

О СХОДИМОСТИ МЕТОДА ЧАСТИЧНЫХ ОБЛАСТЕЙ ПРИ РАСЧЕТЕ СТУПЕНЧАТЫХ НЕОДНОРОДНОСТЕЙ В ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ВОЛНОВОДАХ

В. П. Ляпин, М. Б. Мануилов, Г. П. Синявский

Изложен алгоритм вычисления матричных элементов алгебраических систем, получающихся при решении задач дифракции на ступенчатых неоднородностях в прямоугольных волноводах, существенно повышающий точность численных решений. Показано, что приближенные решения имеют экспоненциальную сходимость при расчете полей в задаче о бесконечно тонкой диафрагме и степенную — в задаче о стыке волноводов.

Сходимость метода частичных областей (МЧО) существенно улучшается, если учесть особенность поведения поля у ребра неоднородности на границе сшивания областей [1]. При этом точность конечных результатов в значительной мере зависит от погрешностей вычисления матричных элементов алгебраической системы уравнений, решаемой на заключительном этапе. Матричные элементы в рассматриваемых задачах представляют собой медленно сходящиеся ряды специальных функций. Улучшая сходимость этих рядов и уменьшая погрешности их вычисления, можно значительно повысить точность получаемых решений [2, 3].

Ниже рассмотрим один из возможных алгоритмов улучшения сходимости рядов матричных элементов при расчете ступенчатых неоднородностей в прямоугольных волноводах.

Решение задачи дифракции H_{p0} - и H_{0p} -волн на диафрагмированном стыке прямоугольных волноводов (рис. 1) приводит к системе алгебраических уравнений $DV = R$, где D — матрица системы, R — массив свободных членов, V — искомые коэффициенты разложения тангенциальной компоненты электрического поля на границе сшивания областей I ($z < 0$) и II ($z > 0$) [2]. При дифракции H_{p0} -волны (емкостное препятствие) матрица системы определяется следующим образом:

$$D_{lm} = \sum_{n=0}^{\infty} (2 - \delta_{0n}) \left[\frac{1}{a\gamma_n} \Phi_l(\alpha_n) \Phi_m(\alpha_n) + \frac{1}{b\lambda_n} \Phi_l(\beta_n) \Phi_m(\beta_n) \right], \quad (1)$$

где $i, m = 0, 1, 2, \dots, N$, $\gamma_n^2 = K^2 - \alpha_n^2$, $\lambda_n^2 = K^2 - \beta_n^2$, $\alpha_n = n\pi a^{-1}$, $\beta_n = n\pi b^{-1}$, $K^2 = k^2 - (p\pi/d)^2$, $k = 2\pi\lambda^{-1}$, $\Phi_l(\alpha) = J_{2l+1}(\alpha c) \alpha^{-\tau}$, $J_\nu(\alpha)$ — функции Бесселя 1-го рода, δ_{0n} — символ Кронекера,

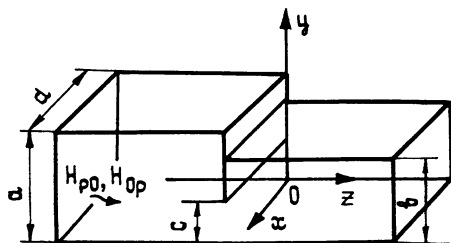


Рис. 1.

$$\tau = \begin{cases} 0 & \text{в случае диафрагмы,} \\ 1/6 & \text{в случае стыка.} \end{cases}$$

Когда на неоднородность падает волна H_{0p} (индуктивное препятствие), матрица системы принимает вид

$$D_{im} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\gamma_n}{a} F_l(\alpha_n) F_m(\alpha_n) + \frac{\lambda_n}{b} F_l(\beta_n) F_m(\beta_n) \right], \quad (2)$$

где $\gamma_n^2 = k^2 - \alpha_n^2$, $\lambda_n^2 = k^2 - \beta_n^2$, $F_m(\alpha) = J_{2m+2+\tau}(\alpha c) \alpha^{-(\tau+1)}$, остальные обозначения прежние.

Учитывая асимптотику поведения функций Бесселя при больших значениях аргумента, можно показать, что члены рядов (1) и (2) убывают как $1/n^{2+2\tau}$. Улучшить сходимость рядов (1), (2) можно, выделив в них медленно сходящуюся часть вида

$$Q_{ij}^{\nu}(x) = x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_{i+\nu}(n\pi x) J_{j+\nu+2j}(n\pi x)}{(n\pi x)^{1+2\nu}}, \quad (3)$$

вычисление которой сводится, как показано в [3], к вычислению ряда по степеням x :

$$Q_{ij}^{\nu}(x) = -\frac{8}{\pi^3} \left\{ \frac{\pi^2 \delta_{0p}}{\Gamma^2(\nu+1) 4^{\nu+2}} \left[2 \ln 2\pi x + \psi(1) - \psi(1+2\nu) - \right. \right. \\ \left. \left. - \psi(\nu+1) - \psi(\nu+1/2) - \frac{\pi}{8} \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p+1+2\nu)} I_j^{\nu} \left(2\delta_{0p} \ln 2 + \frac{1-\delta_{0p}}{p} \right) - \right. \right. \\ \left. \left. - \sum_{m=p+\delta_{0p}}^{\infty} \zeta(2m) \frac{C_m}{m} x^{2m} \right] \right\}, \quad (4)$$

где

$$I_j^{\nu} = \begin{cases} \frac{\pi}{2^{2\nu+1}(2\nu+1) \text{B}(\nu+1+j, \nu+1-j)}, & \nu \neq 0, \\ \frac{\pi \delta_{0j}}{2}, & \nu = 0 \end{cases}, \\ C_m = (-1)^p \times \quad (5)$$

$$\times \frac{\pi^2 \Gamma(2m+2\nu+1) \Gamma(2m+1)}{2^{4m+2\nu+3} \Gamma(m+p+1+2\nu) \Gamma(m+\nu+1+j) \Gamma(m+\nu+1-j) \Gamma(m-p+1)},$$

$p=i+j$, $\zeta(m)$ — дзета-функция Римана, а $\Gamma(x)$, $\text{B}(x, y)$, $\psi(x)$ — гамма-, бэ́та- и пси-функции Эйлера. Коэффициенты C_m вычисляются просто, если учесть, что

$$C_{m+1} = C_m \frac{(m+\nu+1)(m+\nu+1/2)(m+1)(m+1/2)}{(m+p+1+2\nu)(m+\nu+1+j)(m+\nu+1-j)(m-p+1)}.$$

Пользуясь асимптотикой поведения гамма-функции при $m \rightarrow \infty$, а также учитывая, что при этом $\zeta(2m) \rightarrow 1$, можно показать, что коэффициенты при степенях x в (4) убывают с ростом m так же, как и члены исходного ряда (3), т. е. как $1/m^{2+2\nu}$. По смыслу задачи $x \leq 1$. Ясно, что при $x < 1$ ряд в (4) сходится значительно быстрее, чем исходный ряд (3), поэтому в данном случае преимущества изложенного способа вычисления медленно сходящейся части (3) очевидны. При

$x=1$ сходимость указанных рядов одинакова. Поэтому в частном случае $x=1$ проведем улучшение сходимости ряда в (4). Воспользуемся для этого асимптотическим представлением для частного гамма-функций [4]:

$$\frac{\Gamma(m+a)}{\Gamma(m+b)} = m^{a-b} \sum_{k=0}^{s-1} \frac{(-1)^k B_k^{(a-b+1)}(a)(b-a)_k}{k!} m^{-k} + O(m^{-s}), \quad (6)$$

где $B_k^{(a-b+1)}(a)$ — обобщенные многочлены Бернулли, $(b-a)_k = \Gamma(b-a+k)/\Gamma(b-a)$. Разлагая с помощью (6) члены ряда в (4) по отрицательным степеням индекса суммирования m , а также учитывая определение дзета-функции Римана, можно выделить в (4) медленно сходящуюся часть в виде суммы дзета-функций. Тогда ряд в (4) преобразуется к следующему виду:

$$\sum_{m=p+\delta_{0p}}^{\infty} \zeta(2m) \frac{C_m}{m} = \sum_{m=p+\delta_{0p}}^{\infty} \left(\zeta(2m) \frac{C_m}{m} - \sum_{k=0}^{s-1} \frac{A_k}{m^{2\nu+2+k}} \right) - \sum_{m=1}^{p-1} \sum_{k=0}^{s-1} \frac{A_k}{m^{\nu+2+k}} + \sum_{k=0}^{s-1} A_k \zeta(2\nu+2+k) \quad (7)$$

Здесь A_k — коэффициенты, вычисляемые из (5) и (6). Выражение (7) записано для общего случая, когда $p = i + j > 1$. При проведении расчетов в разложении (6) принимались во внимание шесть членов ($s=6$). В (7) в скобках стоит разность между членами ряда из (4) и его разложением по отрицательным степеням m . Этот новый ряд сходится очень быстро ($\sim 1/m^{2\nu+8}$). Для вычисления дзета-функций рационального аргумента использовался алгоритм, разработанный на основе формулы Эйлера—Маклорена [5]:

$$\begin{aligned} \zeta(\nu) &= \frac{2^\nu}{2^\nu - 1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^\nu} = \frac{1}{2^\nu - 1} \left\{ \frac{1}{1-\nu} \left[\frac{1}{M^\nu} - \frac{1}{(M-1/2)^{\nu-1}} \right] + \right. \\ &+ \sum_{n=1}^M \frac{1}{1+\delta_{nM}} \left[\frac{1}{(n-1/2)^\nu} - \frac{1}{n^\nu} \right] + \frac{\nu}{12} \left[\frac{1}{(M-1/2)^{\nu+1}} - \frac{1}{M^{\nu+1}} \right] - \\ &- \frac{\nu(\nu+1)(\nu+2)}{720} \left[\frac{1}{(M-1/2)^{\nu+3}} - \frac{1}{M^{\nu+3}} \right] + \frac{\nu(\nu+1)\dots(\nu+4)}{30240} \times \\ &\times \left[\frac{1}{(M-1/2)^{\nu+5}} - \frac{1}{M^{\nu+5}} \right] - \frac{\nu(\nu+1)\dots(\nu+6)}{1209600} \times \\ &\left. \times \left[\frac{1}{(M-1/2)^{\nu+7}} - \frac{1}{M^{\nu+7}} \right] + O(M^{-8-\nu}) \right\}, \end{aligned}$$

где δ_{nM} — символ Кронекера.

При проведении вычислений параметр M , определяющий погрешность формулы, достаточно задавать равным десяти.

После выделения медленно сходящейся части (3) выражения (1) и (2) примут соответственно следующий вид:

$$D_{lk} = \left(\frac{c}{2} \right)^{2\tau} \frac{\delta_{0l} \delta_{0k}}{k \Gamma^2(\tau+1)} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) +$$

$$+ 2 \sum_{n=0}^{\infty} \left[\left(\frac{1}{a\gamma_n} - \frac{1}{jn\pi} \right) \Phi_i(\alpha_n) \Phi_k(\alpha_n) + \left(\frac{1}{b\lambda_n} - \frac{1}{jn\pi} \right) \Phi_i(\beta_n) \Phi_k(\beta_n) \right] - \quad (8)$$

$$- j2c^{2\tau} [Q_{2i, k-i}^{\tau}(c/a) + Q_{2i, k-i}^{\tau}(c/b)];$$

$$D_{ik} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\gamma_n - j\alpha_n}{a} F_i(\alpha_n) F_k(\alpha_n) + \frac{\lambda_n - j\beta_n}{b} F_i(\beta_n) F_k(\beta_n) \right] + \quad (9)$$

$$+ jc^{2\tau} [Q_{2i+2, k-i}^{\tau}(c/a) + Q_{2i+2, k-i}^{\tau}(c/b)],$$

где j — мнимая единица. Члены рядов в этих выражениях убывают уже как $1/n^{4+2\tau}$.

Об эффективности МЧО с учетом краевой особенности и изложенным алгоритмом вычисления матричных элементов можно судить из помещенных ниже таблиц. В них показана сходимость модуля и фазы коэффициента отражения основной волны с ростом порядка решаемой системы. В табл. 1 приведены результаты расчета емкостной диафрагмы, в табл. 2 — стыка в E -плоскости. Содержащийся в таблицах параметр c/a определяет относительный размер окна диафрагмы или высоту второго волновода в случае стыка ($c/a = b/a$). Значение частотного параметра $Ka/\pi = ((2a/\lambda)^2 - (a/d)^2)^{1/2}$ бралось равным 0,5.

Таблица 1

N	c/a		
	0,2	0,5	0,9
0	0,79447424757 142,605624859	0,36029792133 111,118492930	0,0790676 94,53497
1	0,79445691907 142,603990025	0,35979986674 111,087905081	0,0128419 90,73581
2	0,79445691895 142,603990014	0,35979945980 111,087880092	0,0125625 90,71979
3	0,79445691895 142,603990014	0,35979945973 111,087880088	0,0125569 90,71947
4	0,79445691895 142,603990014	0,35979945973 111,087880088	0,0125567 90,71946

Таблица 2

N	c/a		
	0,2	0,5	0,9
0	0,68731901 173,913415	0,3616525 164,26172	0,0635664 147,883
1	0,6872513 173,928625	0,3608294 164,46568	0,0535657 169,840
2	0,68720388 173,928805	0,3608212 164,46775	0,0535009 170,194
3	0,68720379 173,928805	0,3608205 164,46790	0,0534965 170,218
4	0,68720377 173,928807	0,3608205 164,46794	0,0534959 170,221

Существенно, что высокая точность получаемых результатов достигается при незначительных затратах машинного времени. Так, время счета одной точки в пятом приближении на ЭВМ БЭСМ-6 составляет около 0,2 с. При проведении практических расчетов достаточно брать первое-второе приближение.

Быстрая сходимость метода в рассматриваемых задачах связана с выбором системы функций, учитывающих особенность поведения поля вблизи ребра неоднородности. При расчете емкостных неоднородностей тангенциальная компонента электрического поля на границе сшивания областей разлагалась в ряд по функциям

$$X_i(y) = [1 - (y/c)^2]^{\tau-1/2} C_{2i}^{\tau}(y/c), \quad (10)$$

в случае индуктивных неоднородностей — по функциям

$$X_i(y) = [1 - (y/c)^2]^{\tau+1/2} C_{2i+1}^{\tau+1}(y/c), \quad (11)$$

где показатель особенности τ определен в (1), $C_i^{\tau}(y/c)$ — полиномы Гегенбауэра. Можно показать, что выбранные функции полностью учитывают асимптотику поля вблизи плоского ребра, поэтому при расчете диафрагмы метод сходится наиболее быстро. В этом случае отмечался факт экспоненциальной сходимости метода применительно к расчету коэффициентов замедления микрополосковой линии [6]. Поле вблизи прямоугольного ребра несколько хуже описывается функциями (10), (11) [6], что объясняет некоторое ухудшение сходимости результатов при расчете стыка.

Проведенные численные исследования показали, что величина относительной ошибки N -го приближения $\varepsilon_N = |R_N - R|/R$ (R — модуль коэффициента отражения) при расчете диафрагм может быть оценена с помощью соотношения

$$\varepsilon_N \simeq A(c, k) e^{-\alpha(c, k)N}, \quad (12)$$

а при расчете стыков можно пользоваться следующей оценкой:

$$\varepsilon_N \simeq B(c, k) (N + 1)^{-\beta(c, k)}, \quad (13)$$

где $N = 0, 1, 2, \dots$, а величины A, α, B, β являются функциями размера отверстия связи c/a и частотного параметра падающей волны ka/π .

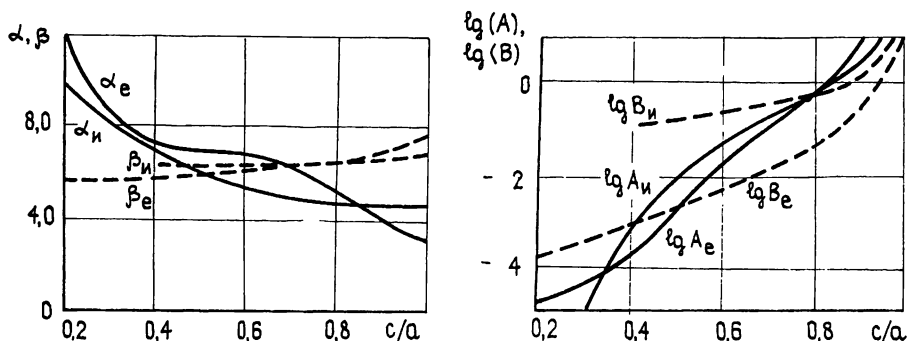


Рис. 2.

На рис. 2 показаны зависимости этих величин от c/a (частотный параметр фиксирован) при расчете четырех структур: емкостной диафрагмы ($\alpha_e, \lg A_e$), индуктивной диафрагмы ($\alpha_n, \lg A_n$), стыка в E -плоскости ($\beta_e, \lg B_e$), симметричного стыка в H -плоскости ($\beta_n, \lg B_n$).

(Здесь и далее результаты для диафрагм изображаются сплошной, для стыков — пунктирной линиями.) Для емкостных неоднородностей $Ka/\pi = 0,5$, для индуктивной диафрагмы $2a/\lambda = 1,5$, для стыка в H -плоскости $2a/\lambda = 1,2$. Точность расчета всех рассмотренных структур падает с ростом c/a . При этом во всех случаях растут величины A и B , которые представляют собой ошибки нулевого приближения. Показатель степени β слабо зависит от c/a , и при расчете стыков с ростом c/a точность во всех приближениях снижается примерно одинаково. При анализе же диафрагм α убывает с ростом c/a , что означает ухудшение сходимости приближенных решений. Рост погрешностей получаемых численных решений с увеличением размера отверстия связи c/a объясняется двумя причинами. Первая состоит в том, что N функций (10), (11), учитываемых в разложении электрического поля на границе сшивания областей, тем хуже описывает реальное поле в отверстии, чем больше размер отверстия [6]. Вторая причина связана со снижением при $c/a \rightarrow 1$ точности суммирования ряда по x ($x=c/a$) в (4), т. е. со снижением точности вычисления матричных элементов алгебраической системы.

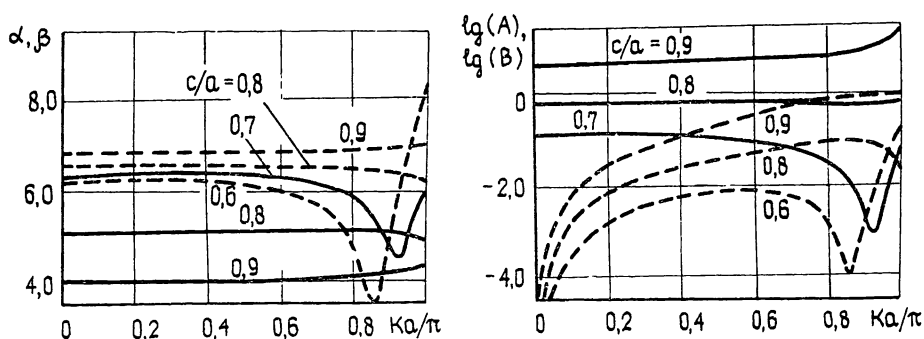


Рис. 3.

Частотный параметр в одномодовом режиме менее существенно, чем параметр c/a , мняет точность численных решений. На рис. 3 приведены зависимости α , $\lg A$, β , $\lg B$ от частотного параметра для емкостной диафрагмы и стыка в E -плоскости, на рис. 4 — для индуктивной

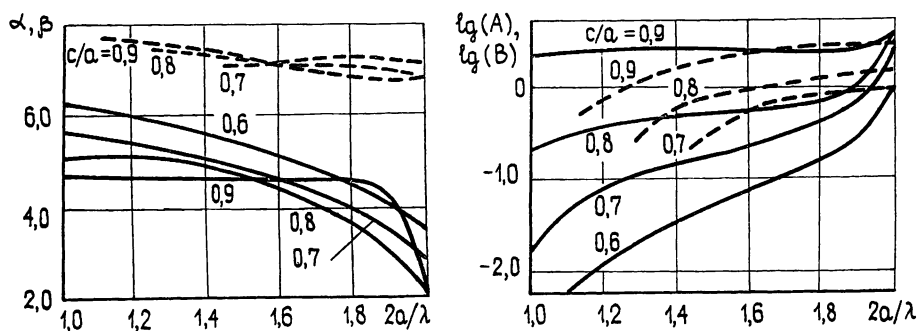


Рис. 4

диафрагмы и стыка в H -плоскости. С ростом частоты точность результатов, как правило, несколько ухудшается (в разной степени для различных структур). Провалы на графиках $\lg A$ и $\lg B$ (рис. 3) означают, что в узких полосах частот уменьшается ошибка нулевого при-

ближения. Однако за счет более медленной сходимости решений на этих частотах (провалы на графиках α , β) ошибки последующих приближений сохраняют примерно ту же величину, что и за пределами этих полос частот.

С переходом в многомодовую область частотного параметра происходит более значительное снижение точности решений. Так, например, при расчете емкостной диафрагмы при $Ka/\pi = 3,5$ точность ниже, чем при $Ka/\pi = 0,5$ (см. табл. 1) на один-три порядка.

Сходимость и точность результатов зависит от устойчивости решаемых алгебраических систем. Для исследования устойчивости систем находилось число обусловленности, определяемое как произведение кубических норм прямой и обратной матриц [7]:

$$\text{cond}(D) = \|D\| \|D^{-1}\|, \quad \|D\| = \max_{1 \leq i < N} \sum_{j=1}^N |D_{ij}|.$$

На рис. 5 приведены зависимости $\lg(\text{cond}(D))$ систем различных порядков от c/a . Из графиков видно, что почти во всем диапазоне изменения параметра c/a число обусловленности систем ($N \leq 10$) в задаче о диафрагме не превышает 100, в задаче о стыке—500. Лучшая устойчивость систем позволяет получить при расчете диафрагм более высокую точность. Следует обратить внимание также на то, что устойчивость систем ухудшается с ростом их порядка N , и наивысшая точность достигается в пятом-шестом приближении. При дальнейшем увеличении N ошибки возрастают и уже при $N=12$ имеют величину порядка 10^{-4} . Поэтому оценить ошибку результата по формулам (12), (13) можно только для $N \leq 5$.

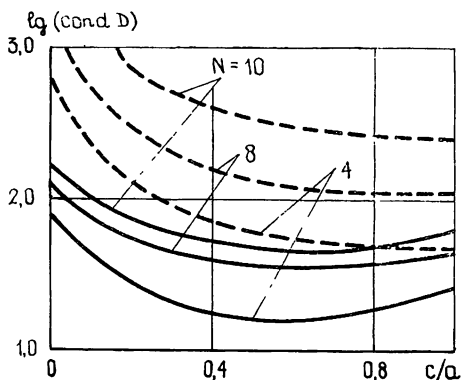


Рис. 5.

В заключение выделим основные результаты работы.

Найден алгоритм вычисления матричных элементов алгебраических систем, существенно повышающий точность приближенных решений в рассмотренных задачах и применимый в ряде аналогичных задач; при проведении практических расчетов с использованием данного алгоритма в большинстве случаев достаточно ограничиться первым-вторым приближением.

На основе проведенных численных исследований показана (при $N \leq 5$) экспоненциальная сходимость метода при расчете полей, рассеянных на бесконечно тонкой диафрагме, и степенная сходимость при расчете стыка волноводов, причем значения констант, определяющих величину ошибок (12), (13), в рассмотренных примерах лежат в следующих пределах: $2 \leq \alpha \leq 10$; $3,5 \leq \beta \leq 8$; $10^{-5} \leq A, B \leq 10$.

Пользуясь возможностью, выражаем признательность А. Г. Щучинскому, который предложил нам для вычисления дзета-функции Римана использовать формулу Эйлера—Маклорена.

ЛИТЕРАТУРА

1. Заргано Г. Ф., Лерер А. М., Ляпин В. П., Михалевский В. С., Сиявский Г. П. Волноводы сложных сечений. — Ростов-на-Дону: РГУ, 1979, 80 С.
2. Ляпин В. П., Сиявский Г. П. — Радиотехника и электроника, 1980, 25, № 1, с. 190.

3. Лерер А. М., Ляпин В. П., Синявский Г. П. — Изв. вузов — Радиофизика, 1982, 25, № 8, с. 932.
4. Льюк Ю. Специальные математические функции и их аппроксимации. — М.: Мир, 1980, 608 С.
5. Крылов В. И., Бобков В. В., Монастырный П. И. Вычислительные методы — М.: Наука, 1976, т. 1, 304 С.
6. Веселов Г. И., Платонов Н. И., Слесарев Е. С. — Радиотехника, 1980, 35, № 5, с. 27.
7. Кириленко А. А., Сенкевич С. Л. — Радиотехника и электроника, 1979, 24, № 7, с. 1301.

Ростовский-на-Дону государственный университет

Поступила в редакцию
29 марта 1983 г.

ON CONVERGENCY OF PARTIAL REGION METHOD WHEN CALCULATING STEP-LIKE INHOMOGENEITIES IN RECTANGULAR WAVEGUIDES

V. P. Lyapin, M. B. Manuilov, G. P. Sinyavskij

A calculation algorithm is given for the matrix elements of algebraic systems being obtained when solving problems of diffraction by step-like inhomogeneities in rectangular waveguides. The algorithm increases essentially the calculation accuracy. It is shown that approximate solutions have exponential convergency when calculating fields in the problem on infinitely thin diaphragm and the power one in the problem on waveguide joint.

Межвузовский сборник

ОБРАБОТКА ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННЫХ СИГНАЛОВ

(Окончание)

Е. П. Енина. Об асимптотическом поведении апостериорного распределения параметров двумерного пространственного сигнала.

Г. М. Марголин, Ф. Ф. Золотухин, Б. В. Устинов. Синтез диаграммообразующей схемы для РЛС и ФАР на основе преобразования УОЛША.

В. И. Костылев, В. М. Петров. Использование непериодического импульсного сигнала в радиолокационной станции с синтезированной апертурой.

С. И. Шаратов. Безусловные характеристики оценки местоположения цели в зоне Френеля.

С. В. Субботин. Применение метода комплексных огибающих в матричной форме для цифрового моделирования многоканальных радиотехнических устройств.

Прием и обработка временных сигналов

М. Б. Волков, С. Л. Моругин. Алгоритм преобразования узкополосных сигналов в нелинейных устройствах.

И. Г. Прокопенко, Р. Б. Синицин. Оптимальный ранговый обнаружитель радиолокационных сигналов.

В. А. Шапцев. Регрессионные модели характеристики реальной помехоустойчивости каналов приема дискретной информации.

А. К. Сенаторов. Анализ эффективности обработки сигналов в частотной области.

В. П. Трифонов. Квазиоптимальные линейные фильтры для оценки времени запаздывания импульсных сигналов.

В. И. Чижов. Выходные аналоги радиовысотометров с локальной обработкой сигнала в режиме снятия профиля поверхности.

В. П. Пашкевич, В. В. Сеппенен. Разрешение по временному положению радиолокационных сигналов с фазокодовой манипуляцией

Заказы на сборник следует направлять по адресу:
394000, Воронеж, пр. Революции, 33,
магазин «Книга — почтой».