

УДК 621.072.621.373

ФОРМА ЛИНИИ МНОГОКОНТУРНОГО АВТОГЕНЕРАТОРА

А. Н. Васильев, Г. П. Минина

Рассмотрены естественные флуктуации мощности в многоконтурных автоколебательных системах, которые могут быть представлены в виде колебательного контура с последовательно включенными нелинейным элементом и многорезонансной линейной системой. В общем виде получены выражения для спектральной плотности флуктуаций мощности. Показано, что форма спектральной линии многоконтурного автогенератора в общем случае несимметрична, пьедестал имеет ряд максимумов. Структура пьедестала определяется корнями характеристического уравнения устойчивости. Проведена оценка ширины спектральной линии. В качестве примера исследована форма линии двух- и трехконтурных систем стабилизации частоты. Учены вклады шумов отдельных контуров при различных температурах.

Вопросу исследования флуктуаций в автоколебательных системах (АКС) посвящено большое число монографий и множество оригинальных статей (например, [1, 2]). Однако до настоящего времени общая теория флуктуаций в генераторах, содержащих многорезонансные линейные системы, разработана недостаточно. Распространенный метод расчета флуктуаций в многоконтурных системах заключается в решении системы дифференциальных уравнений, порядок которой определяется числом степеней свободы [1]. Увеличение числа контуров АКС резко усложняет математические выкладки, поэтому при расчете систем, более сложных, чем двухконтурные, авторы обычно [1, 3] ограничиваются рассмотрением центрального пика спектральной линии (медленные флуктуации амплитуды и фазы). В случае, когда многоконтурную АКС можно описать системой дифференциальных уравнений, в которой только одно уравнение нелинейно, эту задачу можно решить проще и получить в общем виде выражение для формы пьедестала спектральной линии при произвольной конфигурации линейной части системы. В настоящей работе предложен метод исследования флуктуаций в многоконтурных АКС с одним нелинейным элементом в одночастотном приближении. Такие системы при включении в них резонатора высокой добротности используются для стабилизации частоты генераторов [4]. Специфика применения генераторов с высокой стабильностью частоты требует знания не только ширины спектральной линии, но и формы пьедестала. Характерной особенностью разработанного метода является то, что он позволяет исследовать флуктуации в генераторах, связанных с произвольными линейными многорезонансными системами, в том числе и распределенными.

1. Спектральная плотность естественных флуктуаций мощности многоконтурной АКС. Представим АКС как последовательный RLC контур, в который включены нелинейный активный элемент N , многорезонансная линейная система, характеризующаяся импедансом $Z(\omega)$, и эквивалентный генератор шума $\epsilon_{ш}$ (рис. 1).

Уравнение для тока $i(t)$ в контуре генератора имеет вид

$$\frac{d^2}{dt^2} i(t) + \nu^2 i(t) + \frac{1}{L} \frac{d}{dt} U_Z(t) = -\mu F\left(i, \frac{di}{dt}\right) + \frac{1}{L} \frac{d}{dt} \epsilon_{ш}, \quad (1)$$

где L и ν — соответственно индуктивность и парциальная частота контура генератора, U_Z — напряжение на линейной системе, которое можно выразить через импеданс линейной системы $Z(\omega)$ и фурье-компоненту тока $\zeta(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} i(t) e^{-j\omega t} dt$ по формуле

$$U_Z(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Z(\omega) \zeta(\omega) e^{j\omega t} d\omega, \quad (2)$$

и $F(i, di/dt)$ — член, включающий в себя потери и нелинейность генераторного контура, $\varepsilon_{ш}$ — ЭДС эквивалентного генератора шума.

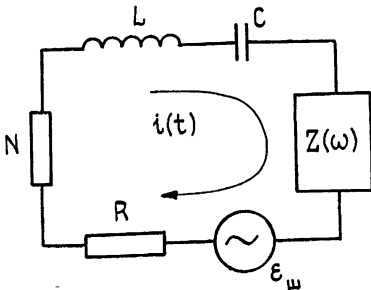


Рис. 1.

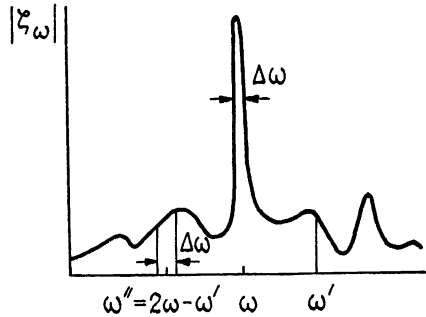


Рис. 2.

Будем рассматривать так называемое «одночастотное» приближение для решения этого уравнения. Если предположить, что нелинейность является слабой ($\mu \ll 1$), то спектр $i(t)$ должен содержать острые максимумы на частотах генерации ($\pm \omega$). В нулевом приближении по флуктуациям ($\varepsilon_{ш} = 0$) спектр сводится к двум дельта-функциям, что соответствует нулевому приближению $i_0(t) = a \sin \omega t$, где a — амплитуда генерации.

Производя гармоническую линейризацию уравнения (1), получим соотношения для определения стационарной частоты и амплитуды автоколебаний [5]:

$$-\omega^2 + \nu^2 - \frac{\omega}{L} \operatorname{Im} Z(\omega) = -\frac{\mu}{a\pi} \int_0^{2\pi} F(a \sin \omega t, a\omega \cos \omega t) \sin \omega t d(\omega t) \equiv -\Psi(a)/a, \quad (3)$$

$$\frac{\omega}{L} \operatorname{Re} Z(\omega) = -\frac{\mu}{a\pi} \int_0^{2\pi} F(a \sin \omega t, a\omega \cos \omega t) \cos \omega t d\omega t \equiv -\Phi(a)/a.$$

Правые части уравнений не имеют резонансного характера, поэтому зависимость от ω в них опущена.

Известно, что при учете флуктуаций дельта-функциональные максимумы на спектре размываются, приобретают конечную, но очень малую ширину $\Delta\omega$; кроме того, возникает существенно более широкий пьедестал [1] (рис. 2). Введем фурье-компоненту напряжения генератора шума:

$$f(\omega') = \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon_{ш}(t) e^{-j\omega' t} dt.$$

При воздействии на АКС спектральной компоненты $f(\omega')$ необходимо учитывать комбинационное взаимодействие с другими спектральными компонентами. Наибольший вклад в уравнение для $\zeta(\omega')$ дают комбинационные составляющие $\zeta(\omega'')$, частоты которых лежат в области $2\omega - \omega' - \Delta\omega \leq \omega'' \leq 2\omega - \omega' + \Delta\omega$, так как именно эти $\zeta(\omega'')$ взаимодействуют со спектральными компонентами основного максимума. Вследствие размытости спектральной линии генератора на величину $\Delta\omega$ необходимо рассматривать не одну компоненту $\zeta(2\omega - \omega')$, а некоторую область спектра около нее шириной порядка $\Delta\omega$. Когда $|\omega - \omega'| \sim \Delta\omega$, уравнения для $\zeta(\omega')$ являются нелинейными интегральными. Однако, если рассматривать частоты ω' , лежащие достаточно далеко от ω ($|\omega - \omega'| \gg \Delta\omega$), размытие по частотам оказывается достаточно малым по сравнению со структурой пьедестала, и им можно пренебречь. В этой области $|\zeta(\omega')| \ll |\zeta(\omega)|$, поэтому уравнения можно линеаризовать и получить систему, связывающую $\zeta(\omega')$ с $\zeta(2\omega - \omega')$ *:

$$\begin{aligned} \zeta(\omega') \left[-\omega'^2 + \omega^2 - j \frac{\omega}{L} Z(\omega) + j \frac{\omega}{L} Z(\omega') + \omega(-q + jp) \right] + \\ + \zeta^*(2\omega - \omega') \omega(q - jp) = j \frac{\omega}{L} f(\omega'), \end{aligned} \quad (4)$$

где $p = 2\omega^{-1} a(\partial/\partial a)(\Phi/a)$ — прочность предельного цикла, $q = 2\omega^{-1} a(\partial/\partial a)(\Psi/a)$ — коэффициент неизохронности [1].

В стационарном режиме спектральная плотность флуктуаций мощности P многоконтурного генератора, выделяемой на сопротивлении R генераторного контура, связана с корреляционной функцией $\langle \zeta(\omega') \zeta^*(\omega'') \rangle$ по формуле

$$G_P(\omega') \delta(\omega' - \omega'') = \langle \zeta(\omega') \zeta^*(\omega'') \rangle. \quad (5)$$

Решив уравнение (4) относительно $\zeta(\omega')$, можно выразить спектральную плотность флуктуаций мощности $G_P(\omega')$ через спектральную плотность напряжения генератора шума $G_\varepsilon(\omega')$. Учитывая, что $\langle f(\omega') f^*(\omega'') \rangle = G_\varepsilon(\omega') \delta(\omega' - \omega'')$, получим

$$\begin{aligned} G_P(\omega') = \frac{\omega^2 R}{L^2} \left[\left| \omega'^2 - \omega^2 - j \frac{\omega}{L} Z^*(\omega) + j \frac{\omega}{L} Z^*(2\omega - \omega') - \omega(q + jp) \right|^2 \times \right. \\ \left. \times G_\varepsilon(\omega') + \omega^2 |q - jp|^2 G_\varepsilon(2\omega - \omega') \right] / |D(\omega')|^2, \end{aligned} \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} D(\omega') = \left(\omega'^2 - \omega^2 + j \frac{\omega}{L} Z(\omega) - j \frac{\omega}{L} Z(\omega') \right) \left(\omega'^2 - \omega^2 - j \frac{\omega}{L} Z^*(\omega) + \right. \\ \left. + j \frac{\omega}{L} Z^*(2\omega - \omega') \right) + \omega(q - jp) \left[\omega'^2 - \omega^2 - j \frac{\omega}{L} Z^*(\omega) + j \frac{\omega}{L} \times \right. \\ \left. \times Z^*(2\omega - \omega') \right] - \omega(q + jp) \left[\omega'^2 - \omega^2 + j \frac{\omega}{L} Z(\omega) - j \frac{\omega}{L} Z(\omega') \right]. \end{aligned} \quad (7)$$

Замечим, что для $\omega' = \omega + j\lambda$ равенство $D(\omega') = 0$ совпадает с характеристическим уравнением устойчивости [5].

Когда АКС приближается к границе потери устойчивости, знаменатель выражения (6) стремится к нулю и флуктуации в системе рез-

* Для простоты рассмотрим случай $|\omega' - \omega| \ll \omega$, пренебрегая в нерезонансных членах отличием ω' от ω .

ко нарастают. В этом случае происходит либо срыв колебаний, либо скачок на другую ветвь частотной кривой. Уравнение устойчивости $D(\omega + j\lambda) = 0$ имеет в общем случае корень $\lambda = 0$, который соответствует произволу выбора начальной фазы автономного генератора [6]. Как известно [1, 2], этот произвол при дельта-коррелированном шуме приводит к линейной зависимости дисперсии фазы такого процесса от времени, что дает конечную ширину спектральной линии генератора.

2. Оценка ширины спектральной линии. В частном случае неизохронного томсоновского генератора, когда шум в генераторе можно считать белым, получим выражение для спектральной плотности флуктуаций тока:

$$G_P(\omega') = \frac{R}{4L^2} G_\varepsilon \left[\frac{(1/2)(1 + q^2/p^2) - q\Omega/p^2}{\Omega^2} + \frac{(1/2)(1 - q^2/p^2) + q\Omega/p^2}{p^2 + \Omega^2} \right], \quad (8)$$

где $\Omega = (\omega'^2 - \omega^2)/2\omega$. Полученные формулы справедливы в предположении малости флуктуаций $|\xi(\omega')| \ll |\xi(\omega)|$. Это соответствует тому, что формулы для спектральной плотности флуктуаций мощности генератора справедливы в области $|\Omega| \gg \Delta\omega$, где $\Delta\omega$ — ширина спектральной линии. В этой области полученное выражение (8) совпадает с известным выражением для неизохронного томсоновского генератора (см. [1], стр. 229). Точная формула отличается от выражения (8) тем, что в знаменателе первого слагаемого вместо Ω^2 стоит $\Omega^2 + \Delta\omega^2$.

Спектральная плотность флуктуаций тока в многоконтурном генераторе при приближении к центральному пику спектральной линии равна

$$G_P(\omega') = \frac{1}{8} \frac{R}{L} \frac{1 + q^2/p^2}{S^2 \Omega^2}. \quad (9)$$

Здесь $S = dv/d\omega$ — коэффициент стабилизации частоты автоколебаний ω относительно уходов частоты генераторного контура ν . Для оценки ширины спектральной линии $\Delta\omega$ будем считать, что в области $|\omega' - \omega| \sim \Delta\omega$ линия имеет лоренцевскую форму [1], что эквивалентно введению в знаменатель формулы (9) вместо Ω^2 выражения $\Omega^2 + \Delta\omega^2$.

Оценим $\Delta\omega$, исходя из того, что мощность генератора $P = \int_{-\infty}^{\infty} G_P(\omega') d\omega'$ определяется в основном узкой частью спектральной линии. Произведя интегрирование, получим выражение для ширины спектральной линии:

$$\Delta\omega = \frac{R\pi}{4L^2} \frac{1 + q^2/p^2}{PS^2} G_\varepsilon(\omega'). \quad (10)$$

В случае, когда вся АКС находится при одной температуре T , считая шумы тепловыми ($G_\varepsilon = \pi^{-1} kTR_{\text{ЭКВ}}$), можно получить

$$\Delta\omega = \frac{\omega^2}{4} \frac{1 + q^2/p^2}{PS^2 Q^2} \frac{R_{\text{ЭКВ}}}{R} kT, \quad (11)$$

где k — постоянная Больцмана, Q — добротность генераторного контура, $R_{\text{ЭКВ}}$ — активное сопротивление генераторного контура с учетом активного сопротивления многорезонансной системы на частоте генерации: $R_{\text{ЭКВ}}(\omega) = \Re + \Re Z(\omega)$. Для томсоновского генератора ($S = 1$, $R = R_{\text{ЭКВ}}$) выражение (11) совпадает с известной формулой Таундса (см. [2], стр. 501). В случае различных температур контуров, в том числе при учете дробовых шумов в активном элементе, нельзя пользо-

ваться формулой (11), а необходимо решать линейную задачу с учетом конфигурации системы для определения $G_e(\omega')$.

3. Многоконтурные системы стабилизации частоты. Рассмотрим в качестве примера форму спектральной линии двух- и трехконтурных систем стабилизации частоты.

Трехконтурная система стабилизации частоты представляет собой три последовательно соединенных контура: генераторный, малодобротный промежуточный, высокодобротный стабилизирующий [4]. В двухконтурной системе стабилизации отсутствует промежуточный контур, играющий роль «буфера», и генераторный контур связывается непосредственно со стабилизирующим.

Частотные кривые многоконтурных АКС, т. е. зависимость частоты генерации ω от парциальной частоты генераторного контура ν , приведены на рис. 3а, б. На рисунках и далее использованы обозначения:

$$x = \frac{\omega^2 - \nu_c^2}{\nu_c^2} Q_2, \quad x_1 = \frac{\nu^2 - \nu_c^2}{\nu_c^2} Q_2$$

— безразмерные расстройки соответствующих частот относительно частоты стабилизирующего контура ν_c . Пунктиром обозначены неустойчивые участки частотных кривых. Частотная кривая двухконтурной системы имеет две ветви. Коэффициент стабилизации $S = d\nu/d\omega = dx_1/dx$ достигает максимального значения на краях ветвей (рис. 3а). Введение промежуточного контура изменяет фазовые соотношения в системе, и на частоте третьего контура появляется устойчивая средняя ветвь с большим коэффициентом стабилизации (рис. 3б). Максимум коэффициента стабилизации достигается при $x = x_1 = 0$.

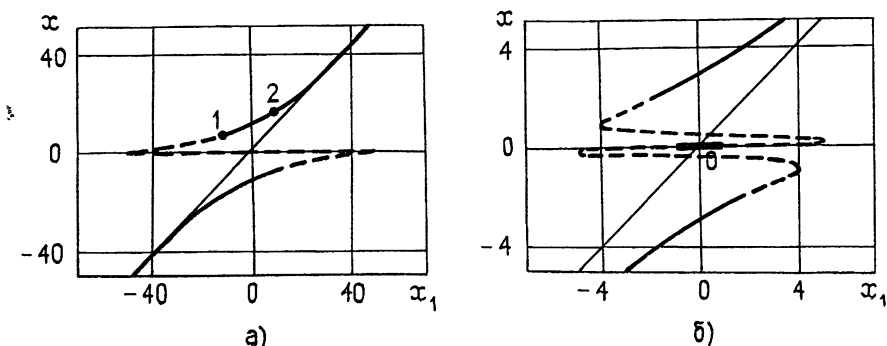


Рис. 3.

В общем случае форма спектральной линии многоконтурного генератора является несимметричной даже для изохронного ($q=0$) генератора. Рассмотрим случай, когда прочность предельного цикла велика*:

$$p \gg \omega k_1^2 Q_2. \quad (12)$$

Здесь и далее Q_i — добротность i -го контура, k_i — коэффициент связи между i -м и следующим за ним контуром. При этом в выражении (7) можно пренебречь первым произведением и аналогично упростить выражение (6). Если, кроме того, генератор изохронный ($q=0$), то фор-

* Заметим, что из определения прочности предельного цикла следует $p \sim \mu\omega$. Следовательно, для выполнения условия (12) необходимо, чтобы $k_1^2/Q_2 \ll \mu$.

ма спектральной линии будет симметрична относительно частоты генерации.

4. Форма линии двухконтурного генератора. Спектральная плотность флуктуаций мощности в генераторном контуре имеет вид

$$G_P = [G_\varepsilon(x+y) + G_\varepsilon(x-y)] (Q_2^2/2y) \times \frac{4y^2 + (x^2 - y^2 + 1)}{\{y^2 - x^2 - 1 - [\kappa(x^2 - 1)/(x^2 + 1)]\}^2 + y^2(2 - \kappa/(x^2 + 1))^2} \quad (13)$$

Здесь введены обозначения

$$y = (\omega'^2 - \omega^2)Q_2/\omega^2, \quad \kappa = k_1^2Q_2^2.$$

Если требуется учесть различие температур отдельных контуров, то необходимо составить систему неоднородных уравнений, описывающую линейную часть двухконтурной системы, с учетом теплового шума $G_i(\omega) = (1/\pi)kT_iR_i$ в каждом из контуров. Решая систему неоднородных линейных уравнений, получаем выражение для спектральной плотности шума линейной части:

$$G_\varepsilon(x+y) + G_\varepsilon(x-y) = \frac{1}{\pi Q^2} \left\{ kT^* + \frac{\kappa}{2} \frac{Q}{Q_2} kT_2 \times \left[\frac{1}{(x-y)^2 + 1} + \frac{1}{(x+y)^2 + 1} \right] \right\}, \quad (14)$$

T_i — температура i -го контура, T^* — эффективная шумовая температура 1-го контура с учетом дробового шума ($T^* > T_1$) (см. [2], стр. 501).

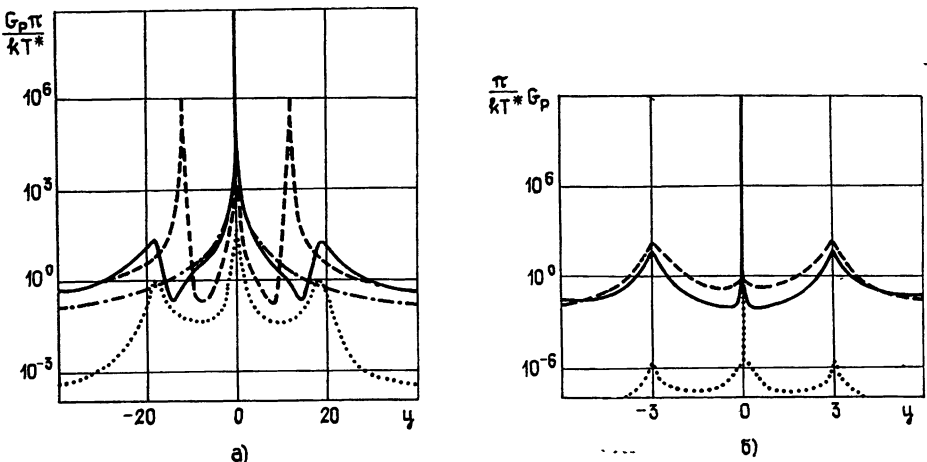


Рис. 4.

На рис. 4а приведена спектральная линия двухконтурного генератора для двух частот генерации: $x=7$ и $x=15$ (точки 1, 2 на соответствующей частотной кривой). Кривые построены для следующих значений параметров АКС: $\kappa=100$, $Q=30$, $Q_2=10^3$, $T^*=10^3$ К, $T_2=300$ К. Для устойчивого режима генерации ($x=15$) на рисунке приведены вклады в спектральную плотность флуктуаций мощности в генераторном контуре (сплошная кривая) и стабилизирующем контуре (точечная кривая). Спектральная линия симметрична и состоит из цент-

рального пика и двух боковых. Суммарная ширина центрального пика линии двухконтурного генератора равна

$$\Delta\omega = \frac{\omega^2 k T^*}{4 P S^2} \left(1 + \frac{1}{x^2 + 1} \frac{x T_2 Q}{Q_2 T^*} \right).$$

Боковой максимум флуктуаций достигается вблизи $y = \pm \sqrt{x^2 + 1}$, причем при приближении к границе устойчивости $x = \sqrt{\kappa/2 - 1} = 7$ флуктуации резко возрастают (пунктирная кривая). Эти боковые максимумы имеют лоренцевскую форму. Одночастотное приближение перестает работать, когда ширина боковых максимумов уменьшается до $\sim \Delta\omega$. При этом мощность боковых составляющих становится сравнимой с мощностью центральной составляющей. Последнее означает, что потеря устойчивости одночастотного режима наступает не точно на границе $x = \sqrt{\kappa/2 - 1}$, а из-за влияния шумов несколько раньше.

Флуктуации за счет шумов второго контура практически всюду малы по сравнению с флуктуациями за счет шумов генераторного контура, за исключением областей глубоких минимумов на кривых. Эти минимумы находятся вблизи $y = \pm x$. Для сравнения на рисунках приведена спектральная линия томсоновского генератора с той же шириной центрального пика (штрихпунктирная линия). В области $y = \pm x$ шумы двухконтурного генератора меньше, чем шумы томсоновского генератора. Это явление можно объяснить «отсосом» соответствующих спектральных составляющих шума во второй контур вблизи его резонансной частоты.

5. Форма линии трехконтурного генератора. Выражение для спектральной плотности флуктуаций мощности трехконтурной АКС для произвольной частоты генерации достаточно громоздко, поэтому здесь ограничимся рассмотрением случая, когда генерация происходит на частоте стабилизирующего контура $\omega = \nu_c$ (точка O на частотной кривой, рис. 3б). При этом

$$G_P(y) = G_s(y) \frac{Q_2^2}{2y^2} \left\{ y^2 x_1^2 \left(\frac{1}{y^2 + 1} - \frac{x_2/\gamma}{y^2 + \gamma^2} \right)^2 + \left[1 - x_1 \left(\frac{1}{y^2 + 1} - \frac{x_2}{y^2 + \gamma^2} \right) \right]^2 \right\}^{-1}, \quad (15)$$

где

$$x_1 = k_1^2 Q_2^2, \quad x_2 = k_2^2 Q_2^2, \quad \gamma = Q_2/Q_3 + k_2^2 Q_2,$$

$$G_s(y) = \frac{1}{\pi} \frac{k T^*}{Q^2} \left\{ 1 + \left[\left(\frac{y}{y^2 + 1} - \frac{x_2 y}{y^2 + \gamma^2} \right)^2 + \left(\frac{1}{y^2 + 1} - \frac{x_2 \gamma}{y^2 + \gamma^2} \right)^2 \right] \right\} \times \left(\frac{x_1^2 Q T_2}{T^* Q_2} + \frac{x_1^2 x_2^2 Q T_3}{Q_3 T^*} \frac{1}{y^2 + \gamma^2} \right). \quad (16)$$

На рис. 4б приведена спектральная линия трехконтурного генератора для следующих значений параметров: $k_1^2 = 10^{-3}$, $k_2^2 = 10^{-4}$, $Q = Q_2 = 100$, $Q_3 = 10^4$, $T^* = 10^3$ К, $T_2 = 300$ К, $T_3 = 4$ К. На рисунке изображены вклады отдельных контуров в флуктуации (вклад генераторного контура изображен сплошной линией) мощности трехконтурной АКС. Расчеты показали, что при выбранных значениях параметров можно пренебречь вкладом второго и третьего контуров в ширину спектральной линии, т. е. ширина спектральной линии сужается

в S^2 раз по сравнению с одноконтурным генератором (см. (11)). При этом второй контур дает основной вклад в величину пьедестала спектральной линии (пунктирная линия). Вклад стабилизирующего контура незначителен во всей области частот (точечная линия).

Нарушение устойчивости на выбранной частоте генерации ω наступает при невыполнении так называемого «энергетического» критерия [4], связанного с возникновением генерации на боковой ветви частотной кривой. Однако даже в случае устойчивого режима вблизи частот боковых ветвей, $x=3$, наблюдается резкое увеличение интенсивности шумов пьедестала.

Предыдущее рассмотрение дало форму линии в области $y \ll (\rho/\omega) Q_2$. Крылья спектральной линии вне структурной области при $y \sim \rho Q_2/\omega$ имеют вид

$$G_p = \frac{1}{2} \frac{Q_2}{y^2 + Q_2^2 \rho^2 / \omega^2} \frac{kT^*}{\pi Q \rho} \quad (\rho = \sqrt{L/C})$$

и не отличаются от крыльев линии томсоновского генератора.

В заключение авторы выражают благодарность И. И. Минаковой за плодотворное обсуждение результатов работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Малахов А. Н. Флуктуации в автоколебательных системах. — М.: Наука, 1968, 660 С
2. Ахманов С. А., Дьяков Ю. Е., Чиркин А. С. Введение в статистическую радиофизику и оптику. — М.: Наука, 1981, 640 С.
3. Минакова И. И., Панов В. И., Пашин С. Ю. — Вестник МГУ. Сер. 3, 1978, 19, № 2, с. 19.
4. Зубиетов Ц. И., Минакова И. И., Минина Г. П., Панов В. И. — Изв. вузов — Радиоэлектроника, 1981, 24, № 7, с. 29.
5. Минина Г. П. — Вестник МГУ. Сер. 3, 1981, 22, № 3, с. 76.
6. Малкин И. Г. Теория устойчивости движения — М.: Наука, 1966, 432 С.

Московский институт радиотехники,
электроники и автоматики

Поступила в редакцию
21 февраля 1983 г.

THE NOISE SPECTRA OF A MULTICIRCUIT OSCILLATOR

A. N. Vasil'ev, G. P. Minina

The natural fluctuations of power in multicircuit oscillators with one nonlinear element are considered. The general expression for spectral density of power is deduced. The spectral line of multicircuit oscillator in general is asymmetrical, the pedestal has a number of maxima. The structure of the pedestal is determined by the characteristic equation of the multicircuit system. The width of the spectral line of the multicircuit oscillator is s^2 -times smaller than the width of the Tomson-oscillator spectral line, where s is the stability factor of the system. As an example the noise spectra of two- and threecircuit oscillator are investigated.