29)$$

$$I_{2sp} \leq 0,903 \left(\frac{\kappa_{\max}}{2} \right)^2 \left(\frac{\kappa_s}{2} \right)^4 |\Phi_s|^2, \quad I_{2ps} \leq 0,82 \left(\frac{\kappa_{\max}}{2} \right)^4 \left(\frac{\kappa_s}{2} \right)^2 |\Phi_s|^2,$$

$$I_{spl} \leq 1,96 (\kappa_{\max}/2)^4 (\kappa_s/2)^2 |\Phi_s|^2. \quad (30)$$

Полагая в (29) $\kappa_s = \kappa_{\min}$ и в (30) $\kappa_s = \kappa_{\max}$, потребуем, чтобы выполнялись неравенства

$$I_s \geq I_\Phi, \quad I_{2sp}, \quad I_{2ps}, \quad I_{spl} \leq I_\Phi. \quad (31)$$

Тогда, определив динамический диапазон по входу как отношение $D = (\kappa_{s \max} / \kappa_{s \min})^2$, при тех κ_s , при которых выполняются неравенства (31), получим:

$$D_{2sp} = 1,035 \left(\frac{R}{|\Phi_s| I_s} \right)^{2/3} \left[1 - 1,38 \operatorname{Re} \Phi_s \left(\frac{I_\Phi}{R^4 |\Phi_s|^2} \right)^{1/3} N \left(1 + \frac{1,79}{\sqrt{N}} \right) \right]; \quad (32)$$

$$D_{2ps} = 1,07 \left(\frac{R^2}{|\Phi_s| I_\Phi} \right)^{2/3} \left[1 - 1,43 \operatorname{Re} \Phi_s \left(\frac{I_\Phi}{R^2 |\Phi_s|^2} \right)^{1/3} N \left(1 + \frac{1,79}{\sqrt{N}} \right) \right]; \quad (33)$$

$$D_{spl} = 0,8 \left(\frac{R^2}{|\Phi_s| I_\Phi} \right)^{2/3} \left[1 - 0,87 \operatorname{Re} \Phi_s \left(\frac{I_\Phi}{R^2 |\Phi_s|^2} \right)^{1/3} N \left(1 + \frac{1,79}{\sqrt{N}} \right) \right]. \quad (34)$$

При этом, при выводе соотношений (32)—(34) мы пренебрегли величиной $2\operatorname{Re} \Phi_s (\kappa_{s \min}/2)^2$. Как следует из рассмотрения (32)—(34), при значениях $R > 1$ наименьший динамический диапазон по входу определяется выражением (32). На рис. 5 приведены результаты расчета величины D_{2sp} в зависимости от числа сигналов N , параметра R и значения параметра дифракции Q_s при уровне фона $I_\Phi = -50$ дБ.

Из приведенных данных видно, что динамический диапазон быстро уменьшается с ростом числа входных сигналов. В частности, при работе в промежуточном режиме ($Q_s = 3$) динамический диапазон по входу падает на 10 дБ при изменении N с 5 до 40 при $R = 1$ и изменении N с 5 до 105 при $R = 2$ ($R = \kappa_{s \max}/\kappa_{s \min}$).

Таким образом, изложенный в настоящей работе подход к много-частотной дифракции света на ультразвуке приводит к аналитическим выражениям для основного и комбинационных сигналов, пригодным для расчета в большом диапазоне изменений индекса модуляции и параметра дифракции Q_s при различных значениях отношения амплитуды основного сигнала к амплитуде других сигналов. Полученные данные позволяют определить динамический диапазон акустооптических устройств, работающих в различных режимах дифракции с различным количеством сигналов.

В заключение авторы выражают благодарность К. В. Ветрову за проведение ряда вычислений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кулаков С. В. Акустооптические устройства спектрального и корреляционного анализа сигналов. — Л.: Наука, 1978.
2. Престон К. Когерентные оптические вычислительные машины. — М.: Мир, 1974.
3. Василенко Г. И. Голографическое распознавание образов. — М.: Сов. радио, 1977.
4. Necht D. L. — IEEE, 1977, SU-24, № 1, p. 7.
5. Сташкевич А. А. — Опт. и спектр, 1978, 45, вып. 6, с. 967.
6. Петрунькин В. Ю., Водоватов И. А. — Изв. вузов — Радиофизика, 1983, 26, № 12, с. 1570.

Ленинградский политехнический институт

Поступила в редакцию
1 июня 1982 г.
в окончательном варианте
12 июля 1983 г.

MULTIFREQUENCY DIFFRACTION OF LIGHT BY ULTRASOUND

V. Yu. Petrun'kin, I. A. Vodovатов

The diffraction of light by ultrasound perturbation consisting of several sinusoidal signals is analyzed. The integral equation obtained by introducing equivalent currents is used to solve the problem. Analytical expressions give a possibility to calculate the intensity of diffraction for principal and combination frequencies in the diffraction order number + 1 for one of the sinusoidal signals. The dynamic range for acousto-optical modulators in the case of several sinusoidal is estimated.