

УДК 621.396.677.714

О КВАЗИСТАТИЧЕСКОМ ИМПЕДАНСЕ ТОНКОГО ПРОВОДНИКА В ИЗОТРОПНОЙ ДВИЖУЩЕЙСЯ СТОЛКНОВИТЕЛЬНОЙ ПЛАЗМЕ

A. M. Сурин

В квазистатическом приближении выводится уравнение и вычисляется входной импеданс тонкой цилиндрической антенны, помещенной в движущуюся вдоль оси проводника плазму, при возбуждении в системе вынужденных колебаний с учетом соударений электронов. Плазма считается однородной, изотропной и недиспергирующей в сопровождающей плазму системе отсчета.

В статье [1] рассмотрено возбуждение собственных квазистатических колебаний потенциала в системе движущаяся магнитоактивная плазма — тонкая цилиндрическая антenna (ТЦА). Представляет интерес задача о вынужденных колебаниях потенциала и соответствующих параметрах излучателя в подобной системе. Ранее входной квазистатический импеданс тонкого идеального проводника, помещенного в движущуюся изотропную плазму без столкновений, вычислялся в [2] методом функции Грина уравнения Пуассона для осциллирующего точечного заряда.

Известно [2, 3], что в случае вынужденных колебаний электрическое поле элементарного излучателя в перемещающейся плазме в квазистатическом приближении характеризуется, кроме «вакуумного» члена, наличием «дорожки» колебаний типа ленгмюровских, уносимых от источника потоком окружающей среды. «Плазменно-волновое» поле формируется в результате интерференции двух волн с волновыми числами

$$k_j = (\omega \pm \omega_0)/u, \quad (1)$$

где ω — частота излучения, ω_0 — плазменная частота электронов, u — скорость движения плазмы ($v_{Te} \ll u \ll c$, v_{Te} — средняя тепловая скорость электронов, c — скорость света); здесь и далее $j=1; 2$. Соответственно этому в задаче об определении импеданса макроскопического источника наряду с обычным «статистическим» большим параметром [4]

$$B = \ln(2L/a), \quad a \ll 2L \quad (2)$$

($2L$ — длина, a — радиус проводника) фигурируют «плазменно-волновые» большие параметры (при ориентации оси цилиндрической антенны вдоль вектора скорости плазмы) [2]

$$A_j = K_0(|k_j|a) \simeq \ln |k_j|a, \quad |k_j|a \ll 1 \quad (3)$$

($K_0(x)$ — функция Макдональда). На плазменном резонансе ($\omega = \omega_0$) амплитуда волны с индексом $j=2$, отвечающим разностной частоте в (1), неограниченно возрастает [2, 3, 5]. В результате параметры излучателя, помещенного в движущуюся плазму, могут иметь особенности при $\omega \rightarrow \omega_0$. В последнем случае необходим более детальный анализ и, в частности, учет диссипативных процессов в среде.

В данной статье при тех же предположениях, что и в [1, 2], путем свертки решения уравнения Пуассона по плоским волнам дается представляющий самостоятельный интерес вывод уравнения и вычисляется входной импеданс ТЦА в движущейся изотропной столкновительной плазме.

Потенциал электрического поля цилиндрического источника в плазме при разложении решения уравнения Пуассона в трехмерный интеграл Фурье можно представить следующим образом:

$$\varphi(r, z) = \frac{1}{\pi} \int_{-L}^L d\zeta \sigma(\zeta) \int_0^\infty dk_\perp k_\perp J_0(k_\perp a) \int_{-\infty}^\infty \frac{\exp[ik_z(z - \zeta)]}{k^2 \epsilon_c(\omega, k)} dk_z. \quad (4)$$

Здесь r, z — цилиндрические координаты точки наблюдения (ось $0z$ направлена вдоль оси антенны, ориентированной вдоль вектора \mathbf{u}), k_\perp, k_z — цилиндрические координаты в пространстве волновых векторов \mathbf{k} , $J_0(x)$ — функция Бесселя первого рода нулевого индекса, $\sigma(z)$ — линейная плотность заряда,

$$\epsilon_c(\omega, k) = 1 - \omega_0^2/(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{u})(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{u} + i\nu) \quad (5)$$

— диэлектрическая проницаемость движущейся столкновительной плазмы в гидродинамическом приближении [3], ν — эффективная частота соударений электронов, временная зависимость принимается в виде $\exp(-i\omega t)$.

Подставляя (5) в (4) и производя интегрирование в (4) по k_z , а затем по k_\perp , находим

$$\varphi(r, z) = \int_{-L}^L \sigma(\zeta) G_c(r, z - \zeta) d\zeta; \quad (6)$$

$$G_c(r, z) = \frac{1}{\pi \sqrt{ar}} Q_{-1/2} \left(\frac{r^2 + z^2 + a^2}{2ar} \right) - k_0^2 [P(r, z) 1(z) + \\ + \tilde{P}(r, z) 1(-z)] + \frac{2ik_0^2}{k_{0c}} [I_0(k_{1c}a) K_0(k_{1c}r) e^{ik_{1c}z} - \\ - I_0(k_{2c}a) K_0(k_{2c}r) e^{ik_{2c}z}] 1(z); \quad (7)$$

$$\begin{Bmatrix} P(r, z) \\ \tilde{P}(r, z) \end{Bmatrix} = \pm \frac{i}{k_{0c}} \sum_{j=1}^2 (-1)^{j+1} \begin{Bmatrix} S_{jc}(r, z) \\ \tilde{S}_{jc}(r, z) \end{Bmatrix}; \quad (8)$$

$$\begin{Bmatrix} S_{jc}(r, z) \\ \tilde{S}_{jc}(r, z) \end{Bmatrix} = \int_0^\infty \frac{e^{\mp k_\perp |z|} J_0(k_\perp a) J_0(k_\perp r)}{k_\perp \pm ik_{jc}} dk_\perp; \quad (9)$$

$$k_{jc} = (2k \pm k_{0c} + ik_c)/2, \quad k_{0c} = (4k_0^2 - k_c^2)^{1/2}, \quad 2k_0 > k_c, \quad (10)$$

$$k = \omega/u, \quad k_0 = \omega_0/u, \quad k_c = \nu/u.$$

В выражении (7) $Q_{-1/2}(x)$ — шаровая функция второго рода нулевого порядка степени $-1/2$, $1(z)$ — единичная функция, $I_0(z)$ — функция Бесселя второго рода нулевого индекса, и при выводе (7) использованы следующие соотношения [6]:

$$\int_0^\infty e^{-k_\perp |z|} J_0(k_\perp a) J_0(k_\perp r) dk_\perp = \frac{1}{\pi \sqrt{ar}} Q_{-1/2} \left(\frac{r^2 + z^2 + a^2}{2ar} \right),$$

$$\int_0^\infty k_\perp J_0(k_\perp a) J_0(k_\perp r)(k_\perp^2 + k_{jc}^2)^{-1} dk_\perp = I_0(k_{jc} a) K_0(k_{jc} r), \quad (11)$$

$$r > a, \quad \operatorname{Re} k_{jc} > 0.$$

Здесь и далее в выражениях типа (8) и (9) верхнему (соответственно нижнему) варианту формулы в левой части соответствует верхний (нижний) вариант соотношения и (или) верхний (нижний) знак в правой части. Кроме того, все величины, относящиеся к случаю столкновительной плазмы и имеющие для среды без потерь соответствующие аналоги (которые будем обозначать той же буквой), снабжаются дополнительно индексом «с».

Заметим, что при помощи тождества $1/p = \int_0^\infty \exp(-p\xi) d\xi \quad (\operatorname{Re} p > 0)$

и первого из соотношений (11) функции (9) можно представить в следующей форме:

$$\left\{ \begin{array}{l} S_{jc}(r, z) \\ \tilde{S}_{jc}(r, z) \end{array} \right\} = \frac{1}{\pi \sqrt{ar}} \int_0^\infty e^{\mp ik_{jc}\xi} Q_{-1/2} \left[\frac{(\xi \pm z)^2 + r^2 + a^2}{2ar} \right] d\xi. \quad (12)$$

Запишем теперь выражение для потенциала поля на самой антенне, считая ее тонкой, таким образом:

$$\varphi(z) \equiv \varphi(r = a + 0, z) = \Phi_e[\sigma, z] - P[\sigma, z] + \Phi_i[\sigma, z]; \quad (13)$$

$$\Phi_e[\sigma, z] = \frac{1}{\pi a} \int_{-L}^L \sigma(\zeta) Q_{-1/2} \left[\frac{(z - \zeta)^2 + 2a^2}{2a^2} \right] d\zeta; \quad (14)$$

$$P[\sigma, z] = \int_{-L}^L \sigma(\zeta) P_e(z - \zeta) d\zeta,$$

$$P_e(z) = k_0^2 \left\{ \begin{array}{ll} P(z), & z > 0 \\ \tilde{P}(z), & z < 0 \end{array} \right., \quad \left\{ \begin{array}{l} P(z) \\ \tilde{P}(z) \end{array} \right\} \equiv \left\{ \begin{array}{l} P(a, z) \\ \tilde{P}(a, z) \end{array} \right\}; \quad (15)$$

$$\Phi_i[\sigma, z] = \int_{-L}^z \sigma(\zeta) K_c(z - \zeta) d\zeta; \quad (16)$$

$$K_c(z) = 2ik_0^2 k_{0c}^{-1} (A_{1c} e^{ik_{1c} z} - A_{2c} e^{ik_{2c} z}); \quad (17)$$

$$A_{jc} = K_0(k_{jc} a). \quad (18)$$

Посредством интегрального представления шаровой функции [6]

$$Q_{-1/2}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^\pi \frac{d\vartheta}{\sqrt{x - \cos \vartheta}} \quad (19)$$

интеграл $\Phi_e[\sigma, z]$ и функции

$$\left\{ \begin{array}{l} S_{jc}(z) \\ \tilde{S}_{jc}(z) \end{array} \right\} \equiv \left\{ \begin{array}{l} S_{jc}(a, z) \\ \tilde{S}_{jc}(a, z) \end{array} \right\} \quad (20)$$

приводятся к виду

$$\Phi_e [\sigma, z] = \int_{-L}^L \frac{\sigma(\zeta) d\zeta}{R(z - \zeta)}; \quad (21)$$

$$\begin{Bmatrix} S_{jc}(z) \\ \tilde{S}_{jc}(z) \end{Bmatrix} = \int_0^\infty \frac{e^{\mp ik_{jc}\xi} d\xi}{R(\xi \pm z)}; \quad (22)$$

$$\frac{1}{R(z)} = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{d\vartheta}{[z^2 + 4a^2 \sin^2(\vartheta/2)]^{1/2}}. \quad (23)$$

Функционал $\Phi_e[\sigma, z]$ в (13) имеет смысл распределения потенциала по цилиндрическому проводнику радиуса a и длины $2L$ с распределением заряда, описываемого $\sigma(z)$, в вакууме [4]. Интеграл $\Phi_i[\sigma, z]$ в правой части (13) связан с движением плазмы и обязан возбуждению дорожки колебаний (см. выше). Наконец, функционал $P[\sigma, z]$ в выражении (13) обусловлен наличием близких полей продольных волн в движущейся среде.

Для перехода в (13) к случаю неподвижной плазмы необходимо учесть, что функции $S_{jc}(z)$ и $\tilde{S}_{jc}(z)$ интегрированием в (22) один раз по частям можно записать следующим образом:

$$\begin{Bmatrix} S_{jc}(z) \\ \tilde{S}_{jc}(z) \end{Bmatrix} = \mp \frac{i}{k_{jc}} \left[\frac{1}{R(z)} - \begin{Bmatrix} T_{jc}(z) \\ \tilde{T}_{jc}(z) \end{Bmatrix} e^{ik_{jc}z} \right]; \quad (24)$$

$$\begin{Bmatrix} T_{jc}(z) \\ \tilde{T}_{jc}(z) \end{Bmatrix} = \int_{\pm z}^{\infty} \frac{\xi e^{\mp ik_{jc}\xi} d\xi}{R^3(\xi)}; \quad (25)$$

$$\frac{1}{R^n(z)} = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{d\vartheta}{[z^2 + 4a^2 \sin^2(\vartheta/2)]^{n/2}}. \quad (26)$$

При подстановке (24) в соотношения (8), (15) и (13) получаем

$$\varphi(z) = \Phi_e[\sigma, z]/\epsilon_{0c}(\omega) - Q[\sigma, z] + \Phi_i[\sigma, z], \quad (27)$$

где

$$\epsilon_{0c}(\omega) = 1 - \omega_0^2/\omega(\omega + i\nu) \quad (28)$$

— диэлектрическая проницаемость неподвижной столкновительной плазмы;

$$Q[\sigma, z] = \int_{-L}^L \sigma(\zeta) Q_e(z - \zeta) d\zeta, \quad Q_e(z) = k_0^2 \begin{cases} Q(z), & z > 0 \\ \tilde{Q}(z), & z < 0 \end{cases}; \quad (29)$$

$$\begin{Bmatrix} Q(z) \\ \tilde{Q}(z) \end{Bmatrix} = \frac{1}{k_{0c}} \sum_{j=1}^2 \frac{(-1)^j}{k_{jc}} \begin{Bmatrix} T_{jc}(z) \\ \tilde{T}_{jc}(z) \end{Bmatrix} e^{ik_{jc}z}. \quad (30)$$

Отметим, что в знаменателе интегрального представления (23) функции $1/R(z - \zeta)$ присутствует величина $[(z - \zeta)^2 + 4a^2 \sin^2(\vartheta/2)]^{1/2}$, т. е. расстояние между двумя точками, расположенными на поверхности цилиндра, где ϑ — угол между плоскостями, проходящими через

эти точки и ось цилиндра. Таким образом, геометрически $R(z-\xi)$ — это среднее по азимуту расстояние между точкой источника и точкой наблюдения. Соотношение (24) представляет собой разложение функций $S_{jc}(z)$ и $\tilde{S}_{jc}(z)$ в ряд по степеням $1/R(z)$.

Из формул (13) и (27) с учетом асимптотики функции Макдональда $K_0(x)$ для малых и больших значений аргумента соответственно в формальных пределах $u \rightarrow \infty$ и $u \rightarrow 0$ ($v_{te} \rightarrow 0$) получаем обычные выражения для потенциала цилиндрического проводника в вакууме и в покоящейся столкновительной плазме. Если $\omega_0 = 0$, то из (13) следует вновь «вакуумное» выражение для потенциала провода. Наконец, при $v=0$ из соотношений (13) и (27) вытекают известные результаты для случая движущейся бесстолкновительной плазмы [2].

Теперь, используя граничное условие

$$\varphi(z) = \Phi_0, \quad \Phi_0 = \text{const} \quad (31)$$

и соответствующую оценку [2] для функционала $\Phi_e[\sigma, z]$, при обычных предположениях теории тонких антенн запишем приближенное уравнение для распределения заряда по проводнику:

$$\sigma(z) + \mu \Phi_t[\sigma, z] = \mu \Phi_0, \quad \mu = 1/2B. \quad (32)$$

Уравнение антенны такого же вида получается, если в решении (4) уравнения Пуассона сразу положить для тонкого проводника $J_0(k_\perp a) = 1$ ($a \rightarrow 0$). При этом, как легко проследить из всего изложенного, в выражениях (21)–(26) вместо $R(z-\xi)$ будет присутствовать величина $R_0(z-\xi) = [(z-\xi)^2 + a^2]^{1/2}$. В то же время переход от $R(z-\xi)$ к $R_0(z-\xi)$ является основным приближением теории тонких антенн (см., например, [7] и цитированную там литературу). Замена R на R_0 обычно осуществляется без должного обоснования, подобного приведенному, и является математически некорректной, так как она выражается в подстановке в уравнение источника регулярного ядра R_0 вместо сингулярного R . С другой стороны, это приближение приводит к правильной (т. е. такой же, как в случае провода в вакууме [4]) логарифмической особенности в распределении заряда по антенне (см. ниже).

Таким образом, ядро $G_c(r, z-\xi)$ интегрального оператора (6) оказывается «нечувствительным» в приближении теории тонких антенн к замене функции Бесселя $J_0(k_\perp a)$ на единицу или, что то же самое, к замене в (4) (при $r=a$) неотрицательной функции $[J_0(k_\perp a)]^2$ на знакопеременную $J_0(k_\perp a)$. Тот факт, что указанная замена возможна, свидетельствует о равноправности развиваемого здесь подхода и метода функции Грина [2]. Представляется вполне обоснованным заключение, что указанная замена допустима и в более сложных ситуациях, когда не удается в явном виде проследить все тонкости перехода от выражений, получаемых при сохранении функции $J_0(k_\perp a)$, к аналогичным соотношениям с заменой $J_0(k_\perp a)$ на единицу, например, при вычислении импеданса ТЦА в движущейся плазме при учете поперечного поля излучения или при учете «собственной» пространственной дисперсии среды.

Уравнение (32) легко решается преобразованием Лапласа, определенным в [2], и при $v \ll 2\omega_0$ искомая функция $\sigma(z)$ имеет вид

$$\sigma(z) = \mu \Phi_0 [\gamma_{0c} + \gamma_{1c} e^{i p_{1c}(L+z)} + \gamma_{2c} e^{i p_{2c}(L+r)}], \quad \gamma_{0c} = \frac{k_{1c} k_{2c}}{p_{1c} p_{2c}}, \quad (33)$$

$$\gamma_{jc} = \frac{(p_{jc} - k_{1c})(p_{jc} - k_{2c})}{p_{jc}(p_{1c} - p_{2c})}, \quad p_{jc} = (1/2)(2k + \mu k_0(A_{2c} - A_{1c}) +$$

$$+ ik_0 \pm k_0 [\mu^2 (A_{2c} - A_{1c})^2 - 4\mu (A_{1c} + A_{2c}) + 4]^{1/2}\}.$$

При этом входной квазистатический импеданс $Z = U/I_0$ симметричной антенны, для которой

$$\int_{-L}^0 \sigma(z) dz = -q; \int_0^L \sigma(z) dz = q,$$

где амплитуда заряда на каждом проводнике задана и равна q , U — разность потенциалов усов антенны, а ток в зазоре

$$I_0 = I(0) = i\omega \int_{-L}^0 \sigma(z) dz = -i\omega q,$$

можно представить в следующем виде:

$$Z = (i/\omega\mu) (J_1^{-1} + J_2^{-1}); \quad (34)$$

$$J_1 = \gamma_{0c} L + i(\delta_{1c} - \delta_{2c}),$$

$$J_2 = \gamma_{0c} L + i(\delta_{1c} e^{ip_{1c}L} - \delta_{2c} e^{ip_{2c}L}), \quad \delta_{jc} = (\gamma_{cj}/p_{jc}) (1 - e^{ip_{jc}L}). \quad (35)$$

Из выражений (33) — (35) следует, что характеристики источника в движущейся столкновительной плазме на плазменной частоте не имеют особенностей. В частности, в случае редких столкновений ($v \ll \omega$) составляющие входного импеданса $Z^0 = R^0 - iX^0$ при $\omega = \omega_0$ равны

$$R^0 \simeq (A_c/u) [1 + \cos(\alpha\mu A_c)], \quad X^0 \simeq - (A_c/u) \cos(\alpha\mu A_c) \operatorname{ctg}(\alpha\mu A_c/2), \quad (36)$$

$$\alpha = kL, \quad A_c = K_0(k_c L/2), \quad v/\omega \ll 2\mu A_c, \quad k_c L \ll 1.$$

Таким образом, амплитуды входного сопротивления и реактанса источника на плазменной частоте определяются радиусом проводника, частотой соударений электронов и скоростью движения плазмы, а длина антенны задает период осцилляций этих величин. При этом $Z^0 \rightarrow \infty$, если $v \rightarrow 0$ [8], что связано с интенсивной раскачкой собственных колебаний среды.

Для случая бесстолкновительной плазмы и частот, не слишком близких к плазменной частоте ($|\omega - \omega_0| \gg \omega_0$), импеданс ТЦА определяется по формуле (34), в которой

$$J_1 = \frac{\epsilon_0 L}{1 - \eta^2 v} - \frac{i\mu k_0 A_m}{\eta} \left[\frac{1 - e^{i(k + \eta k_0)L}}{(k + \eta k_0)^2} - \frac{1 - e^{i(k - \eta k_0)L}}{(k - \eta k_0)^2} \right],$$

$$J_2 = \frac{\epsilon_0 L}{1 - \eta^2 v} - \frac{i\mu k_0 A_m}{\eta} \left[\frac{1 - e^{i(k + \eta k_0)L}}{(k + \eta k_0)^2} e^{i(k + \eta k_0)L} - (1 - e^{i(k - \eta k_0)L}) \times \right. \\ \left. \times (k - \eta k_0)^{-2} e^{i(k - \eta k_0)L} \right], \quad \epsilon_0 = 1 - v, \quad v = \omega_0^2/\omega^2, \quad \eta = (1 - 2\mu A_m)^{1/2}, \quad (37)$$

$$A_m = K_0(k_m a), \quad k_m = \max\{k; k_0\}.$$

Если, кроме того, выполняется условие

$$2k_m L \sim 1, \quad (38)$$

то, переходя к пределу при $\eta \rightarrow 0$ в (37), находим, что

$$Z = (2iB/u) \{ [\epsilon_0 \alpha + iv(2 - (2 - i\alpha) e^{i\alpha})]^{-1} + \\ + [\epsilon_0 \alpha + iv(2 - i\alpha - 2(1 - i\alpha) e^{i\alpha}) e^{i\alpha}]^{-1} \}. \quad (39)$$

Выражение (39) для импеданса и соответствующее (39) распределение заряда по проводнику

$$\sigma(z) = (\Phi_0/2B) \{ \epsilon_0 + v [1 - ik(L+z)] e^{ik(L+z)} \} \quad (40)$$

могут быть получены из результатов работы [1] в изотропном пределе.

В заключение укажем, что приведенные здесь соотношения для характеристик антенн в движущейся плазме имеют место, если рассматриваемая система находится в устойчивой области параметров [1]. Исследование же устойчивости вынужденных квазистатических колебаний тока в тонком проводнике, обтекаемого плазмой, представляет тему специального исследования.

Отметим также, что указанные выражения отличаются от соответствующих формул статьи [2] в силу того, что здесь используется иное, нежели в [2], граничное условие. По этой причине распределение тока по антenne, соответствующее заряду (40), отличается от «треугольного» (ср. [2]).

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Эйдман В. Я — Изв. вузов — Радиофизика, 1979, 22, № 7, с. 781.
- 2 Сурин А. М. — Изв. вузов — Радиофизика, 1975, 18, № 5, с. 647.
- 3 Сурин А. М. — Изв. вузов — Радиофизика, 1979, 22, № 8, с. 917.
- 4 Ландau Л. Д., Лившиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. — М.: Наука, 1982
- 5 Mouggues G, Fijalkow E, Feix M. R. — Plasma Phys., 1980, 22, № 5, p. 367
- 6 Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. — М.: Наука, 1971.
- 7 Фрадин А. З. Антенно-фидерные устройства. — М.: Связь, 1977.
- 8 Michel E — J Plasma Phys., 1976, 15, pt. 3, p. 395

Кировский политехнический
институт

Поступила в редакцию
25 октября 1982 г,
после переработки
8 августа 1983 г.

ON QUASI-STATICAL IMPEDANCE OF A THIN CONDUCTOR IN AN ISOTROPIC MOVING COLLISION PLASMA

A. M. Surin

In the quasi-static approximation an equation is derived and the input impedance is calculated of a thin cylindrical antenna being placed in a plasma moving along the conductor axis, under the excitation of induced oscillations in the system taking into account electron collisions. The plasma is considered to be uniform, isotropic and nondispersing in the reference frame follows the plasma.