ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XXVII, № 2 *РАДИОФИЗИКА* *1984*

УДК 621 382.3

НЕЛИНЕЙНАЯ ТЕОРИЯ ПРОДОЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ В ТОКОВОЙ ПЛАЗМЕ ПОЛУПРОВОДНИКА СО СВЕРХРЕШЕТКОЙ

А. П. Тетервов

Исследуются нелинейные продольные колебания плазмы полупроводника со сверхрешеткой в малой окрестности штарковских резонансов с произвольным номером Показано, что поведение амплитуды электрического поля носит зонный характер и определяется начальным ее значением, а также номером резонанса

1. Неквадратичность закона дисперсии электронов в полупроводнике со сверхрешеткой (СР) приводит к существенной нелинейности тока проводимости, проявляющейся уже в сравнительно слабых электрических полях. При одновременном воздействии на СР переменного с частотой ω и постоянного E_0 электрических полей высокочастотный ток проводимости ведет себя резонансным образом [1–3]. Следствием непараболичности энергетического спектра СР является возможность резонанса на кратных частотах: $n\omega=\Omega$, где $\Omega=eE_0d$ (d — период СР, $\hbar=1$), а n — целое число. Для проявления нелинейных резонансов с $n>1$ амплитуда поля волны должна быть не слишком малой, так что ток проводимости принципиально нелинеен.

Из линейной теории штарковского резонанса с $n=1$ [4] известно, что при $\Omega \gtrsim \omega$ волна неустойчива. Ясно, что и в малой окрестности нелинейного резонанса $\Omega \gtrsim n\omega$ соответствующее резонансное слагаемое в выражении для тока проводимости будет определять отрицательное поглощение, т. е. усиление волны. Однако вклад в суммарное поглощение дает также большое количество нерезонансных слагаемых. Конечное их число с $n<n_0$, где n_0 — номер нелинейного резонанса, описывает отрицательное поглощение, а слагаемые с $n>n_0$ (в принципе, бесконечное число) — положительное. Стационарное состояние поля волны, как очевидно, устанавливается в результате конкуренции между этими двумя группами слагаемых.

В данной работе для случая малой расстройки штарковского резонанса с произвольным номером проведен последовательный учет резонансных и нерезонансных слагаемых в выражении для тока проводимости. Полученные результаты используются для нахождения условий раскачки продольных колебаний и определения стационарных значений амплитуды поля.

2. Предполагается, что электроны имеются только в нижней минизоне и электрические поля не вызывают переходов в верхние минизоны. Рассматриваются однородные колебания электрического поля.

Полагая, что постоянное E_0 и переменное E электрические поля направлены вдоль оси СР, в качестве исходного используем следующее нелинейное уравнение:

$$(1/4\pi)(\partial/\partial t)[\varkappa(\hat{\omega})E]+j=I. \qquad (1)$$

Здесь $\varkappa(\hat{\omega})$ — линейный оператор, определяющий слабую частотную дисперсию среды, $\hat{\omega}=\omega_0+i\partial/\partial t$ (ω_0 — частота колебаний в линейном приближении), $j = j(E, E_0)$ — нелинейный функционал полей, описывающий ток проводимости, I — ток во внешней цепи.

Для решения нелинейного уравнения (1) сделаем основное допущение о слабой нелинейности. Подробно физические условия, соответствующие этой предпосылке, обсуждались в [5]. В частности, было показано, что оно справедливо при достаточно малой концентрации электронов, так что ток проводимости в целом мал (хотя амплитуда поля может принимать произвольные значения) и трактуется как возмущение.

В таком случае нулевое решение уравнения (1) определяет продольные колебания, частота которых задается дисперсионным соотношением

$$\varkappa(\omega_0) \equiv \varkappa_0 - \omega_1^2/(\omega_0^2 - \omega_2^2) = 0. \tag{2}$$

Здесь $\varkappa_0$ — диэлектрическая постоянная решетки, которая рассматривается как набор осцилляторов с силой ω_1^2 и собственной частотой ω_2.

Влияние тока проводимости учитывается в следующем приближении, вызывая медленное изменение констант, характеризующих нулевое решение. Действуя в духе техники Боголюбова—Крылова, решение нелинейного уравнения (1) следует искать в виде

$$E(t) = (1/2)\,\{u(t)\exp[-i(\omega_0 t + \varphi(t))] + \text{к. с.}\} + w(t), \tag{3}$$

где u и φ — медленно меняющиеся во времени амплитуда и фаза основной гармоники, функция $w(t)$ определяет высшие гармоники. Выражение для тока проводимости было получено в [1, 2, 6] в результате решения кинетического уравнения в ν-приближении (частота релаксации $\nu = \text{const}$):

$$j(t) = j_0 \int\limits_0^\infty d\xi e^{-\xi} \sin\{a[\sin\omega t - \sin\omega(t - \xi/\nu)] + \xi\Omega/\nu\}, \tag{4}$$

где $a = edu/\omega$, $j_0 = \sigma_0\nu/ed$, σ_0 — линейная статическая проводимость вдоль оси СР [7]. Разлагая плотность тока (4) в ряд Фурье и подставляя полученные выражения совместно с (3) в исходное нелинейное уравнение, можно стандартными методами получить систему нелинейных уравнений для безразмерной амплитуды $a(\omega = \omega_0)$ и фазы основной гармоники*:

$$a_\tau = -R(a); \tag{5а}$$

$$a\varphi_\tau = Q(a). \tag{5б}$$

Здесь нижний индекс у переменных означает дифференцирование по безразмерному времени $\tau = (\omega_{pe}/\omega_0)^2[d\varkappa(\omega)/d\omega]^{-1}|_{\omega_0} t$, $\omega_{pe} = (4\pi\sigma_0\nu)^{1/2}$ — плазменная частота электрона в СР. $R(a)$ и $Q(a)$ — нормированные на j_0 вещественная (диссипативная) и мнимая части основной гармоники высокочастотного тока:

$$R(a) + iQ(a) = \frac{\gamma}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(a) J_{n-1}(a)\,[(n - s + i\gamma)^{-1} + (n + s + i\gamma)^{-1}], \tag{6}$$

где $s = \Omega/\omega_0$, $\gamma = \nu/\omega_0$, $J_n(a)$ — функция Бесселя n-го порядка.

* Заметим, что при выводе этих уравнений слагаемое в разложении (4), описывающее постоянную составляющую тока проводимости, и правая часть уравнения (1) взаимно сокращаются.

3. Для нахождения решения уравнений (5), учитывающего как резонансные, так и нерезонансные слагаемые, выражение (6) малоудобно. Введем функцию

$$\Phi(a,\ \Gamma) = \Phi' + i\Phi'' = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n^2(a)/(n-\Gamma), \quad \Gamma = s - i\gamma, \tag{7}$$

через которую после несложных преобразований выражаются величины $R(a)$ и $Q(a)$:

$$R(a) = \gamma a^{-1}[1 + s\Phi' + \gamma\Phi'']; \tag{8}$$

$$Q(a) = (\gamma/2)(d\Phi''/da). \tag{9}$$

Удобство введения функции $\Phi(a,\ \Gamma)$ состоит в том, что после ряда преобразований, использующих свойства функций Бесселя [8] и то обстоятельство, что $\Gamma'' < 0$, она может быть представлена в виде сходящегося интеграла:

$$\Phi(a,\ \Gamma) = -i\int_0^\infty dx \exp(-i\Gamma x) J_0\left(2a\sin\frac{x}{2}\right). \tag{10}$$

Используя периодичность функции $J_0(2a\sin(x/2))$, выражению (10) можно придать следующий вид:

$$\begin{aligned}\Phi(a,\ \Gamma) &= -i\,[1 - i\,\mathrm{ctg}(\pi\Gamma)]\int_0^\pi dx \exp(-2i\Gamma x) J_0(2a\sin x) = \\ &= -i\pi\,[1 - i\,\mathrm{ctg}(\pi\Gamma)]\,F(a,\ \Gamma),\end{aligned} \tag{11}$$

где $F(a,\ \Gamma) = \exp(-i\pi\Gamma) J_\Gamma(a) J_{-\Gamma}(a)$.

При произвольных соотношениях между частотами Ω, ν и ω_0 полученное выражение содержит в себе все-таки мало информации, так как определяется через функции Бесселя с комплексными индексами. Однако для случая высокочастотных колебаний ($\gamma \ll 1$), распространяющихся в малой окрестности n-го штарковского резонанса, можно записать $\Gamma = n + (\delta - i\gamma)$, где $\delta = (\Omega - n\omega_0)/\omega_0 < 1$ — малая расстройка резонанса, и разложить функцию $F(a,\ \Gamma)$ в ряд Тейлора:

$$F(a,\ \Gamma) = F(a,\ n) + (\delta - i\gamma)\,\partial F(a,\ \Gamma)/\partial\Gamma\,|_{\Gamma=n} + \ldots \tag{12}$$

Используя формулы дифференцирования функций Бесселя по индексу [8] и ограничиваясь двумя первыми слагаемыми в (12) (вычисления показывают, что следующие члены разложения малы по сравнению со вторым в меру малости величины $(\delta - i\gamma)$), ответ можно представить в виде

$$F(a,\ \Gamma) \approx J_n(a)\{[J_n(a) + \delta\beta_n(a)] - i\,[\pi\delta J_n(a) + \gamma\beta_n(a)]\}, \tag{13}$$

где

$$\beta_n(a) = n!\sum_{k=0}^{n-1}(a/2)^{k-n} J_k(a)/k!(n-k).$$

Подставляя это выражение в (11), а затем в (8), (9), получаем

$$R(a) \approx \gamma a^{-1}\{[1 - J_n^2(a) - n\beta_n(a)J_n(a)] - n\delta J_n^2(a)/(\delta^2 + \gamma^2)\}; \tag{14}$$

$$Q(a) \approx -(\gamma^2/2)(d/da)\,[\pi(\delta/\gamma)\,J_n(a)\beta_n(a) + J_n^2(a)/(\delta^2 + \gamma^2)]. \tag{15}$$

Обращаясь непосредственно к выражению (6), можно показать, что вклад в ток проводимости резонансных членов описывается последними слагаемыми в (14), (15). В этой связи заметим, что в работе [5] при исследовании распространения нелинейных электромагнитных волн в выражении (6) удерживались только резонансные слагаемые, так как расстройка резонанса полагалась очень малой: $|\delta| \ll \gamma$. При этом, очевидно, $|R(a)| \ll 1$, и затуханием нелинейной волны можно было пренебречь по сравнению с изменением амплитуды волны за счет свойств диспергирующей среды [5]. Тем не менее, при $|\delta| \ll \gamma$ даже с учетом нерезонансных слагаемых в (14), можно показать, что это предположение оправдано, так как в широком интервале значений a по-прежнему выполняется условие $|R(a)| \ll 1$. Так, при $a \ll 1$ имеем $R(a) \lesssim \gamma a/4$, при $a > 1$ $|R(a)| < \gamma/a$. С величиной же $Q(a)$ дело обстоит несколько иначе. Как легко видеть из (15), при $|\delta| \ll \gamma$ резонансные слагаемые доминируют при $a \ll 1$, если выполняется условие

$$a > \begin{cases} 2\,[\pi|\delta|\gamma(n-1)!(n-2)!]^{1/2(n-1)}, & n > 1 \\ 2\pi|\delta|\gamma, & n = 1 \end{cases}. \tag{16a}$$

При $a > 1$ соответствующее условие принимает вид

$$a > 2\pi n|\delta|\gamma \tag{16б}$$

и заведомо выполняется.

4. Перейдем к решению уравнений (5). Как видно из (14), для изменения знака $R(a)$, что приводит к нарастанию амплитуды, необходимо выполнение условия $\delta \gtrsim \gamma > 0$. Пусть в начальный момент времени $a = a_0$. Тогда, как показано, в частности, в работе [9], если $R(a_0) < 0$, то амплитуда будет возрастать со временем до тех пор, пока $R(a)$ не обратится в нуль, т. е. пока a не станет равным a_i — ближайшему, бо́льшему a_0 корню уравнения $R(a) = 0$. Если же $R(a_0) > 0$, то a будет убывать, стремясь к a_k — ближайшему, меньшему a_0 корню того же уравнения. Таким образом, a_i и a_k — стационарные значения амплитуды колебаний при генерации и затухании соответственно. Заметим, что при этом стационарные значения фазы задаются выражением

$$\varphi(\tau) = (Q(a_{i,k})/a_{i,k})\tau + \varphi_0. \tag{17}$$

В рассматриваемом случае определение стационарных значений амплитуды сводится к нахождению корней уравнения

$$J_n^2(a) + \delta\beta_n(a) J_n(a) - \delta/n = 0. \tag{18}$$

Поскольку (как видно из определения и что весьма существенно) функция $\beta_n(a)$ не содержит $J_n(a)$, то уравнение (18) является квадратным относительно функции Бесселя с индексом, равным номеру резонанса, и имеет корни

$$\alpha_1(a) = -(\delta/2)\beta_n(a)\{[1 + 4/n\delta\beta_n^2(a)]^{1/2} + 1\} < 0; \tag{19}$$

$$\alpha_2(a) = (\delta/2)\beta_n(a)\{[1 + 4/n\delta\beta_n^2(a)]^{1/2} - 1\} > 0. \tag{20}$$

Таким образом, стационарные значения амплитуды волны определяются точками пересечения кривых $J_n(a)$, $\alpha_1(a)$ и $\alpha_2(a)$. Так как при $0 < a < \lambda_1^{(n)}$, где $\lambda_1^{(n)}$ — первый корень функции Бесселя n-го порядка, последняя положительна, то пересечению кривых $J_n(a)$ и $\alpha_1(a)$ соответствуют значения $a > \lambda_1^{(n)} > 1$. При этом $\beta_n(a) \sim (2n/a) J_n(a)$, и вторым слагаемым в (18) можно пренебречь. Тогда стационарные значения a_i^* определяются уравнением

$$J_n(a_i^*) = -(\delta/n)^{1/2}. \tag{21}$$

Стационарные значения амплитуды a_i^{**}, соответствующие пересечению кривых $J_n(a)$ и $\alpha_2(a)$, можно найти, воспользовавшись тем, что при $a \ll 1$ $\beta_n(a) J_n(a) \approx J_0(a)/n$. Подставляя это выражение в (18) и разлагая функции Бесселя в ряд, можно найти

$$a_1^{**} = 0, \quad a_2^{**} = 2\,[\delta n!\,(n-1)!]^{1/2(n-1)}, \quad n > 1. \tag{22}$$

(При $n = 1$ непосредственно из (20) следует $a_2^{**} \approx \delta^{1/2}$.) Как видно, с ростом n значение a_2^{**} возрастает и приближение $a \ll 1$ становится неприменимым. В таком случае удобнее для нахождения этой величины пользоваться графическим методом.

При больших значениях a, как легко видеть, стационарные значения a_k^{**} $(k > 2)$ определяются уравнением

$$J_n(a_k^{**}) = (\delta/n)^{1/2}. \tag{23}$$

В соответствии со сказанным в начале раздела, поведение амплитуды можно представить себе следующим образом (см. рис. 1*). Если $0 < a_0 < a_2^{**}$, то колебание затухает; при $a_2^{**} < a_0 < a_3^{**}$ его амплитуда нарастает, асимптотически стремясь к значению, равному a_3^{**}. В интервале значений $a_3^{**} < a_0 < a_1^*$ колебание снова затухает и амплитуда его в стационарном состоянии равна a_3^{**}. При $a_1^* < a_0 < a_2^*$ амплитуда стремится к значению a_2^* и т. д. Таким образом, раскачка продольного колебания происходит в режиме «жесткого» возбуждения с критическими значениями амплитуды, равными a_2^{**}, a_1^* и т. д.

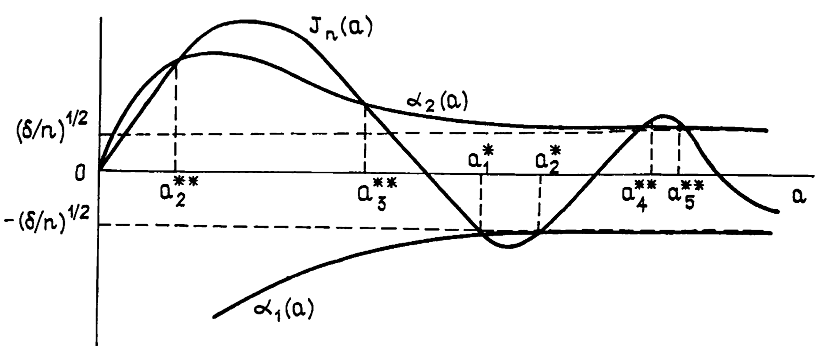

Рис. 1.

Однако, как известно, при больших значениях своего аргумента функция Бесселя убывает, как $a^{-1/2}$. Это означает, что при достаточно больших значениях амплитуды точки пересечения кривых $J_n(a)$, $\alpha_1(a)$ и $\alpha_2(a)$ будут отсутствовать и колебание станет затухающим. Характер затухания можно определить с помощью выражения (10). Так, при $a \gg 1$, когда функция $J_0(2a\sin(x/2))$ на интервале $[0; 2\pi]$ совершает много осцилляций и в интеграле (10) основной вклад дают значения $x \ll 1$, тогда

* На рисунке не изображены слабые осцилляции функций $\alpha_{1,2}(a)$ при немалых значениях a, несущественные, однако, для качественного анализа.

$$\Phi(a,\ \Gamma) \approx -i\int_0^\infty dx e^{-i\Gamma x} J_0(ax) = -i\begin{cases}(a^2-\Gamma^2)^{-1/2}, & 0<|\Gamma|<a\\ i(\Gamma^2-a^2)^{-1/2}, & 0<a<|\Gamma|\end{cases}. \quad (24)$$

При этом

$$R(a) \approx \gamma a^{-1}\begin{cases}[1-\gamma a^{-1}(1+3s^2/a^2)], & s^2<a^2\\ (2+a^2/2s^2), & s^2>a^2\end{cases} \quad (25)$$

и из (5а) следует

$$(1/2)(a^2-a_0^2)+\gamma(a-a_0)+3\gamma s^2\ln(a/a_0) = -\gamma\tau, \quad s^2<a_0^2; \quad (26а)$$

$$a^2+4s^2 = (a_0^2+4s^2)\exp(-\gamma\tau/s^2), \quad s^2>a_0^2. \quad (26б)$$

Из последнего выражения видно, что в случае штарковского резонанса с высоким номером продольное колебание за время порядка $\tau_0 \approx \approx a_0^2/4\gamma s^2$ полностью затухнет.

Таким образом, можно заключить, что раскачка продольных колебаний в токовой плазме полупроводника со СР носит зонный характер и определяется начальными значениями амплитуды, а также номером резонанса.

В предыдущем изложении не учитывалось собственное затухание продольных возбуждений в диэлектрике — формула (2) не содержит мнимой части диэлектрической проницаемости. Однако, как можно показать, учет его приводит к появлению в правой части выражения (5а) дополнительного слагаемого, пропорционального амплитуде: $\Delta R(a) = = -\gamma_0 a$, где $\gamma_0 = \nu_0/\omega_0$, а ν_0 — характерная частота затухания в диэлектрике. Тогда последнее слагаемое в (18) примет вид $(\delta/n) \times \times (1+a^2\gamma_0/\gamma)$, т. е. все будет определяться величиной $\gamma_0 a^2/\gamma$.

Если $\gamma_0 \ll \gamma$, то учет собственного затухания продольных возбуждений в диэлектрике скажется только при очень больших значениях a, когда амплитуда и так затухает.

В противоположном предельном случае, при достаточно больших значениях отношения γ_0/γ, кривые $J_n(a)$, $\alpha_1(a)$ и $\alpha_2(a)$ иных, кроме $a=0$ и a_2^{**}, точек пересечения иметь не будут, т. е. собственное затухание продольных возбуждений подавляет указанную неустойчивость.

Разумеется, полученные результаты применимы и к случаю нелинейных электромагнитных волн с соответствующим переопределением левых частей уравнений (5).

5. В заключение приведем ряд численных оценок. Исходное предположение о малости тока проводимости в сравнении с током смещения, как можно показать, соответствует неравенству

$$\varkappa_0 \gg \frac{4\pi\sigma_0\nu}{\omega_0^2}\frac{|Q-iR|}{a} \approx \frac{4\pi e^2Nd^2\varepsilon_0}{\omega_0^2}\frac{|Q-iR|}{a}, \quad (27)$$

где N — концентрация электронов в первой минизоне проводимости с шириной ε_0. При малых значениях амплитуды в разложении величин $R(a)$ и $Q(a)$ достаточно удержать только линейные по a слагаемые, тогда условие (27) запишется

$$\varepsilon_0 \ll \varkappa_0 E_0^2/\pi N. \quad (28)$$

При $a>1$ неравенство (27) преобразуется к виду $\varepsilon_0 \ll \varkappa_0 E_0^2 a^2/4Nn^2$ и заведомо выполняется.

Величина электрического поля E_0 ограничена неравенством

$$E_0 \ll \varepsilon_0/ed, \quad (29)$$

соответствующим квазиклассическому приближению, в рамках которого вычислялся высокочастотный ток проводимости.

Для характерных параметров СР $\varkappa_0 \sim 10$, $d = 2 \cdot 10^{-6}$ *см*, $\varepsilon_0 = 5 \cdot 10^{-2}$ *эВ*, $\nu \approx 10^{11}$ c^{-1} условие (29) выполняется при $E_0 \lesssim 3$ *кВ/см*, что соответствует $\Omega \approx 10^{13}$ c^{-1}, а неравенство (28) для концентрации электронов $N \lesssim 10^{15}$ $см^{-3}$.

В заключение автор выражает признательность Ф. Г. Бассу и А. Ю. Матулису за внимание к работе и обсуждение результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1 Романов Ю А — Опт и спектр, 1972, **33**, вып 5, с 917.
2 Павлович В В, Эпштейн Э. М — ФТП, 1976, **10**, № 10, с. 2001
3 Романов Ю А, Бовин В П., Орлов Л. К. — ФТП, 1978, **12**, № 8, с 1665
4 Ктиторов С. А, Симин Т. С., Синдаловский В Я. — ФТТ, 1971, **13**, № 10, с. 2230.
5 Басс Ф Г, Лыках В. А, Тетервов А. П. — ФТП, 1982, **16**, № 5, с. 865
6 Басс Ф Г. — В сб.: Материалы I Всесоюзной школы-семинара. Неравновесные квазичастицы в твердых телах — Тбилиси: Гос ун-т, 1979, с. 102.
7. Шик А Я. — ФТП, 1974, **8**, № 10, с. 1841
8 Справочник по специальным функциям /Под ред. М Абрамовица и И Стиган.— М.. Наука, 1979
9. Басс Ф. Г, Тетервов А. П. — Укр. физ. журн, 1979, **24**, № 6, с. 829.

Институт физики полупроводников
АН ЛитССР

Поступила в редакцию
20 декабря 1982 г.,
в окончательном варианте
30 мая 1983 г.

NONLINEAR THEORY OF LONGITUDINAL OSCILLATIONS IN THE CURRENT PLASMA OF SEMICONDUCTOR WITH A SUPERLATTICE

A. P. Tetervov

The nonlinear longitudinal oscillations in plasma of semiconductor with a superlattice in the small region near Stark resonance of an arbitrary number are considered The behaviour of the electrical field amplitude is of a band character and depends on both its initial value and resonance number.