Том XXVII, № 3 РАДИОФИЗИКА 1984

УДК 621 391 519 27

ОБ ОЦЕНКЕ СРЕДНЕЙ ЧАСТОТЫ КВАЗИМОНОХРОМАТИЧЕСКОГО СИГНАЛА НА ФОНЕ ШУМА

С. Н. Гурбатов, А. И. Саичев, Е. Г. Щемелев

Рассматривается точность определения частоты процесса, представляющего собой смесь полезного квазимонохроматического сигнала и стороннего широкополосного шума. Найдено выражение для дисперсии частоты при условии ее определения на длительности T, содержащей фиксированное число пересечений исследуемым процессом нулевого уровня Полученное выражение справедливо для широких классов функций корреляции исследуемого процесса и переходной характеристики приемной системы.

При акустическом зондировании доплеровским методом движущихся структур (например потоков жидкости или воздуха, в которых присутствуют дискретные рассеиватели, переносимые потоком [1–4]) возникает задача оценки скорости движения, связанной с доплеровским смещением частоты зондирующего сигнала. Для этого оценивается частота сигнала, представляющего собой случайную последовательность квазимонохроматических импульсов, отраженных от хаотически расположенных дискретных рассеивателей. Таким образом, сигнал является шумовым по своей природе. Поэтому ошибки в определении частоты принципиально неустранимы, и именно они определяют предельную чувствительность системы доплеровского зондирования. Кроме этих ошибок в определении частоты существуют и такие, которые обусловлены сторонними шумами. Поэтому в общем случае задача состоит в оценке средней частоты «смеси» полезного квазимонохроматического сигнала и стороннего шума.

В работе рассматривается случай определения частоты по длительности интервала $T(N)$, содержащего фиксированное число нулей N квазимонохроматического процесса $x(t)$. Частота определяется как

$$f = N/2T(N). \qquad (1)$$

Представим $T(N)$ в виде $T(N)=\langle T(N)\rangle+\delta T(N)$, где $\langle T(N)\rangle$ — среднее значение длительности фиксированного числа нулей, а $\delta T(N)$ — флуктуационная компонента этой длительности.

Будем рассматривать узкополосные процессы $x(t)$, тогда $\delta T(N)\ll\langle T(N)\rangle$, и, используя разложение Тейлора по степеням $\delta T(N)/\langle T(N)\rangle$, ограничиваясь двумя слагаемыми, получим

$$f(N) = N/2\langle T(N)\rangle - N\,\delta T(N)/2\langle T(N)\rangle^2. \qquad (2)$$

Отсюда найдем среднюю частоту и дисперсию частоты:

$$\langle f(N)\rangle = N/2\langle T(N)\rangle,$$
$$\sigma_f^2(N) = \langle f^2\rangle - \langle f\rangle^2 = \frac{N^2\sigma_T^2(N)}{2\langle T(N)\rangle^4}, \qquad (3)$$

где $\langle T(N)\rangle$ — средняя длительность процесса $x(t)$ при фиксированном числе его нулей N, а $\sigma_T^2(N)$ — дисперсия его длительности.

Представим процесс $T(N)$ в виде суммы:

$$T(N) = \sum_{k=1}^{N} \tau_k, \tag{4}$$

где τ_k — расстояние между нулями процесса $x(t)$. При достаточно больших N к статистике $T(N)$ применима центральная предельная теорема (для этого необходимо, чтобы выполнялось условие $T \gg \tau_0$, где τ_0 — время корреляции процесса $x(t)$). Будем считать, что процесс $x(t)$ стационарный и эргодический с известной корреляционной функцией $K_x(\tau) = \sigma^2 R(\tau)$, где $\sigma^2 = \langle x^2(t)\rangle$, а $R(\tau)$ — коэффициент корреляции. Тогда для среднего интервала между нулями процесса $x(t)$ следует выражение $\langle\tau\rangle = \pi/\sqrt{-R''(0)}$ [5], а среднее значение $T(N)$ равно

$$\langle T(N)\rangle = N\langle\tau\rangle. \tag{5}$$

Учтем, что $T(N)$ имеет гауссово распределение вероятности с известным средним (5) и неизвестной дисперсией $\sigma_T^2(N)$, которую можно представить в виде $\sigma_T^2(N) = DN$, где D — коэффициент диффузии. Тогда для плотности вероятности процесса $T(N)$ имеем

$$W(T/N) = \frac{1}{\sqrt{2\pi DN}} \exp\left[-\frac{(T - N\langle\tau\rangle)^2}{2DN}\right]. \tag{6}$$

Для полного определения статистики $T(N)$ необходимо найти значение D. В работе [5] найдены выражения для среднего значения и дисперсии $\sigma_N^2(T)$ числа нулей N процесса $x(t)$ при фиксированной его длительности T. Подробно этот вопрос разбирался в работе [6]. Вычисление плотности вероятности числа нулей N при фиксированной длительности T сводится к определению вероятности достижения суммой $\sum_{k=1}^{N} \tau_k$ фиксированного значения T. Известно [7], что при $T \gg \tau_0$ номера N распределены по закону Вальда:

$$W(N/T) = \frac{T}{\sqrt{2\pi DN^3}} \exp\left[-\frac{(T - N\langle\tau\rangle)^2}{2DN}\right]. \tag{7}$$

Из (7) для среднего и дисперсии процесса $N(T)$ получим

$$\langle N(T)\rangle = T/\langle\tau\rangle, \quad \sigma_N^2(T) = DT/\langle\tau\rangle^3, \tag{8}$$

следовательно, D равно

$$D = \frac{\sigma_N^2(T)\langle\tau\rangle^3}{T}. \tag{9}$$

Теперь мы можем связать дисперсии $\sigma_N^2(T)$ и $\sigma_T^2(N)$:

$$\sigma_T^2(N) = \langle\tau\rangle^2 \sigma_N^2(\langle T(N)\rangle). \tag{10}$$

Перейдем к более подробному обсуждению выражения (10) в случае узкополосного гауссова случайного процесса $x(t)$. Для него при заданном коэффициенте корреляции $R(\tau) = \rho(\tau)\cos\omega_0\tau$, $\sigma_N^2(T)$ имеет вид [5]

$$\sigma_N^2(T) = \frac{1}{4} - \frac{1}{\pi^2}\arcsin^2\rho(T) +$$

$$+\frac{2}{\pi^2}\int\limits_0^T \frac{(T-\tau)(\rho'(\tau))^2}{1-\rho^2(\tau)}\,d\tau - \frac{T\rho''(\tau)_{\tau=0}}{\pi\omega_0}. \tag{11}$$

Так как при $T>\tau_0$ $\rho(T)=0$, то второе слагаемое в (11) равно нулю, а в силу того, что $\sigma^2_N(T)>1$, в (11) можно пренебречь первым слагаемым. Сравнивая третье и четвертое слагаемые в (11), видим, что их отношение порядка $\tau_0\omega_0 \gg 1$, поэтому четвертым слагаемым можно пренебречь, и тогда

$$\sigma^2_N(T) = \frac{2T}{\pi^2}\int\limits_0^\infty \frac{(\rho'(\tau))^2}{1-\rho^2(\tau)}\,d\tau. \tag{12}$$

Из (12) видно, что значение $\sigma^2_N(T)$, а значит и $\sigma^2_T(N)$ зависят от вида $\rho(\tau)$. Поэтому рассмотрение различных видов $\rho(\tau)$ особенно важно для решения поставленной задачи. Прежде всего запишем выражение для $\sigma^2_f(N)$, учитывая (3) и (12):

$$\sigma^2_f(N) = \frac{1}{2\pi^2\langle T(N)\rangle}\int\limits_0^\infty \frac{(\rho'(\tau))^2}{1-\rho^2(\tau)}\,d\tau. \tag{13}$$

В работе [5] показано, что при быстро спадающей $\rho(\tau)$ $\left(\rho(\tau) = \exp\left[-\pi\left(\frac{\tau}{\tau_0}\right)^2\right]\right)$ и медленно спадающей $\rho(\tau)$ $(\rho(\tau)=(1+4|\tau|/\tau_0)\exp(-4|\tau|/\tau_0))$ интеграл в выражении (13) равен соответственно 1,306 π/τ_0 и 0,6545 π^2/τ_0. Оба эти значения приблизительно равны, поэтому для широкого класса $\rho(\tau)$ $\sigma^2_f(N)$ можно записать в виде

$$\sigma^2_f(N) = C/\tau_0\langle T(N)\rangle, \tag{14}$$

где $C \approx 0{,}2$.

Если случайный процесс представляет собой стационарный пуассоновский поток импульсов, то его корреляционная функция равна

$$K_x(\tau) = \bar{\nu}\,Э_\psi\,\rho_0(\tau)\cos\omega_0\tau, \tag{15}$$

где $\bar{\nu}$ — средняя частота прихода импульсов, $Э_\psi = (1/2)\int\psi^2(t)\,dt$, $\psi(t)$ — огибающая импульса, $\rho_0(\tau) = (1/2\,Э_\psi)\int\psi(t)\psi(t+\tau)\,dt$. Мы также будем считать, что $\bar{\nu}\tau_и \gg 1$, где $\tau_и$ — длительность импульса, и поэтому процесс $x(t)$ будет гауссовым в силу центральной предельной теоремы [8].

Часто импульсы считаются прямоугольными:

$$\psi(t) = \begin{cases} 1, & t \subset [0,\ \tau_и] \\ 0, & t \not\subset [0,\ \tau_и] \end{cases}.$$

Но тогда, как легко показать, $\sigma^2_f(N) \to \infty$ за счет недифференцируемых перескоков фазы на фронтах импульса. В действительности, приходящие импульсы сглаживаются в приемной аппаратуре с постоянной времени $\theta_0 \ll \tau_0$. С учетом этого коэффициент корреляции можно представить в виде

$$\rho_c(\tau) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \rho_0(\tau-\theta)\,\frac{M}{\theta_0}\,R\left(\frac{\theta}{\theta_0}\right)d\theta, \tag{16}$$

где $R(\theta)$ — коэффициент корреляции (переходная характеристика) приемной системы. В силу нормировки $M=1/(1-\mu\alpha)$, где $\mu=\theta_0/\tau_0$, $\alpha=\int |x|R(x)dx$. Рассматривая $\rho_c(\tau)$, заданное выражением (16), привлекая условие $\theta_0 \ll \tau_0$, из (13) получим

$$\sigma_f^2(N) = \frac{q \ln(\tau_0/\theta_0)}{2\pi^2 \langle T(N) \rangle \tau_0}, \tag{17}$$

где $q \simeq 1$. Такой вид $\sigma_f^2(N)$ справедлив для широкого класса функций $\rho_0(\tau)$ и $R(\theta)$.

В реальной ситуации на приемную антенну поступает не только шумоподобный сигнал, но и шумовой фон, мощность которого много меньше мощности сигнала. Однако шумовой фон, как правило, более широкополосен, что может привести к существенному увеличению дисперсии флуктуаций частоты. Коэффициент корреляции процесса, который является смесью шумоподобного сигнала и шумового фона, можно представить в виде

$$\rho(\tau) = m\rho_{\text{ш}}(\tau) + (1-m)\rho_c(\tau). \tag{18}$$

Здесь $\rho_c(\tau)$ и $\rho_{\text{ш}}(\tau)$ — коэффициенты корреляции шумоподобного сигнала и шума соответственно, $m=\sigma_{\text{ш}}^2/\sigma_c^2$ — отношение дисперсий шума и сигнала. В коэффициенте корреляции $\rho(\tau)$ выделены следующие характерные временные масштабы: время корреляции сигнала τ_0 порядка длительности импульса $\tau_{\text{и}}$ и время корреляции шума θ_0, которое определяется шириной полосы пропускания приемной системы Ω_0 ($\theta_0 \sim \sim 1/\Omega_0$). Как правило, ширина полосы пропускания много больше ширины спектра сигнала, следовательно, $\theta_0 \ll \tau_{\text{и}}$. Таким образом, $\rho(\tau)$ характеризуется двумя различными масштабами τ_0 и θ_0, связанными с шириной полосы пропускания приемной системы и длительностью зондирующего импульса. Так как полезный сигнал проходит через приемную систему, то может иметь место ситуация, когда форма $\rho_c(\tau)$ определяется как длительностью импульса, так и характером спадания его фронтов (фронт импульса более крутой, чем переходная характеристика приемной системы). Тогда $\rho_c(\tau)$ имеет два выделенных и сильно различных масштаба τ_0 и θ_0 ($\theta_0 \ll \tau_0$), т. е. $\rho_c(\tau)$ становится двухмасштабной функцией. Вид выражения (13) с учетом одномасштабности функций $\rho_c(\tau)$ и $\rho_{\text{ш}}(\tau)$, условий $m \ll 1$ и $\theta_0/\tau_0 \ll 1$ можно представить как

$$\sigma_f^2(N) = \frac{1}{2\pi^2 \langle T(N) \rangle}\left(a\frac{m}{\theta_0} + b\frac{1}{\tau_0}\right), \tag{19}$$

где

$$a = \frac{1}{2}\int\limits_0^\infty \frac{[r'_{\text{ш}}(x)]^2}{1-r_{\text{ш}}^2(x)}dx, \qquad \rho_{\text{ш}}(\tau) = r_{\text{ш}}\left(\frac{\tau}{\theta_0}\right),$$

$$b = \int\limits_0^\infty \frac{[r'_c(x)]^2}{1-r_c^2(x)}dx, \qquad \rho_c(\tau) = r_c\left(\frac{\tau}{\tau_0}\right).$$

Из выражения (19) следует, что при малых τ_0 $\sigma_f^2(N)$ спадает как $1/\tau_0$ и выходит на постоянный уровень при $\tau_0 \sim \theta_0/m$. При дальнейшем увеличении τ_0 фоновый шум полностью определяет дисперсию частотных измерений, которая уже не зависит от τ_0.

Если $\rho_c(\tau)$ двухмасштабная функция, то мы получим $\sigma_f^2(N)$ несколько в другой форме:

$$\sigma_f^2(N) = \frac{1}{2\pi^2 \langle T(N) \rangle} \left(a \frac{m}{\theta_0} + b_1 \frac{1}{\tau_0} \right), \tag{20}$$

где

$$b_1 = \int\limits_{\theta_0/\tau_0}^{\infty} \frac{[r_c'(x)]^2}{1 - r_c^2(x)} dx,$$

а коэффициент a имеет прежний смысл. Отметим, что конкретные выражения для коэффициентов a и b описываются формулами (14), (17), так как интегральный вид a и b полностью совпадает с (12), из которого в конечном счете получены формулы (14), (17).

Авторы благодарны А. Н. Малахову за полезные замечания и внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Селивановский Д. И., Шерешевский И. А. — Изв. вузов — Радиофизика, 1982, 25, № 10, с. 1158.
2. Васильева Н. А. и др. Тезисы I Всесоюзной конференции Метрология гидрофизических измерений. — М.: НИИФТРИ, 1980, с. 58.
3. Pinkel R. — J. Phys. Oceanogr., 1979, 9, № 4, p. 675.
4. Melling H, List R.— J. Appl. Meteorol., 1978, 17, № 9, p. 1274.
5. Тихонов В. И Выбросы случайных процессов. — М: Наука, 1970.
6. Хименко В. И. — Изв. вузов — Радиофизика, 1982, 25, № 3, с. 313.
7. Крапивин В Ф. Таблицы распределений Вальда. — М: Наука, 1965.
8. Рытов С. М. Введение в статистическую радиофизику. Ч. I. — М.: Наука, 1976.

Горьковский государственный университет

Поступила в редакцию 23 марта 1983 г

ESTIMATION OF THE FREQUENCY AVERAGE OF THE QUASIMONOCHROMATIC SIGNAL AGAINST TO BACKGRAUND NOISE

Gurbatov S. N., Saichev A. I., Shchemelev E. G.

The precision of the process frequency determination is examined. It is suppot that process is the sum of the quasimonochromatic signal and a wideband noise. The expresion for the average square of the process is found under the condition of frequency determination on the duration T. The duration includes a fixed namber of zero level crossings by the investigated process. The expression for the average square of the process is correct for wide classes of the signal correlation functions and passing characteristics of the receiving system.