ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XXVII, № 3 РАДИОФИЗИКА 1984

УДК 621 391 519 27

СТАТИСТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ВЫБРОСОВ ГАУССОВА ПРОЦЕССА

В. И. Хименко

Рассмотрена задача нахождения дисперсий при оценивании наиболее распространенных характеристик выбросов непрерывного дифференцируемого гауссова процесса. Для случая больших выборок получены простые аналитические результаты, которые в явном виде показывают характер функциональной зависимости дисперсий оценок от длительности рассматриваемой траектории, выбранного уровня анализа и спектрально-корреляционных свойств процесса.

1. В настоящее время многие радиофизические задачи приводят к необходимости исследования выборочных функций (траекторий) непрерывных случайных процессов. Для описания локальных свойств траекторий при этом, как правило, используются разнообразные характеристики типа «пересечений уровней» или характеристики выбросов случайных процессов [1–3]. В принципе, в настоящее время известны математически строгие методы нахождения основных статистических характеристик выбросов (см., например, [1,2] и библиографию в [3,4]). Однако даже во многих сравнительно простых частных случаях гауссова процесса такие методы приводят к весьма сложным и громоздким решениям, что, в свою очередь, затрудняет не только практическое использование, но и общее аналитическое исследование получающихся результатов. Явные аналитические выражения известны в основном лишь для математических ожиданий некоторых функционалов. Вместе с тем, этих результатов недостаточно даже для решения наиболее распространенных статистических задач исследования точности оценивания отдельных параметров траектории случайного процесса.

Избранный в данной работе подход отличается от методов [1–4] и дает возможность получить простые формулы для дисперсий при оценивании отдельных характеристик выбросов по траектории процесса фиксированной длительности. Достигается это за счет более полного использования свойств гауссовости исследуемого процесса и наложения двух дополнительных ограничений: 1) использование асимптотических методов (рассматривается случай больших длительностей $T \gg \tau_0$, где τ_0 — интервал корреляции процесса) и 2) получение приближенных (с точностью до членов порядка T^{-1}) аналитических выражений.

2. Рассмотрим непрерывный стационарный гауссов процесс $\xi(t) \equiv \{\xi(t),\ t \in T\}$ с математическим ожиданием $m_\xi \equiv M\{\xi(t)\}$ и корреляционной функцией

$$R_\xi(\tau) \equiv M\{[\xi(t) - m_\xi][\xi(t+\tau) - m_\xi]\} = \sigma_\xi^2 r(\tau), \qquad (1)$$

для которой выполняются условия

$$R_\xi(0) = \sigma_\xi^2 < \infty, \quad (-1)^i \frac{d^{2i}}{d\tau^{2i}} R_\xi(\tau)\bigg|_{\tau=0} \equiv (-1)^i R_\xi^{(2i)}(0) < \infty \quad (i = 1, 2),$$

где $r(\tau)$ — некоторая монотонно убывающая функция τ.

Как известно, значением m_ξ и функцией $R_\xi(\tau)$ гауссов процесс $\xi(t)$ задается полностью. Из этого, в частности, следует, что любые характеристики (в том числе и характеристики выбросов) процесса $\xi(t)$ принципиально могут быть выражены в терминах m_ξ и $R_\xi(\tau)$, т. е. представлены в виде некоторых функций от m_ξ и $R_\xi(\tau)$. Для математических ожиданий отдельных числовых характеристик выбросов подобные выражения достаточно просто находятся на основе уже известных результатов (например, [1,2]). Запишем несколько таких характеристик в удобном для последующего рассмотрения виде.

1) Среднее значение относительной длительности пребывания процесса $\xi(t)$ над заданным уровнем c:

$$T_\xi^+(c) = M\left\{T^{-1}\int_0^T x(t, c)\,dt\right\} = P\{\xi(t) \geqslant c\} = 1 - \Phi[(c - m_\xi)/\sigma_\xi], \quad (2)$$

где

$$x(t, c) = \begin{cases} 1, & \xi(t) \geqslant c \\ 0, & \xi(t) < c \end{cases}, \qquad \Phi(z) = (2\pi)^{-1/2}\int_{-\infty}^{z} \exp(-y^2/2)\,dy.$$

2) Среднее число пересечений заданного уровня c процессом $\xi(t)$ на интервале времени $[t_0, t_0+T]$:

$$N_\xi(c, T) = (T/\pi)\,[-r''(0)]^{1/2}\exp[-(c - m_\xi)^2/2\sigma_\xi^2]. \quad (3)$$

3) Средняя длительность положительных выбросов процесса $\xi(t)$ над заданным уровнем c:

$$\bar{\tau}_\xi^+(c) = \frac{2T_\xi^+(c)}{N_\xi(c, 1)} = 2\pi\,[-r''(0)]^{-1/2}\left[1 - \Phi\left(\frac{c - m_\xi}{\sigma_\xi}\right)\right]\exp\left[\frac{(c - m_\xi)^2}{2\sigma_\xi^2}\right]. \quad (4)$$

4) Среднее число экстремальных значений процесса $\xi(t)$ на интервале времени $[t_0, t_0+T]$:

$$N_{\text{ext}}(\xi, T) = (T/\pi)\,[r^{(4)}(0)/-r''(0)]^{1/2}. \quad (5)$$

Из приведенных формул (2)—(5) видно, что для гауссова процесса $\xi(t)$ при известных математическом ожидании m_ξ и корреляционной функции $R_\xi(\tau)$ полностью определены и числовые характеристики $T_\xi^+(c)$, $N_\xi(c, T)$, $\bar{\tau}_\xi^+(c)$, $N_{\text{ext}}(\xi, T)$. При фиксированных значениях уровня c и длительности интервала $[t_0, t_0+T]$ эти характеристики (2)—(5) для случайного процесса $\xi(t)$ являются постоянными (неслучайными) величинами.

3. Перейдем теперь к рассмотрению дисперсий при оценивании отдельных характеристик выбросов. Будем при этом считать, что наблюдению доступна выборочная функция $\xi(t)$, $t \in [t_0, t_0+T] = [0, T]$ непрерывного стационарного гауссова процесса $\xi(t) = \{\xi(t), t \in T\}$.

В выборочной функции конечной длительности $T < \infty$, как известно, содержится конечное, вполне определенное количество информации о параметрах m_ξ и $R_\xi(\tau)$ процесса $\xi(t)$, а следовательно, и о любой функции от этих параметров. Количеством этой информации будут, в частности, определяться нижние границы дисперсий при оценивании m_ξ, σ_ξ^2, $-r''(0)$ и $r^{(4)}(0)$, а также минимальные дисперсии при оценивании числовых характеристик $T_\xi^+(c)$, $N_\xi(c, 1)$, $\bar{\tau}_\xi^+(c)$ и $N_{\text{ext}}(\xi, 1)$ процесса $\xi(t)$.

Иначе говоря, если по траектории $\xi(t)$, $t \in [0, T]$ фиксированной длительности $T < \infty$ оценивается некоторая функция $\varphi(\alpha)$ от параметра

α и если $I_T(\alpha)$ — количество информации о параметре α, содержащейся в выборке $\xi(t)$, то в соответствии с неравенством Рао—Крамера (например, [5,6]) при $\partial\varphi(\alpha)/\partial\alpha\neq 0$ независимо от выбранного способа оценивания для дисперсии $D[\hat{\varphi}(\alpha)]$ оценки $\hat{\varphi}(\alpha)$ справедливо

$$D[\hat{\varphi}(\alpha)] \geqslant [\partial\varphi(\alpha)/\partial\alpha]^2 I_T^{-1}(\alpha) = D[\varphi(\alpha)_T], \tag{6}$$

где $D[\varphi(\alpha)_T]$ — нижняя граница дисперсий. Если выбранная оценка $\hat{\varphi}(\alpha)$ является эффективной, то в выражении (6) будет достигаться равенство $D[\hat{\varphi}(\alpha)] = D[\varphi(\alpha)_T]$.

В более общем случае при оценивании функции $\varphi(\alpha)\equiv\varphi(\alpha_1,\ldots,\alpha_k)$ от нескольких параметров α_i $(i=\overline{1,k})$ аналогом выражения (6) с точностью до членов $\sim T^{-1}$ является приближенная формула [6] (с. 32)

$$D[\hat{\varphi}(\alpha)] \geqslant \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} \frac{\partial\varphi(\alpha)}{\partial\alpha_i}\frac{\partial\varphi(\alpha)}{\partial\alpha_j} I_{ij}^{-1}(\alpha) = D[\varphi(\alpha)_T], \tag{7}$$

в которой $I_{ij}^{-1}(\alpha)$ — элементы матрицы, обратной к информационной матрице Фишера $\{I_{ij}(\alpha)\}$ (см., например, [6], гл. 17, 18).

Результаты (6), (7) позволяют в данном случае связать минимальные дисперсии при оценивании числовых характеристик (2)—(5) с нижними границами дисперсий при оценивании параметров m_ξ, σ_ξ^2, $-r''(0)$ и $r^{(4)}(0)$.

4. Воспользуемся свойствами (6), (7) для нахождения минимальной дисперсии $D[T^+(c)_T]$ при оценивании среднего значения относительной длительности пребывания $T_\xi^+(c)\equiv T^+(c)$. Будем при этом считать, что исследуемый процесс $\xi(t)$ обладает свойствами

$$\lim_{T\to\infty} T^{-1}\int_0^T R_\xi(\tau)\,d\tau = 0, \qquad \lim_{T\to\infty} T^{-1}\int_0^T R_\xi^2(\tau)\,d\tau = 0,$$

т. е. удовлетворяет соответствующим условиям эргодичности. Тогда по выборочной функции $\xi(t)$, $t\in[0,T]$ процесса $\xi(t)$ на основе известных эргодических теорем путем усреднения по времени могут быть получены оценки $\hat{m}$ и $\hat{\sigma}^2$ параметров m_ξ и $\sigma_\xi^2\equiv R_\xi(0)$, которые обладают свойствами несмещенности, состоятельности и асимптотической (при $T\to\infty$) эффективности. Для дисперсий таких оценок применительно к гауссову процессу $\xi(t)$ справедливы выражения [7,8]

$$\begin{gathered} D[\hat{m}] = 2T^{-2}\int_0^T (T-\tau)R_\xi(\tau)\,d\tau, \\ D[\hat{\sigma}^2] = 4T^{-2}\int_0^T (T-\tau)R_\xi^2(\tau)\,d\tau, \end{gathered} \tag{8}$$

которые при $T\gg\tau_0$, где

$$\tau_0 = \sigma_\xi^{-2}\int_0^\infty |R_\xi(\tau)|\,d\tau, \tag{9}$$

позволяют получить простые приближенные формулы

$$D[\hat{m}] = 2\sigma_\xi^2 T^{-1}\int_0^T r(\tau)\,d\tau \sim 2\sigma_\xi^2 T^{-1}\tau_0 = D[m_T]; \tag{10}$$

$$D[\hat{\sigma^2}] = 4\sigma_\xi^4 T^{-1}\int_0^T r^2(\tau)\,d\tau \sim 4\sigma_\xi^4 T^{-1}\tau_0 = D[\sigma_T^2]. \qquad (11)$$

Значения $D[m_T]$ и $D[\sigma_T^2]$ характеризуют здесь нижние границы дисперсий при оценивании параметров m_ξ и σ_ξ^2.

Теперь в соответствии с формулой (2) представим параметр $T^+(c)$ в виде функции

$$T^+(c)_T = 1 - \Phi[(c - m_T)/\sigma_T] \qquad (12)$$

от случайных величин m_T и σ_T, математические ожидания которых равны $M\{m_T\} = m_\xi$ и $M\{\sigma_T\} = \sigma_\xi$, а дисперсии $D[m_T]$ и $D[\sigma_T]$ определяются из формул (10), (11), т. е. совпадают с нижними границами дисперсий. Учитывая, что функция (12) удовлетворяет условиям непрерывности и дифференцируемости в окрестности точки $m_T = m_\xi$, $\sigma_T = \sigma_\xi$, можно при достаточно больших $T \gg \tau_0$ на основе общих свойств (6), (7) выразить дисперсию $D[T^+(c)_T]$ случайной величины $T^+(c)_T$ через статистические характеристики случайных величин m_T и σ_T. Так, учитывая $M\{(m_T - m_\xi)(\sigma_T - \sigma_\xi)\} = 0$, после простого вывода для $D[T^+(c)_T]$ с точностью до членов порядка T^{-1} получим приближенную формулу

$$D[T^+(c)_T] = D[T^+(h)_T] \geqslant \frac{\tau_0}{\pi T}\left(1 + \frac{h^2}{2}\right)e^{-h^2}, \qquad (13)$$

в которой $h \equiv \sigma_\xi^{-1}(c - m_\xi)$ — относительный уровень.

Эта формула характеризует нижнюю границу дисперсий $D[T^+(h)_T]$ при оценивании параметра $T_\xi^+(h)$ по траектории $\xi(t)$, $t \in [0, T]$ фиксированной длительности $T \gg \tau_0$. При ее выводе, по существу, использовались лишь свойства раздельных (а не совместных) оценок для m_ξ и σ_ξ^2, что оправдывается известной [5, 6] для гауссова процесса $\xi(t)$ статистической независимостью случайных величин m_T и σ_T^2.

Необходимо, конечно, заметить, что при оценивании параметра $T_\xi^+(c)$, как это следует из формулы (2), наиболее привычной является оценка

$$\hat{T}^+(c) = T^{-1}\int_0^T x(t, c)\,dt. \qquad (14)$$

Дисперсия $D[\hat{T}^+(c)]$ такой оценки исследовалась во многих работах, и применительно к случаю гауссова процесса $\xi(t)$ известно ее точное выражение в виде ряда (см. [1], с. 222)

$$D[\hat{T}^+(h)] = 2\sum_{l=1}^{\infty} \frac{[\Phi^{(l)}(h)]^2}{l!\,\sigma_\xi^{2l}} T^{-2}\int_0^T (T - \tau)\,r^l(\tau)\,d\tau. \qquad (15)$$

Практическое использование подобных выражений не всегда удобно. Вместе с тем, если ограничиться выводом приближенных формул, то для той же оценки (14) общее выражение дисперсии

$$D[\hat{T}^+(h)] = T^{-2}\int_0^T\int_0^T R_x(t_2 - t_1)\,dt_1 dt_2 = 2T^{-2}\int_0^T (T - \tau)\,R_x(\tau)\,d\tau,$$

где $R_x(\tau) = \sigma_x^2 r_x(\tau)$ — корреляционная функция процесса $x(t) \equiv x(t, h)$, при условии $\int_0^\infty r_x(\tau)\,d\tau \sim \tau_0$ для $T \gg \tau_0$ по аналогии с формулой (10) примет вид

$$D[\hat{T}^{+}(h)] = 2\sigma_x^2 T^{-1}\int\limits_0^T r_x(\tau)\,d\tau \sim 2T^{-1}\tau_0\sigma_x^2 . \qquad (16)$$

Структура процесса $x(t, h)$ позволяет достаточно просто найти его дисперсию

$$\sigma_x^2 = M\{x^2(t, h)\} - M\{x(t, h)\}^2 =$$
$$= 1\cdot P\{\xi(t) \geqslant h\} + 0\cdot P\{\xi(t) < h\} - (P\{\xi(t) \geqslant h\})^2 =$$
$$= \Phi(h)[1 - \Phi(h)]$$

и на основе (16) окончательно записать

$$D[\hat{T}^{+}(h)] \sim 2T^{-1}\tau_0\Phi(h)[1 - \Phi(h)]. \qquad (17)$$

Характер изменения значений $\frac{T}{2\tau_0}D[T^{+}(h)_T]$ и $\frac{T}{2\tau_0}D[\hat{T}^{+}(h)]$ в зависимости от уровня h показан на рис. 1. Для гауссова процесса $\xi(t)$, как и следовало ожидать, оценка (14) приводит к дисперсии $D[\hat{T}^{+}(h)] > D[T^{+}(h)_T]$.

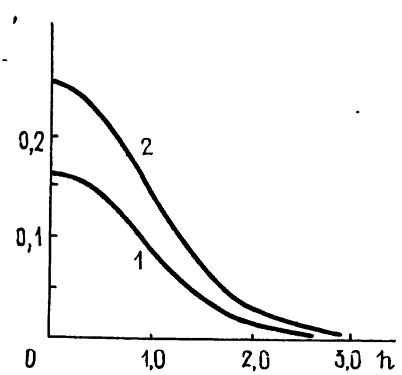

Рис. 1.

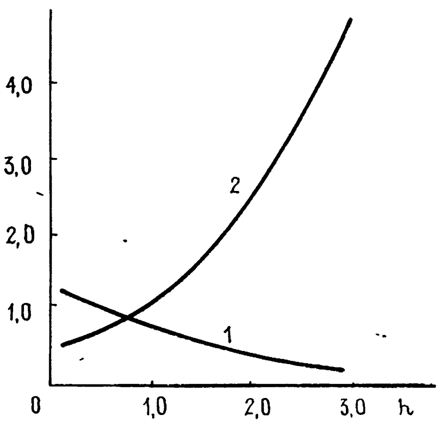

Рис. 2.

Рис. 1. *1* — $(T/2\tau_0)\,D\,[T^{+}(h)_T]$; *2* — $(T/2\tau_0)\,D\,[\hat{T}^{+}(h)]$.
Рис. 2. *1* — $\alpha(h)$; *2* — $\sqrt{\beta(h)}/\alpha(h)$.

5. Общие свойства оценок (6), (7) и приближенный метод, использованный при выводе формулы (13), дают возможность определить нижнюю границу дисперсий $D[N(h, 1)_T]$ при оценивании среднего числа пересечений (3) по траектории $\xi(t)$ $(t \in [0, T])$ фиксированной длительности $T \gg \tau_0$. Особенности такого подхода были подробно рассмотрены в работе [9], где, в частности, для гауссова процесса $\xi(t)$ с корреляционной функцией (1) получено выражение

$$D[N(h, 1)_T] > \frac{2\tau_0[-r''(0)]}{T\pi^2}(1 + h^2)^2 e^{-h^2}. \qquad (18)$$

Результаты (13) и (18) позволяют непосредственно перейти к нахождению минимальной дисперсии $D[\bar{\tau}^{+}(h)_T]$ при оценивании средней длительности положительных выбросов $\bar{\tau}_\xi^{+}(h) \equiv \bar{\tau}^{+}(h)$. Если предположить, что наблюдению доступна траектория $\xi(t)$, $t\in[0,T]$, $T\gg\tau_0$ гауссова процесса $\xi(t)$, то в соответствии с определением $\bar{\tau}_\xi^+(h) = T_\xi^+(h)/(1/2)N_\xi(h,1)$ задача нахождения дисперсии $D[\bar{\tau}^+(h)_T]$ формально сводится к задаче нахождения дисперсии $D[x_T/y_T]$ отношения двух независимых случайных величин x_T и y_T, для которых известны математические ожидания $m_x=M\{x_T\}=T^+(h)$, $m_y=M\{y_T\}=(1/2)N(h,1)>0$ и нижние границы дисперсий $D[x_T]=D[T^+(h)_T]$, $D[y_T]=(1/4)D[N(h,1)_T]$.

Пользуясь результатами (2), (3), (13) и (18) для случая $T\gg\tau_0$, на основе простой формулы

$$D[x_T/y_T]=\left(\frac{m_x}{m_y}\right)^2\left(\frac{D[x_T]}{m_x^2}+\frac{D[y_T]}{m_y^2}\right) \tag{19}$$

с точностью до членов порядка T^{-1} получим

$$D[\bar{\tau}^+(h)_T]\geqslant\frac{2\tau_0}{T}\frac{(2\pi)^2}{-r''(0)}\beta(h),$$
$$\beta(h)=\left\{\frac{1}{2\pi}\left(1+\frac{h^2}{2}\right)+[1-\Phi(h)]^2(1+h^2)^2e^{h^2}\right\}. \tag{20}$$

Выражение (20) показывает, что нижняя граница дисперсий $D[\bar{\tau}^+(h)_T]$ при оценивании средней длительности выбросов $\bar{\tau}_\xi^+(c)$ полностью определяется объемом выборки $T/2\tau_0$, параметром $-r''(0)$ корреляционной функции $R_\xi(\tau)$ процесса $\xi(t)$ и относительным уровнем анализа $h=\sigma_\xi^{-1}(c-m_\xi)$. На рис. 2 приведены функции $\alpha(h)=[1-\Phi(h)]/\Phi'(h)$ и $\sqrt{\beta(h)}/\alpha(h)$, которые, как это следует из формулы (20) и

$$\bar{\tau}^+(h)=2\pi[-r''(0)]^{-1/2}[1-\Phi(h)]\exp(h^2/2)=[2\pi/-r''(0)]^{1/2}\alpha(h),$$

описывают общий характер изменений средней длительности положительных выбросов $\bar{\tau}^+(h)$ и относительной величины среднего квадратического отклонения $D^{1/2}[\bar{\tau}^+(h)_T]/\bar{\tau}^+(h)$ в зависимости от уровня h.

Полезно заметить здесь, что для длительности выбросов (как и для длительностей интервалов между отдельными пересечениями), в принципе, могут использоваться различные определения [1] (с. 227). Полученная формула (20) справедлива при использовании определения (4).

6. Остановимся теперь кратко на задаче нахождения минимальной дисперсии $D[N_{\text{ext}}(\xi,1)_T]$ при оценивании среднего числа экстремальных значений $N_{\text{ext}}(\xi,1)$ по траектории $\xi(t)$, $t\in[0,T]$, $T\gg\tau_0$. В соответствии с формулой (5) для решения этой задачи необходимо предварительно найти наименьшие дисперсии $D[-r''(0)_T]$ и $D[r^{(4)}(0)_T]$ при оценивании значений $-r''(0)$ и $r^{(4)}(0)$ корреляционной функции $R_\xi(\tau)$ процесса $\xi(t)$. Поскольку функции

$$-r''(\tau)=-\frac{d^2r(\tau)}{d\tau^2}=\sigma_\xi^{-2}M\{\dot\xi(t)\dot\xi(t+\tau)\}=r_{\dot\xi}(\tau),$$

$$r^{(4)}(\tau)=\frac{d^4r(\tau)}{d\tau^4}=\sigma_\xi^{-2}M\{\ddot\xi(t)\ddot\xi(t+\tau)\}=r_{\ddot\xi}(\tau)$$

являются нормированными по σ_ξ^2 корреляционными функциями стационарных гауссовых процессов $\dot\xi(t)\equiv d\xi(t)/dt$ и $\ddot\xi(t)\equiv d^2\xi(t)/dt^2$, то для дисперсий $D[-\hat{r}''(0)]$ и $D[\hat{r}^{(4)}(0)]$ асимптотически эффективных оценок $-\hat{r}''(0)$ и $\hat{r}^{(4)}(0)$ параметров $-r''(0)\equiv -r''(\tau=0)$ и $r^{(4)}(0)\equiv \equiv r^{(4)}(\tau=0)$ по аналогии с выражением (11) получим

$$D[-\hat{r}''(0)] = 4T^{-2}[-r''(0)]^2\int_0^T (T-\tau)\, r^2_{\dot{\xi}}(\tau)\, d\tau,$$

$$D[\hat{r}^{(4)}(0)] = 4T^{-2}[r^{(4)}(0)]^2\int_0^T (T-\tau)\, r^2_{\ddot{\xi}}(\tau)\, d\tau.$$

Полагая здесь $\int_0^\infty r^2_{\dot{\xi}}(\tau)\,d\tau \sim \tau_0$ и $\int_0^\infty r^2_{\ddot{\xi}}(\tau)\,d\tau \sim \tau_0$, для случая $T\gg\tau_0$ запишем приближенные выражения

$$D[-\hat{r}''(0)] = 4T^{-1}[-r''(0)]^2\int_0^T r^2_{\dot{\xi}}(\tau)\,d\tau \sim 4T^{-1}[-r''(0)]^2\tau_0 =$$

$$= D[-r''(0)_T],$$

$$D[\hat{r}^{(4)}(0)] = 4T^{-1}[r^{(4)}(0)]^2\int_0^T r^2_{\ddot{\xi}}(\tau)\,d\tau \sim 4T^{-1}[r^{(4)}(0)]^2\tau_0 = D[r^{(4)}(0)_T].$$

Если теперь учесть, что процессы $\dot{\xi}(t)$ и $\ddot{\xi}(t)$ обладают свойством статистической независимости, то, воспользовавшись формулой (19), при $M\{x_T\} = [r^{(4)}(0)]^{1/2}$, $M\{y_T\} = \pi[-r''(0)]^{1/2}$, $D[x_T] = D[r^{(4)}(0)_T]/4r^{(4)}(0)$, $D[y_T] = \pi^2 D[-r''(0)_T]/-4r''(0)$, окончательно найдем

$$D[N_{ext}(\xi,1)_T] \geqslant 2\tau_0 r^{(4)}(0)/-T\pi^2 r''(0). \qquad (21)$$

Этот результат с точностью до членов порядка T^{-1} характеризует минимальную дисперсию при оценивании среднего числа экстремальных значений $N_{ext}(\xi,1)$ по выборочной функции $\xi(t)$, $t\in[0,T]$, $T\gg\tau_0$ гауссова процесса $\xi(t)$.

Целесообразно отметить, что к такому же результату (21) можно подойти и на основе формулы (18). Действительно, если воспользоваться равенством $N_{ext}(\xi,1)=N_{\dot{\xi}}(0,1)$ и учесть, что для производной $\dot{\xi}(t)$ случайного процесса $\xi(t)$ выполняется свойство $r_{\dot{\xi}}(\tau)=-r''(\tau)$, то на основании (18) при уровне $h=0$ и допущении $\int_0^\infty r_{\dot{\xi}}(\tau)\,d\tau\sim\tau_0$ получим

$$D[N_{\dot{\xi}}(0,1)_T] \geqslant 2\tau_0 r^{(4)}(0)/-T\pi^2 r''(0),$$

т. е., как и следовало ожидать, $D[N_{\dot{\xi}}(0,1)_T] = D[N_{ext}(\xi,1)_T]$.

7. Рассмотренный в данной работе асимптотический подход является достаточно эффективным при исследованиях статистических характеристик выбросов. Полученные аналитические результаты (13), (18), (20) и (21) определяют нижние границы дисперсий и позволяют находить потенциальные характеристики точности при оценивании наиболее распространенных числовых параметров (2)—(5) траектории гауссова процесса. Во всех полученных формулах, если это будет более удобно, можно с учетом определений (9) и

$$\Delta\omega_э = 2\pi\Delta f_э = \int_{-\infty}^{\infty} S_\xi(\omega)\, d\omega / S_\xi(0)$$

перейти к безразмерному параметру времени $\theta = T\Delta f_э = T/2\tau_0$, а значение $-r''(0)$ для процессов $\xi(t)$ с корреляционной функцией (1) представить в виде $-r''(0) = \varkappa^2\Delta\omega_э^2 = \varkappa^2(2\pi\Delta f_э)^2$, где $\Delta f_э$ и $\varkappa$ — соответственно эффективная ширина и коэффициент формы спектральной плотности $S_\xi(\omega)$ исследуемого процесса $\xi(t)$.

ЛИТЕРАТУРА

1 Крамер Г., Лидбеттер М. Стационарные случайные процессы. — М: Мир, 1969.

2. Тихонов В. И. Выбросы случайных процессов. — М.: Наука, 1970.

3. Хименко В. И. — Зарубежная радиоэлектроника, 1981, № 6, с. 3.

4 Питербарг В. И. — Теория вероятностей. Математическая статистика Теоретическая кибернетика. Т. 19 (Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР). — М.: ВИНИТИ, 1982.

5. Крамер Г. Математические методы статистики. — М.: Мир, 1975.

6. Кендалл М., Стьюарт А. Статистические выводы и связи. — М.: Наука, 1973.

7. Яглом А. М. Корреляционная теория стационарных случайных функций. — Л.: Гидрометеоиздат, 1981.

8 Тихонов В. И. Статистическая радиотехника. — М.: Радио и связь, 1982

9. Хименко В. И. — Изв. вузов — Радиофизика, 1982, 25, № 3, с. 313.

Ленинградский институт авиационного приборостроения

Поступила в редакцию 9 февраля 1983 г.

STATISTICAL CHARACTERISTICS OF LEVEL EXCURSIONS OF GAUSSIAN PROCESSES

V. I. Khimenko

A problem is considered for finding variance of the most common characteristics of level excursions of the continuous differentiated Gaussian process. For the case of large samples simple analytical results have been obtained which clearly show the character of the functional dependence of estimation variance of the duration of the trajectory considered, the selected level of the analysis and spectral correlation properties of the process.