

УДК 621.396 677

## СИНТЕЗ НУЛЕЙ В ДИАГРАММЕ НАПРАВЛЕННОСТИ ЛИНЕЙНОЙ РЕШЕТКИ

Я. В. Василькив, А. М. Ковальчук, П. А. Савенко

Рассматриваются три способа формирования нулей (глубоких провалов) в диаграмме направленности линейной эквидистантной решетки. Два первых подхода обеспечивают минимальные затраты машинного времени при решении задачи на ЭВМ. Последний подход может применяться при фазовом и амплитудно-фазовом синтезе сканирующей решетки с одновременным формированием нуля в заданном направлении.

В адаптивных ФАР часто возникает необходимость формирования нуля (глубокого провала) в диаграмме направленности (ДН) по заданному направлению, причем одним из важных требований к численному решению задач этого класса может быть ограничение на время их решения. Ниже предлагается несколько алгоритмов, удовлетворяющих этому условию. При этом предполагается, что для решетки справедлива теорема перемножения диаграмм направленности [1].

1. Известно, что ДН линейной эквидистантной решетки из  $N$  излучателей, создаваемая некоторым распределением токов  $I_n, n = \overline{1, N}$ , описывается формулой

$$F(\xi) = \sum_{n=1}^N I_n e^{i c l_n \xi}, \quad (1)$$

где  $\xi = \sin \theta$  — обобщенная угловая координата,

$$l_n = \begin{cases} n - (M + 1) & \text{при } N = 2M + 1 \\ n - (M + 1/2) & \text{при } N = 2M \end{cases}, \quad (2)$$

$M$  — количество излучателей на полуоси,  $c = kd$ ,  $d$  — расстояние между излучателями,  $k = 2\pi/\lambda$  — волновое число в вакууме.

Пусть  $\theta = \theta_0$  — угловое направление, в котором требуется создать нуль. Задачу синтеза нуля в ДН по направлению  $\xi^* = \sin \theta_0$  сформулируем следующим образом: требуется найти такое амплитудно-фазовое распределение токов в решетке  $I_n^*, n = \overline{1, N}$ , чтобы создаваемая им ДН  $f(\xi) = \sum_{n=1}^N I_n^* \exp(i c l_n \xi)$  как можно меньше отличалась от исходной  $F(\xi)$  и в направлении  $\xi^* = \sin \theta_0$  равнялась нулю, т. е.  $|f(\xi)|_{\xi=\xi^*} = 0$ . Последнее равенство во многих практических применениях может быть заменено неравенством  $|f(\xi^*)| \leq \epsilon$ , где  $\epsilon$  — малое наперед заданное число.

Отметим, что для функции  $f(\xi)$  справедливо равенство [2]

$$f(\xi + 2\pi m c^{-1}) = e^{i m \delta \pi} f(\xi), \quad (3)$$

в котором  $m$  — произвольное натуральное число,  $\delta = 1$ , если  $N$  — четное, и  $\delta = 0$ , если  $N$  — нечетное число. Учитывая (3), в качестве оцен-

ки близости синтезируемой  $f(\xi)$  и заданной  $F(\xi)$  диаграмм будем использовать их среднеквадратичное отклонение на интервале  $[0, 2\pi c^{-1}]$ :

$$\sigma = \int_0^{2\pi/c} |F(\xi) - f(\xi)|^2 d\xi. \quad (4)$$

Выберем на интервале  $[0, 2\pi c^{-1}]$   $L$  точек разбиения,  $\xi_l = l\Delta$ ,  $l = \overline{0, L-1}$ , и предположим вначале, что направление формируемого нуля совпадает с одной из точек разбиения, например с  $\xi_0$ . Взяв это разбиение за узлы интерполяции, построим интерполяционную формулу Котельникова [2]:

$$F^*(\xi) = \frac{1}{L} \sum_{l=0}^{L-1} F(\xi_l) \frac{\sin(Lc/2)(\xi - \xi_l)}{\sin(c/2)(\xi - \xi_l)}, \quad (5)$$

где  $F(\xi_l)$  — значение функции в узлах интерполяции, вычисленное по формуле (1) с использованием первоначального распределения токов  $I_n$ ,  $n = \overline{1, N}$ . В точке  $\xi_0$  положим  $F(\xi_0) = F(l\Delta)|_{l=0} = 0$ . При этом значение функции  $F^*(\xi)$  в узлах интерполяции будет равно

$$F^*(l\Delta) = \begin{cases} F(l\Delta), & l \neq 0 \\ 0, & l = 0 \end{cases}. \quad (6)$$

Искомые токи будем определять из условия минимума функционала (4), т. е. как коэффициенты Фурье функции  $F^*(\xi)$ :

$$I_n^* = \frac{c}{2\pi} \int_0^{2\pi/c} F^*(\xi) e^{-icln\xi} d\xi, \quad n = \overline{1, N}. \quad (7)$$

Функция  $F^*(\xi)$  принадлежит к классу  $B_a$  [2] и будет реализуемой ДН тогда, когда число точек интерполяции равно количеству излучателей в решетке, т. е.  $L = N$ . В этом случае  $\sigma(I_1^*, \dots, I_N^*) = 0$ . Таким образом, токи  $I_n^*$  определяют диаграмму направленности  $f(\xi)$ , полностью совпадающую с функцией  $F^*(\xi)$ . Но поскольку точка  $\xi_0 = 0$  является узлом интерполяции, то в этой точке, согласно (6),  $F^*(\xi_0) = 0$ , а следовательно, и  $|f(\xi_0)| = 0$ . Исходя из вышесказанного, точность аппроксимации исходной ДН  $F(\xi)$  будет определяться точностью интерполяционной формулы (5).

Формула (7) принимает весьма простой вид, если вместо  $F^*(\xi)$  подставить выражение (5) и провести соответствующие преобразования.

В результате получим

$$I_n^* = \frac{1}{L} \sum_{\nu=0}^{L-1} F^*(\xi_\nu) e^{-icln(\xi_0 + \nu\Delta)}, \quad n = \overline{1, N}, \quad (8)$$

т. е. формирование нуля в ДН по направлению  $\xi_0 = 0$  сводится к вычислению простых сумм (8), что требует весьма небольших затрат машинного времени.

Для формирования нуля в произвольном направлении  $\xi^*$  достаточно в формуле (8) положить  $\xi_\nu = \xi^* + \nu\Delta$ . Действительно, так как ДН решетки удовлетворяет условию (3), то точки разбиения  $\xi_l$  можно выбрать на любом из интервалов длины  $2\pi/c$ . В частности, мы вправе выбрать их следующим образом:

$$\xi_l = \xi^* + l\Delta, \quad l = \overline{0, L-1}, \quad (9)$$

где  $\xi^* = \sin \theta_0$ . Такой выбор узлов интерполяции обеспечивает нам формирование нуля в произвольном направлении  $\theta_0$ .

В случае, когда  $L \neq N$ , распределение токов  $I_n^*$ ,  $n = \overline{1, N}$ , определяемое по формуле (8), обеспечивает минимум функционалу (4), но при этом  $\sigma(I_1^*, \dots, I_N^*) \neq 0$ . В результате  $f(\xi^*)$  может быть отличной от нуля и не удовлетворять неравенству  $|f(\xi^*)| \leq \varepsilon$ . Для обеспечения провала в ДН требуемой глубины необходимо с использованием формулы (8) построить итерационный процесс

$$I_n^* = \frac{1}{L} \sum_{\nu=0}^{L-1} F^{*(m-1)}(\nu\Delta) e^{-icl_n(\xi^* + \nu\Delta)}, \quad n = \overline{1, N}, \quad (10)$$

где

$$F^{*(m-1)}(\nu\Delta) = \begin{cases} 0, & \nu = 0 \\ \sum_{n=1}^N I_n^{*(m-1)} e^{icl_n(\xi^* + \nu\Delta)}, & \nu \neq 0 \end{cases} \quad (11)$$

Вышеизложенный подход может быть использован также для формирования нуля только за счет изменения фазового распределения токов при неизменном амплитудном. Для этого итерационный процесс, подобно (10), (11), строится по формуле

$$\varphi_n^{(m)} = \arg \sum_{\nu=0}^{L-1} F^{*(m-1)}(\nu\Delta) e^{-icl_n(\xi^* + \nu\Delta)}, \quad n = \overline{1, N}; \quad (12)$$

$$F^{*(m-1)}(\nu\Delta) = \begin{cases} 0, & \nu = 0 \\ \sum_{n=1}^N |I_n| e^{i\varphi_n^{(m-1)}} e^{icl_n(\xi^* + \nu\Delta)}, & \nu \neq 0 \end{cases} \quad (13)$$

где  $\varphi_n = \arg I_n$ .

Итерационный процесс (12), (13) легко обобщается и на дискретный фазовый синтез. В этом случае искомые фазы должны быть кратными некоторой постоянной величине  $\Delta_1$ , т. е.  $\varphi_n = \beta_n \Delta_1$ , где  $\Delta_1$  — дискрет фазирования. При этом формула (13) преобразуется к виду

$$\beta_n^{(m)} = \text{entier} \left\{ \frac{1}{\Delta_1} \arg \left[ \sum_{\nu=0}^{L-1} F^{*(m-1)}(\nu\Delta) e^{-icl_n(\xi^* + \nu\Delta)} \right] + 0,5 \right\}, \quad n = \overline{1, N}. \quad (14)$$

Так как при дискретном фазировании  $\beta_n$  может принимать лишь конечное число значений, то требуемая глубина провала в ДН может быть не всегда достигнута или возможно смещение провала от заданного направления. Улучшение положения может быть достигнуто лишь за счет уменьшения дискрета фазирования или увеличения количества излучателей в решетке.

Рассмотрим некоторые численные результаты. На рис. 1 приведены примеры формирования нуля в ДН решетки из 11 излучателей в направлении 20 и 24° за счет амплитудно-фазового (а) и фазового (б) изменений токов. Сплошной линией показана амплитуда исходной ДН, а пунктирной — синтезированной ДН со сформированным провалом глубиной — 100 дБ. Из рисунка видно, что изложенный подход обеспечивает формирование провала в ДН по заданному направлению

требуемой глубины. Замстим, что при амплитудно-фазовом синтезе главный лепесток ДН отклоняется от исходного меньше, чем при фазовом.

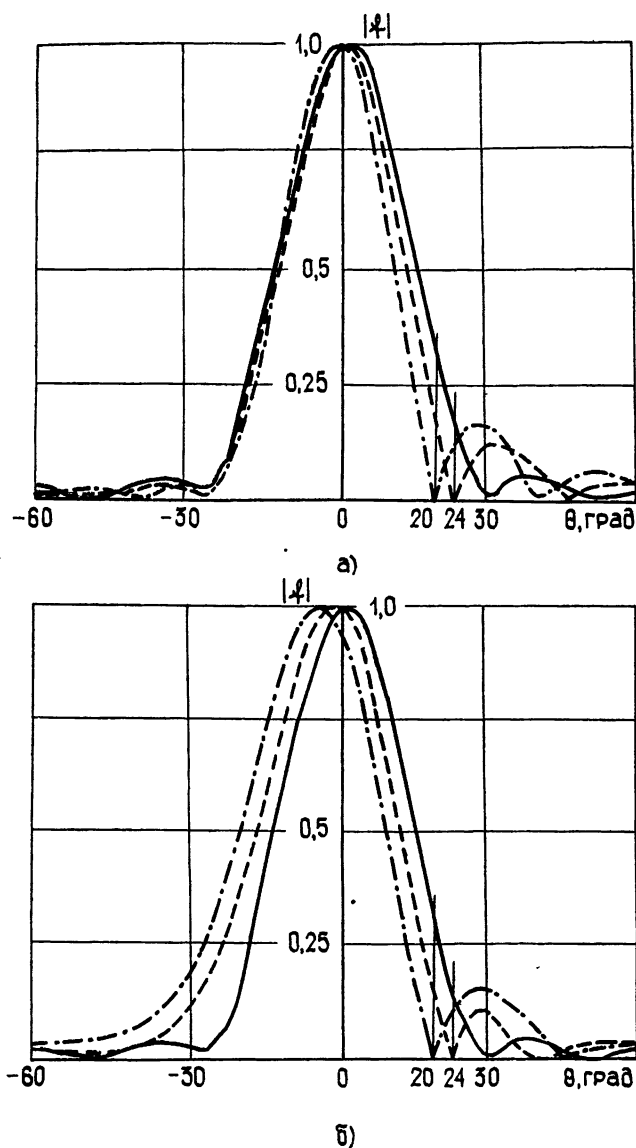


Рис. 1.

2. Рассмотрим второй способ формирования провала в заданном направлении. Как и раньше, ДН решетки будем рассматривать на интервале, длина которого равна ее периоду. Выберем на интервале  $[-\pi/c, \pi/c]$  некоторую равномерную сетку значений  $\xi_v$  с шагом  $\Delta = 2\pi/[c(N_0 - 1)]$ ,  $N_0$  — некоторое заданное натуральное число, и предположим, что направление формируемого провала совпадает с некоторой точкой разбиения  $\xi_0$ . В качестве оценки отклонения диаграмм будем рассматривать величину

$$\rho = \sum_{v=1}^{N_0} |F(\xi_v) - f(\xi_v)|^2, \quad (15)$$

в которой  $F(\xi)$  — ДН решетки, определяемая первоначальным амплитудно-фазовым распределением токов. Полагая  $|F(\xi_0)|=0$  и используя условие минимума величины  $\rho$ , т. е. полагая  $\partial\rho/\partial a_n^* = 0$  и  $\partial\rho/\partial b_n^* = 0$ , где  $I_n^* = a_n^* + ib_n^*$ ,  $n = \overline{1, N}$ , получаем систему линейных алгебраических уравнений порядка  $2N$  для определения величин  $a_n^*$  и  $b_n^*$ .

Матрица системы имеет блочный вид:

$$\left( \begin{array}{c|c} A & O \\ \hline -O & A \end{array} \right), \quad (16)$$

где через  $O$  обозначены нулевые блоки, а элементы блока  $A$  определяются по формуле

$$a_{ij} = \frac{\sin \frac{N_0 c \Delta}{2} (i - j)}{\sin \frac{c \Delta}{2} (i - j)} = \begin{cases} -1, & i+j - \text{четное число,} \\ N, & i=j, \\ 1, & i+j - \text{нечетное число.} \end{cases} \quad (17)$$

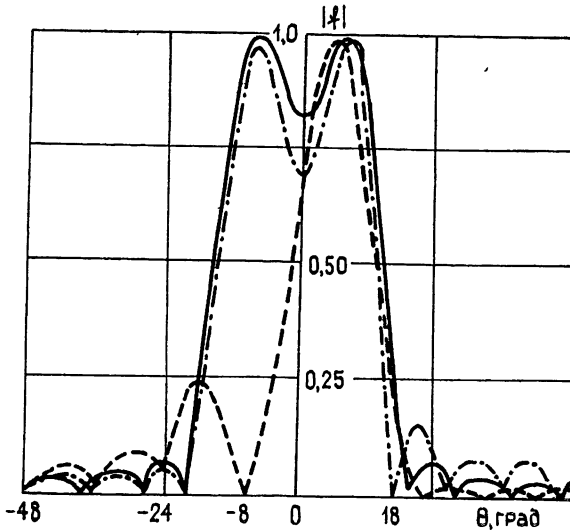


Рис. 2.

Правые части системы  $B_j$  имеют вид

$$B_j = \begin{cases} \operatorname{Re} \sum_{v=0}^{N_0-1} F(\xi_v) e^{ict_j \xi_v}, & j = \overline{1, N} \\ \operatorname{Im} \sum_{v=0}^{N_0-1} F(\xi_v) e^{ict_j - N \xi_v}, & j = \overline{N+1, 2N} \end{cases}. \quad (18)$$

Из формулы (17) следует, что элементы матрицы не зависят от направления формируемого провала. Поэтому обратная матрица может быть вычислена наперед и нахождение искомого распределения токов сводится к вычислению столбца правых частей по формуле (18) и умножению матрицы, обратной к матрице (16), на вычисленный столбец.

Пример формирования провала в ДН решетки из 17 излучателей в направлениях  $-8$  и  $18^\circ$  приведен на рис. 2, где сплошной ли-

нией показана исходная ДН, а пунктирной и штрихпунктирной — ДН со сформированным провалом.

3. Формирование провалов в ДН решетки можно осуществить, в частности, путем ввода в критерий оптимизации [3] специальной весовой функции  $p(\xi)$ , после чего задача решается с использованием функционала [4]

$$\sigma = \int_{-1}^1 [\tilde{F}(\xi) - |f(\xi)|]^2 p(\xi) d\xi + \left( \int_{-\pi/c}^{-1} + \int_1^{\pi/c} \right) |f(\xi)|^2 d\xi, \quad (19)$$

в котором первое слагаемое представляет собой взвешенное среднеквадратичное отклонение модулей синтезированной  $f(\xi)$  и заданной  $\tilde{F}(\xi)$ - диаграмм, а второе — ограничение на уровень боковых лепестков.

Вопросы минимизации этого функционала детально исследованы в работах [5-7]. Ниже мы будем акцентировать внимание лишь на формировании провалов в заданном направлении  $\xi_0 = \sin \theta_0$ .

Рассмотрим всюду функцию вида

$$p^*(\xi) = \begin{cases} L(j), & |\xi - \xi_0| \leq \varepsilon \\ p(\xi), & |\xi - \xi_0| > \varepsilon \text{ и } |\xi| \leq 1 \end{cases}, \quad (20)$$

где  $L(j)$  — некоторая неотрицательная, неубывающая функция от целого параметра  $j$ ,  $p(\xi)$  — некоторая кусочно-непрерывная функция, причем обе они ограничены,  $\varepsilon$  — некоторое наперед заданное малое число.

Диаграмму направленности  $\tilde{F}^*(\xi)$  определим следующим образом:

$$\tilde{F}^*(\xi) = \begin{cases} 0, & |\xi - \xi_0| \leq \varepsilon \\ \tilde{F}(\xi), & |\xi - \xi_0| > \varepsilon \text{ и } |\xi| \leq 1 \end{cases}. \quad (21)$$

Условие стационарности функционала (19) приводит к нелинейному интегральному уравнению относительно оптимальной ДН

$$f(\xi') = \int_{-1}^1 \{\tilde{F}^*(\xi) p^*(\xi) + [1 - p^*(\xi)] |f(\xi)|\} K(\xi', \xi, c) e^{i \arg f(\xi')} d\xi, \quad (22)$$

в котором  $K(\xi', \xi, c)$  определяется формулой

$$K(\xi', \xi, c) = \sin N \frac{c}{2} (\xi' - \xi) \left[ \sin \frac{c}{2} (\xi' - \xi) \right]^{-1}. \quad (23)$$

Решение уравнения (22) позволяет оптимальные токи в решетке находить по формуле

$$I_n^* = \frac{c}{2\pi} \int_{-1}^1 \{\tilde{F}^*(\xi) p^*(\xi) + [1 - p^*(\xi)] |f(\xi)|\} e^{i(-cn\xi + \arg f(\xi))} d\xi. \quad (24)$$

Уравнение (22) решается на ЭВМ методом последовательных приближений. При этом через несколько итераций функция  $L(j)$  может увеличиваться, т. е. увеличивается значение весовой функции только в интервале  $[\xi_0 - \varepsilon, \xi_0 + \varepsilon]$ . Численные эксперименты показали, что итерационный процесс сходится, если  $p^*(\xi) \leq 6$ .

Особый интерес представляет собой случай, когда в весовую функцию в качестве слагаемого вводится  $\delta$ -функция Дирака, т. е. если весовая функция имеет вид

$$q(\xi) = p^*(\xi) + \gamma \delta(\xi - \xi_0), \quad (25)$$

где  $p^*(\xi)$  определяется формулой (20), а  $\gamma$  — некоторая константа.

Выбор весовой функции в виде (25) эквивалентен следующему критерию оптимизации:

$$\bar{\sigma} = \sigma + \gamma |f(\xi)|_{\xi=\xi_0}^2, \quad (26)$$

где  $\sigma$  определяется формулой (19) для функции  $\tilde{F}^*(\xi)$  и  $p^*(\xi)$ .

Второе слагаемое в (26) увеличивает глубину провала в направлении  $\xi_0$ , причем его вклад регулируется изменением константы  $\gamma$ .

Минимизация функционала (26) сводится к решению нелинейного интегрального уравнения

$$f(\xi') = \frac{c}{2\pi} \int_{-1}^1 \{ \tilde{F}^*(\xi) p^*(\xi) + [1 - p^*(\xi)] |f(\xi)| \} \times \\ \times K(\xi', \xi, c) e^{i \arg f(\xi)} d\xi - \gamma f(\xi_0) K(\xi', \xi_0, c), \quad (27)$$

которое отличается от (22) лишь вторым слагаемым в правой части. По решению уравнения (27) оптимальные токи определяются формулой

$$I_n^* = \frac{c}{2\pi} \int_{-1}^1 \{ \tilde{F}^*(\xi) p^*(\xi) + [1 - p^*(\xi)] |f(\xi)| \} \times \\ \times e^{i[1 - cn\xi + \arg f(\xi)]} d\xi - \gamma f(\xi_0) e^{-icn\xi}. \quad (28)$$

Отметим, что последний способ формирования провала в ДН может осуществляться с одновременным синтезом заданной амплитудной ДН  $\tilde{F}(\xi)$ . Кроме того, он допускает обобщение на случай фазового синтеза решетки.

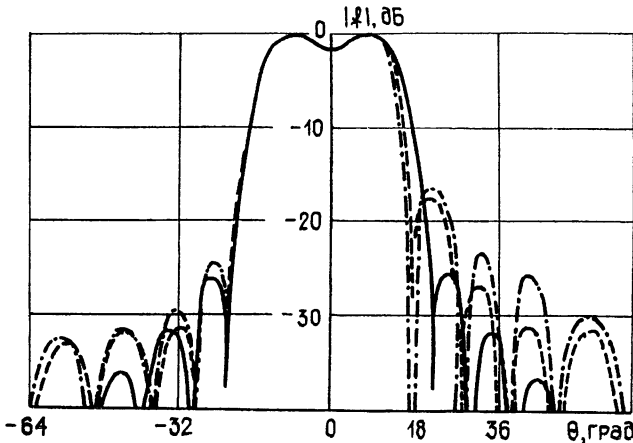


Рис. 3

На рис. 3 приведен пример формирования провала в направлении  $\theta_0 = 18^\circ$  путем решения уравнений (22) (пунктирная линия) и (27) при  $\gamma = 0,003$  (штрихпунктирная). Видно, что ввод дополнительного сла-

гаемого в критерий оптимизации (26) позволяет увеличить глубину провала. Если при отсутствии этого слагаемого в функционале  $\sigma$  глубина провала равна — 28 дБ, то при его наличии она равна — 44 дБ. Исходная ДН показана сплошной линией.

В заключение отметим, что применение того или иного способа формирования провала в ДН зависит от требований, предъявляемых к алгоритму задачи. Очевидно, что первые два предложенных алгоритма требуют незначительных затрат машинного времени, и поэтому предпочтительнее, если одно из ограничений есть время решения задачи. Последний алгоритм может успешно использоваться, например, при фазовом синтезе сканирующей решетки с одновременным формированием провала в заданном направлении.

#### ЛИТЕРАТУРА

- 1 Марков Г. Т., Сазонов Д. М. Антенны — М Энергия, 1975
- 2 Милюкович В. М., Яковлев В. П. Теория синтеза антенн — М: Сов радио, 1969.
- 3 Зелкин Е. Г., Соколов В. Г. Методы синтеза антенн: фазированные антенные решетки с непрерывным раскрытием. — М: Сов. радио, 1980
4. Войтович Н. Н., Савенко П. А. — Радиотехника и электроника, 1973, 18, № 9, с. 1794.
- 5 Войтович Н. Н., Савенко П. А. — Радиотехника и электроника, 1976, 21, № 4, с. 723.
6. Савенко П. А. — Изв. вузов — Радиофизика, 1979, 22, № 12, с. 1498.
- 7 Войтович Н. Н., Савенко П. А. — Радиотехника и электроника, 1979, 24, № 8, с. 1485

Вычислительный центр Института  
прикладных проблем механики  
и математики АН УССР

Поступила в редакцию  
28 декабря 1982 г.

#### SYNTHESIS OF ZEROES IN A LINEAR RADIATION PATTERN

*Ya. V. Vasyly'kov, A. M. Koval'chuk, P. A. Savenko*

Three ways forming zeroes (deep depressions) in a linear equidistant array radiation pattern have been considered. The first two approaches provide for minimum computer time requirements in solving the problem by a computer. The last approach may be applied in the phase and amplitude-phase synthesis of a scanning array with the simultaneous forming of a zero in a given direction.

---