ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XXVII, № 1 РАДИОФИЗИКА 1984

УДК 621 371

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ ДИФРАКЦИИ ВОЛН НА ШЕРОХОВАТОЙ ПОВЕРХНОСТИ

А. Н. Теохаров

Задача дифракции волн на шероховатой поверхности рассмотрена путем сведения поверхностного рассеяния к объемному и последующего применения методов исследования многократного рассеяния, развитых в теории распространения волн в случайно-неоднородных средах На основе данного подхода решены уравнение Дайсона в приближении Бурре для среднего значения и уравнение Бете — Солпитера в лестничном приближении для функции корреляции скалярного поля, рассеянного на безграничной идеально отражающей статистически однородной поверхности Решения этих уравнений автоматически осуществляют учет затенений одних участков поверхности другими.

1. В настоящее время наиболее полно развита теория однократного рассеяния волновых полей на статистически неровной поверхности, основанная на методе Кирхгофа и методе малых возмущений [1,2]. Что касается учета многократного рассеяния, то развитые в [1,2] методы применимы лишь к поверхностям с достаточно малыми и пологими неровностями. В данной работе предложен другой подход к указанной задаче, заключающийся в сведении поверхностных интегралов к объемным в точном интегральном уравнении для волнового поля. Это позволяет применить к полученным уравнениям хорошо разработанные методы теории многократного рассеяния в случайно-неоднородных средах и провести рассмотрение без ограничений на высоту и наклоны неровностей. На основе предложенного подхода исследованы уравнение Дайсона в приближении Бурре для среднего значения и уравнение Бете — Солпитера в лестничном приближении для функции корреляции скалярного поля, рассеянного на безграничной статистически однородной абсолютно отражающей поверхности. Полученные выражения отличаются от найденных в приближениях одно- и двукратного рассеяния [3] наличием амплитудных множителей, учитывающих затенения одних участков неровной поверхности другими. Как известно, для учета затенений в рамках метода Кирхгофа приходится искусственно вводить под интеграл функцию затенений исходя из геометрооптических представлений [1,4].

2. При рассеянии скалярной монохроматической волны $\Phi(\boldsymbol{x})$ на абсолютно жесткой поверхности S, заданной уравнением $F(\boldsymbol{x}) = 0$ в области Ω, полное поле $\varphi(\boldsymbol{x})$ выражается формулой Грина,

$$\varphi(\boldsymbol{x}) = \Phi(\boldsymbol{x}) - \int\limits_S \varphi(\boldsymbol{x}'_S)\, \boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}'_S)\, \frac{\partial G_0(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}'_S)}{\partial \boldsymbol{x}'}\, dS, \qquad (1)$$

где $\boldsymbol{x}_S$ — точка на S, $\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}_S) = \nabla F(\boldsymbol{x}_S)/|\nabla F(\boldsymbol{x}_S)|$ — внешняя нормаль к S, а $G_0(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') = -\exp(ik|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|)/4\pi|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|$ —функция Грина свободного пространства (временной множитель $e^{-i\omega t}$ здесь опущен). Преобразуем поверхностный интеграл в (1) к объемному, воспользовавшись соотношением

$$\int\limits_S f(\boldsymbol{x}_S)\, n(\boldsymbol{x}_S)\, dS = \int\limits_\Omega f(\boldsymbol{x})\, \nabla F(\boldsymbol{x})\, \delta(F(\boldsymbol{x}))\, dx^3, \tag{2}$$

$S \subset \Omega$. Учтем теперь, что поле $\varphi(\boldsymbol{x}_S)$ в (1) представляет собой предел поля $\varphi(\boldsymbol{x})$ над поверхностью S, тогда как поле непосредственно на поверхности S равно среднему арифметическому пределов $\varphi(\boldsymbol{x})$ над и под S, т. е. $(1/2)\,\varphi(\boldsymbol{x}_S)$, поскольку поле под поверхность не проникает. В результате из (1) и (2) получаем замкнутое интегральное уравнение для полного поля $\varphi(\boldsymbol{x})$*:

$$\varphi(\boldsymbol{x}) = \Phi(\boldsymbol{x}) - 2\int\limits_\Omega \delta(F(\boldsymbol{x}'))\,[(\partial F(\boldsymbol{x}')/\partial \boldsymbol{x}')(\partial G_0(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}')/\partial \boldsymbol{x}')]\,\varphi(\boldsymbol{x}')\,d^3x'. \tag{3}$$

Для абсолютно мягкой поверхности аналогичным образом находим следующее уравнение:

$$\varphi(\boldsymbol{x}) = \Phi(\boldsymbol{x}) + 2\int\limits_\Omega \delta(F(\boldsymbol{x}'))\,G_0(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}')\,[(\partial F(\boldsymbol{x}')/\partial \boldsymbol{x}')(\partial/\partial \boldsymbol{x}')]\,\varphi(\boldsymbol{x}')\,d^3x'. \tag{4}$$

Таким образом, задача рассеяния на статистически неровной поверхности фактически сведена к задаче объемного рассеяния в случайно-неоднородной среде со специфическим показателем преломления, имеющим δ-образную особенность. Это позволяет применить для анализа (3) и (4) хорошо разработанные методы теории многократного рассеяния волн в случайно-неоднородных средах.

Если эти уравнения решать итерациями, то можно получить ряды, представляющие разложение $\varphi(\boldsymbol{x})$ по кратности рассеяния. При этом учет только однократного рассеяния приводит к результатам, совпадающим с найденными в приближениях Кирхгофа и метода малых возмущений, а учет двукратно рассеянных волн позволяет вычислить поправки следующего порядка [3].

3. Используем другой подход к задаче, развитый в теории объемного рассеяния волновых полей и основанный на выводе и анализе замкнутых уравнений для среднего значения и корреляционной функции волнового поля. Стандартной процедурой из уравнения $\varphi = \Phi + \hat{G}\varphi$, где $\hat{G}$ — интегральный оператор в (3) или в (4) (оператор рассеяния), можно вывести уравнение Дайсона для среднего значения $\langle\varphi\rangle$ и уравнение Бете — Солпитера для функции корреляции $\psi = \langle\varphi\varphi^*\rangle - \langle\varphi\rangle\langle\varphi^*\rangle$:

$$\langle\varphi\rangle = \Phi + \hat{D}\langle\varphi\rangle; \tag{5}$$

$$\psi = \hat{B}\,\langle\varphi\rangle\langle\varphi^*\rangle + \hat{B}\,\psi. \tag{6}$$

Вывод и операторное представление $\hat{D}$ и $\hat{B}$ приведены, например, в работах [5, 6]; в частности, для $\hat{D}$ имеем представление в виде ряда $\hat{D} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \langle \hat{G}(\hat{\Delta}\hat{G})^{n-1}\rangle$, где оператор $\hat{\Delta}$ действует по правилу $\hat{\Delta} f = f - \langle f\rangle$.

* Это уравнение можно получить и другим более формальным путем, а именно в уравнении (1) опустить точку x на поверхность S, выделив при этом особенность производной от G_0 на S (потенциал двойного слоя), после чего итерациями найти $\varphi(\boldsymbol{x}_S)$ и подставить результат в (1). Это приводит к выражению $\varphi(\boldsymbol{x}) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \hat{G}^n \Phi(\boldsymbol{x})$, которое удовлетворяет уравнению $\varphi(\boldsymbol{x}) = \Phi(\boldsymbol{x}) + \hat{G}\varphi(\boldsymbol{x})$, где $\hat{G}$ — интегральный оператор в правой части (3).

Ограничиваясь в (5) слагаемыми нулевого и первого порядков по $\hat{\Delta}$, получаем приближение Бурре для уравнения Дайсона: $\langle\varphi\rangle=\Phi+$ $+\langle\hat{G}\rangle\langle\varphi\rangle+\langle\hat{G}\hat{\Delta}\hat{G}\rangle\langle\varphi\rangle$. В этом уравнении выделим в явном виде флуктуационную часть, введя детерминированный оператор перенормировки $\hat{N}=(\hat{1}-\langle\hat{G}\rangle)^{-1}$, что дает

$$\langle\varphi\rangle=\varphi_0+\hat{N}\langle\hat{G}\hat{\Delta}\hat{G}\rangle\langle\varphi\rangle, \tag{7}$$

где $\varphi_0=\hat{N}\Phi$ — перенормированное падающее поле. Ограничившись в выражении для $\hat{B}$ членом второго порядка по $\hat{\Delta}$, $\hat{B}_0=\langle\hat{G}\hat{G}^*\rangle-$ $-\langle\hat{G}\rangle\langle\hat{G}^*\rangle$, находим уравнение Бете—Солпитера в лестничном приближении.

4. Рассмотрим рассеяние плоской волны $\Phi(\boldsymbol{x})=e^{i\boldsymbol{k}\boldsymbol{x}}$ в верхнем полупространстве на неограниченной поверхности, заданной уравнением $F(\boldsymbol{x})=z-h(\boldsymbol{x}_\perp)=0$. Тогда оператор $\hat{G}$ для абсолютно жесткой и мягкой поверхностей можно записать соответственно в виде

$$\begin{gathered}\hat{G}f(\boldsymbol{x})=\frac{2i}{(2\pi)^3}\int\frac{\varkappa_z-\varkappa_\perp\nabla h(\boldsymbol{x}'_\perp)}{k^2-\varkappa^2}e^{i\varkappa(x-x')}\delta(z'-h(\boldsymbol{x}'_\perp))f(\boldsymbol{x}')\,d^3\varkappa d^3x',\\ \hat{G}_{\text{м}}f(\boldsymbol{x})=\frac{2}{(2\pi)^3}\int\frac{d^3\varkappa d^3x'}{k^2-\varkappa^2}e^{i\varkappa(x-x')}\delta(z'-h(\boldsymbol{x}'_\perp))\times\\ \times\left[\frac{\partial}{\partial z'}-\nabla h(\boldsymbol{x}'_\perp)\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{x}'_\perp}\right]f(\boldsymbol{x}').\end{gathered}\tag{8}$$

В случае статистически однородной поверхности для среднего значения волнового поля справедливо соотношение $\langle\varphi(\boldsymbol{x})\rangle=\exp(i\boldsymbol{k}_\perp\boldsymbol{x}_\perp)\times$ $\times g(z)$. Подставляя явный вид оператора $\hat{G}$ (8) в уравнение (7), находим интегральное уравнение для функции $g(z)$:

$$g(z)=\varphi_0(z)+\int D_{\text{Б}}(z,z')g(z')\,dz', \tag{9}$$

где

$$\varphi_0(z)=\int N(z,z')\exp(ik_zz')\,dz',$$

$$\begin{gathered}D_{\text{Б}}(z,z')=\frac{1}{(2\pi)^2}\int d^2yd^2\varkappa_\perp dz_0\,dz''d^2u'd^2u''\exp[i(\boldsymbol{k}_\perp-\boldsymbol{\varkappa}_\perp)\boldsymbol{y}]\times\\ \times\Delta_2w(z',\boldsymbol{u}';z'',\boldsymbol{u}'';\boldsymbol{y})N(z,z_0)\exp(-ik_z|z_0-z''|-is(\varkappa_\perp)|z''-z'|)\times\\ \times\left[\operatorname{sign}(z_0-z'')+\frac{\boldsymbol{k}_\perp\boldsymbol{u}''}{k_z}\right]\left[\operatorname{sign}(z''-z')+\frac{\boldsymbol{\varkappa}_\perp\boldsymbol{u}'}{s(\varkappa_\perp)}\right],\\ D_{\text{Б.м}}(z,z')=\frac{1}{(2\pi)^2}\int d^2yd^2\varkappa_\perp\,dz_0\,dz''d^2u'd^2u''\exp[i(\boldsymbol{k}_\perp-\boldsymbol{\varkappa}_\perp)\boldsymbol{y}]\times\\ \times\Delta_2w(z',\boldsymbol{u}';z'',\boldsymbol{u}'';\boldsymbol{y})N_{\text{м}}(z,z_0)\exp[-ik_z|z_0-z''|-is(\varkappa_\perp)|z''-z'|]\times\\ \times\left[\operatorname{sign}(z''-z')+\frac{\boldsymbol{\varkappa}_\perp\boldsymbol{u}''}{s(\varkappa_\perp)}\right]\left(-\frac{1}{ik_z}\frac{d}{dz'}+\frac{\boldsymbol{k}_\perp\boldsymbol{u}'}{k_z}\right).\end{gathered}\tag{10}$$

Здесь $\Delta_2 w(z', \boldsymbol{u}'; z'', \boldsymbol{u}''; \boldsymbol{x}'_\perp - \boldsymbol{x}''_\perp) = w_2(z', \boldsymbol{u}'; z'', \boldsymbol{u}''; \boldsymbol{x}'_\perp - \boldsymbol{x}''_\perp) - w_1(z', \boldsymbol{u}') w_1(z'', \boldsymbol{u}'')$, w_2, w_1 — двухточечная и одноточечная плотности вероятности распределения высот и наклонов неровной поверхности, через $N(z, z')$ обозначено ядро оператора $\hat{N}$, а

$$s(\boldsymbol{\varkappa}_\perp) = \begin{cases} \sqrt{k^2 - \varkappa_\perp^2}, & \varkappa_\perp^2 \leqslant k^2 \\ -i\sqrt{\varkappa_\perp^2 - k^2}, & \varkappa_\perp^2 \geqslant k^2 \end{cases},$$

так что $s(\boldsymbol{k}_\perp) = k_z$, $\operatorname{Im} s(\boldsymbol{\varkappa}_\perp) \leqslant 0$.

Исходя из определения оператора $\hat{N}$, для ядер $\hat{N}$, $\hat{N}_\text{м}$ находим интегральные уравнения

$$N(z, z_0) - \int \operatorname{sign}(z - z') \exp(-ik_z|z - z'|) N(z', z_0) d\chi(z') = \delta(z - z_0),$$

$$N_\text{м}(z, z_0) + \int \exp(-ik_z|z - z'|) \frac{1}{ik_z} \frac{d}{dz'} N_\text{м}(z', z_0) d\chi(z') = \delta(z - z_0),$$

где $\chi(z) = \int\limits_{-\infty}^{z} w_1(z') dz'$ — одноточечная функция распределения высот шероховатостей. Эти интегральные уравнения стандартным способом можно свести к неоднородным линейным дифференциальным уравнениям второго порядка с заданными условиями при $|z| \to \infty$. В предельных случаях малых и больших значений параметра Рэлея $R = 2k_z \sigma$ $\left(\sigma^2 = \int z^2 d\chi(z)\right.$ — дисперсия высот поверхности$\left.\right)$ это приводит к следующим выражениям:

а) при $R \ll 1$ —

$$\begin{gathered} N(z, z') \simeq \delta(z - z') + [\operatorname{sign}(z - z') - \operatorname{th} 1] \exp(2\chi(z) - 2\chi(z')) w_1(z'), \\ N_\text{м}(z, z') \simeq \delta(z - z') - \frac{2}{1 + e^2} \exp(2 - 2\chi(z')) w_1(z') \frac{1}{ik_z} \frac{d}{dz'}; \end{gathered} \tag{11}$$

б) при $R \gg 1$ —

$$\begin{gathered} N(z, z') \approx \delta(z - z') + [B \exp(ik_z(z + z')) + \\ + \operatorname{sign}(z - z') \exp(-ik_z|z - z'|)] \exp(\chi(z) - \chi(z')) w_1(z'), \\ N_\text{м}(z, z') \approx \delta(z - z') + [B \exp(ik_z(z + z')) - \\ - \exp(-ik_z|z - z'|)] \exp(\chi(z) - \chi(z')) w_1(z')(1/ik_z)(d/dz'), \end{gathered} \tag{12}$$

где $B = -\int \exp(-2ik_z z + \chi(z) - 1)\, d\chi(z)$.

Ядра (10) имеют достаточно сложную структуру, поэтому решить точно в общем виде уравнение (9) не удается. Для его приближенного решения можно использовать процедуру метода возмущений, считая интегральный оператор в (9) возмущением, а φ_0 — нулевым приближением. Среднее поле над рассеивающей поверхностью можно представить в виде суммы падающей и отраженной волн: $g(z) = e^{ik_z z} + Ve^{-ik_z z}$. Итерируя (9), получаем ряд для коэффициента отражения в приближении Бурре, $V_\text{Б} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} V_{\text{Б}n}$. Рассмотрим первые два слагаемых этого ряда для различных значений параметра Рэлея.

При $R \ll 1$ разлагаем экспоненты в (10), содержащие k_z и s, в ряд и ограничиваемся членами второго порядка. Линеаризуя в (11), кроме того, функцию $\chi(z)$ в области, существенной для интегрирования по z, после преобразований находим

$$V_{Б1} + V_{Б2} \approx V_1 + 1{,}14V_2 - 0{,}25i\sigma\beta_0,$$
$$V_{Б1м} + V_{Б2м} \approx -V_1 + 0{,}154V_2 + 0{,}25i\sigma\beta_0, \qquad (13)$$

где V_1, V_2 — вклады в коэффициент отражения одно- и двукратно рассеянных полей [3], $\beta_0 = \int d^2\beta g(\beta) \dfrac{2k_z^2 + 3k_\perp\beta - \beta^2}{s(k_\perp - \beta)}$, а $g(\beta) = (2\pi)^{-2} \times \int d^2y e^{i\beta y} K(y)$ — спектр неровной поверхности $(K(y) = \sigma^{-2}\langle h(x'_\perp + y)\, h(x'_\perp)\rangle)$. Отсюда видно, что в данном приближении учет многократного рассеяния по сравнению с приближениями одно- и двукратного рассеяния осуществляется с помощью перенормировки коэффициента двукратного отражения и слагаемого $0{,}25\,\sigma\beta_0$, которое не мало по сравнению с V_2. Это слагаемое (как и V_2) зависит от корреляции высот неровностей и учитывает влияние наклонов неровной поверхности при многократных переотражениях.

Если параметр Рэлея велик ($R \gg 1$), то, используя метод, предложенный в работах [7, 8], находим

$$V_{Б1} = -V_{Б1м} \approx \int \exp(2ik_z z + \chi(z) - 1)\, d\chi(z),$$
$$V_{Б2} \approx V_{Б2м} \approx V_2. \qquad (14)$$

Таким образом, в рассматриваемом приближении перенормировке подвергается не двукратно рассеянное поле, как это было при $R \ll 1$, а однократно рассеянное поле $\left(V_1 = \int e^{2ik_z z}\, d\chi(z)\right)$.

Отметим, что перенормированное падающее поле, которое удовлетворяет уравнению $\varphi_0 = \Phi + \langle \hat{G} \rangle \varphi_0$, представляет собой волну, многократно рассеянную на шероховатой поверхности, причем последовательные акты отражения происходят статистически независимо. В то же время решение уравнения Дайсона в приближении Бурре (9) учитывает статистическую связь (корреляцию) двух последовательных актов отражения при многократном рассеянии. Отличие коэффициентов отражения (13), (14) от аналогичных выражений, найденных в приближении двукратного рассеяния [3], возникло вследствие появления в операторах перенормировки (11), (12) амплитудных множителей $e^{\gamma\chi(z)}$ ($|\gamma| \leqslant 2$), которые ведут к уменьшению вклада в рассеянное поле дальше расположенных (по ходу распространения волны) точек рассеяния и тем самым учитывают затенения одних участков поверхности другими.

5. Для решения уравнения Бете—Солпитера (6) в лестничном приближении необходимо предварительно вычислить среднее значение поля, например, в приближении Бурре. Из-за сложной структуры уравнений (9) и (6) ограничимся здесь рассмотрением нулевого приближения решения этих уравнений $\psi_0 = \hat{B}_0 \varphi_0 \varphi_0^*$, которое соответствует функции корреляции однократно рассеянного поля при падении на поверхность перенормированного падающего поля.

Нетрудно показать [3], что функция корреляции поля над поверхностью может быть представлена в виде суперпозиции плоских волн:

$$\psi(x_1, x_2) = \int d^2\varkappa_\perp Q(\varkappa_\perp) \exp(i\varkappa_c x_1 - i\varkappa_c^* x_2),$$

где $\varkappa_c = (\varkappa_\perp, -s(\varkappa_\perp))$ — волновой вектор рассеянной волны. Для функции Q в указанном приближении получаем выражения

$$Q(\varkappa_\perp) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^2y dz_1 d^2u_1 dz_2 d^2u_2 \Delta_2 w(z_1, u_1; z_2, u_2; y) \times$$
$$\times \exp[i(k_\perp - \varkappa_\perp) y] \exp(isz_1 - is^* z_2)[1 + \varkappa_\perp u_1/s(\varkappa_\perp)] \times$$
$$\times [1 + \varkappa_\perp u_2/s(\varkappa_\perp)]^* \varphi_0(z_1) \varphi_0^*(z_2),$$
$$Q_м(\varkappa_\perp) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^2y dz_1 d^2u_1 dz_2 d^2u_2 \Delta_2 w(z_1, u_1; z_2, u_2; y) \times \tag{15}$$
$$\times \exp[i(k_\perp - \varkappa_\perp) y] \exp(isz_1 - is^* z_2) \, |k_z/s|^2 \, [\varphi_0(z_1) - (k_\perp u_1/k_z) \times$$
$$\times \varphi_{0м}(z_1)][\varphi_0(z_2) - (k_\perp u_2/k_z) \varphi_{0м}(z_2)]^*.$$

Поля $\varphi_0(z)$ и $\varphi_{0м}(z)$ содержат амплитудные множители, уменьшающие вклад глубоко расположенных участков поверхности, что эквивалентно учету затенений в функции корреляции многократно рассеянного поля.

Аналогично (13) и (14) можно оценить (15) при малых и больших значениях параметра Рэлея. Полученные таким путем выражения отличаются от найденных в приближении однократного рассеяния [3] тем, что содержат мнимую добавку $-i\gamma s_0$ к z-компоненте вектора рассеяния, описывающую эффективное затухание поля по оси z, здесь $\sigma^2 s_0^2 = 1/12$, $1 \leqslant \gamma \leqslant 2$ (в случае $R \ll 1$ и абсолютно мягкой границы раздела получающееся выражение для Q имеет более сложную структуру).

Автор весьма признателен А. Б. Шмелеву, а также А. Г. Виноградову за полезные замечания и обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Басс Ф. Г., Фукс И М. Рассеяние волн на статистически неровной поверхности. — М.: Наука, 1972.
2 Шмелев А. Б. — УФН, 1972, **106**, вып 3, с. 459.
3 Теохаров А. Н — Труды РТИ АН СССР, 1982, вып. 44, с. 173.
4 Пономарев Г. А, Якубов В. П. — Изв. вузов — Радиофизика, 1976, **19**, № 3, с 407.
5 Апресян Л. А. — Изв. вузов — Радиофизика, 1974, **17**, № 2, с. 165.
6. Теохаров А. Н, Шмелев А. Б — Изв. вузов — Радиофизика, 1982, **25**, № 1, с. 40.
7. Чаевский Е. В. — Изв. вузов — Радиофизика, 1965, **8**, № 6, с. 1128.
8. Barrick D. E — Proc IEEE, 1968, **56**, с 1728.

Поступила в редакцию
6 апреля 1983 г.

ON ONE METHOD OF SOLVING THE PROBLEM OF ROUGH SURFACE WAVE DIFFRACTION

A. N. Teokharov

A method is suggested to solve the problem of wave multiple scattering by a randomly rough surface based on its reduction to the problem of wave propagation in a randomly inhomogeneous medium with the discontinuous refractive index. Equation of Dyson in Bourret approximation for average value and that of Bethe—Salpeter in the ladder approximation for correlation function of a scalar wave reflected from a randomly homogeneous absolutely reflecting surface are considered These expressions already take into account the shadowing one part of the surface by another,