

УДК 533.951

К ТЕОРИИ ВЫНУЖДЕННОГО КОМБИНАЦИОННОГО РАССЕЯНИЯ СВЕТА В ОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ ПРОСТРАНСТВА

Д. К. Салихов

Рассмотрено вынужденное комбинационное рассеяние под углом $\pi/2$ в поле волны накачки, локализованной в двух направлениях в пространстве. Получено точное решение системы укороченных уравнений и показано, что характер взаимодействия волн существенно зависит от размеров области локализации волны накачки и ее амплитуды. Исследовано изменение амплитуд параметрически связанных волн в допороговой области параметров.

В настоящее время существует много работ (см., например, [1, 2, 14]), в которых рассматривалось вынужденное комбинационное рассеяние в поле волны накачки, локализованной в пространстве вдоль одного направления (плоский слой). В этих работах показано, что для размеров области локализации, превышающих определенную величину, зависящую от амплитуды волны накачки, имеет место абсолютная неустойчивость. Такая неустойчивость возникает только тогда, когда проекции групповых скоростей взаимодействующих волн в направлении, перпендикулярном к границе слоя, имеют противоположные знаки. При этом могут возбуждаться несколько мод, отличающихся координатными зависимостями огибающих амплитуд и имеющих разные пороги и инкременты. В ряде работ была исследована зависимость амплитуд неустойчивых волн от координаты [14]. В частности, для первой моды, имеющей наиболее низкий порог, было показано, что внутри области взаимодействия существует единственный максимум амплитуды. Впоследствии в ряде работ аналогичные вопросы обсуждались применительно к неоднородной плазме [3, 4], а также рассматривалось поле волны, амплитуда которой не постоянна на толщине слоя [5].

Недавно в работе [12] исследовался вопрос о вынужденном комбинационном рассеянии под углом 90° (боковое рассеяние) при двумерной локализации волны накачки. Было показано, что выход одной из волн через границу области взаимодействия стабилизирует абсолютную неустойчивость. При этом возникает экспоненциальное нарастание амплитуд взаимодействующих волн вдоль направления распространения волны накачки. Изменение амплитуд в пространстве изучалось в работе [12] на основе приближенного анализа их лапласовских образов.

Цель данной работы — более детальное исследование пространственных зависимостей амплитуд волн при двумерной локализации волны накачки. В отличие от работы [12] найдено точное решение соответствующей системы укороченных уравнений и исследовано влияние на характер взаимодействия волн размеров области локализации волны накачки и ее амплитуды. Рассмотрено изменение в пространстве амплитуд рассеянных и низкочастотных (звуковых) связанных волн. Показано, что в допороговой области параметров возни-

кают решения для амплитуд взаимодействующих волн, не зависящие от координаты, направленной вдоль распространения волны накачки. В поперечном направлении огибающие амплитуды либо достигают максимума внутри области взаимодействия, либо изменяются монотонно в зависимости от амплитуды волны накачки и диссипации волн.

1. Рассмотрим вынужденное рассеяние на примере ВРМБ. Используем систему укороченных уравнений для амплитуд двух волн a_1 и a_2 (звуковой и рассеянной электромагнитной), взаимодействующих с волной накачки, локализованной в плоскости xOy :

$$v_{1x} \frac{\partial a_1}{\partial x} + v_{1y} \frac{\partial a_1}{\partial y} + \gamma_s a_1 = v_1 a_2, \quad v_{2x} \frac{\partial a_2}{\partial x} - v_{2y} \frac{\partial a_2}{\partial y} + \gamma_t a_2 = v_2 a_1, \quad (1)$$

где $a_1 = i \delta N / N_0$, δN — возмущение концентрации электронов, $a_2 = \delta E$ — амплитуда поля рассеянной волны, $v_{1x(1y)} = k_{1x(1y)} v_s^2 / \omega_1$, $v_{2x(2y)} = k_{2x(2y)} c^2 / \omega_2$ — проекции групповых скоростей на направления Ox и Oy , v_s — скорость звука, ω_1 — частота звуковой волны, ω_2 — частота рассеянной волны, $\gamma_s = \nu_i / 2$ — декремент затухания звуковой волны, $\gamma_t = \omega_{Le}^2 \nu_e / 2 \omega_2^2$ — декремент затухания рассеянной волны, ω_{Le} — ленгмюровская частота электронов, ν_e — эффективная частота столкновений электронов с тяжелыми частицами, ν_i — частота столкновений ионов с нейтральными частицами или ионами другого сорта, $v_{1,2}$ — коэффициенты нелинейной связи волн; $v_1 = ze^2 \sqrt{k_{1x}^2 + k_{1y}^2} \mathcal{E}_0 / 4 m m_i \omega_0 \omega_2 v_s$, $v_2 = \omega_{Le}^2 \mathcal{E}_0^* / 4 \omega_0$; ω_0 , \mathcal{E}_0 — частота и амплитуда волны накачки, которые считаются заданными; e , m , N_0 — заряд, масса и концентрация электронов, z , m_i — зарядовое число и масса ионов.

Систему уравнений (1) можно получить из уравнений гидродинамики с учетом ponderomotorных сил и уравнений поля [7]. При ее выводе предполагается, что частота рассеянной (ω_2) и звуковой волн (ω_1) связана с частотой волны накачки условием $\omega_0 = \omega_1 + \omega_2$ и волна накачки распространяется вдоль оси Ox слева направо.

Будем считать, что волна накачки локализована в прямоугольной области. Введем систему координат, связанную с указанным прямоугольником и рассмотрим боковое рассеяние, когда одна из волн (рассеянная поперечная волна a_2) распространяется вдоль оси Oy (рис. 1). Частоту волны a_1 считаем намного меньше, чем частоты волны накачки и рассеянной волны ($\omega_1 \ll \omega_0 \sim \omega_2$). При этом звуковая волна распространяется под углом $\pi/4$ к оси Ox , так что $v_{1x} = v_{1y}$. Используя эти обстоятельства, запишем уравнения (1) в виде

$$\frac{\partial a_1}{\partial x} + \frac{\partial a_1}{\partial y} + \gamma_1 a_1 = \mu_1 a_2, \quad -\frac{\partial a_2}{\partial y} + \gamma_2 a_2 = \mu_2 a_1, \quad (2)$$

где $\mu_1 = v_1 / v_1 \simeq ze^2 k_0 \mathcal{E}_0 / 2 m m_i \omega_0^2 v_s^2$, $\mu_2 = v_2 / v_2 \simeq \omega_{Le}^2 \mathcal{E}_0^* / 4 k_0 c^2$, $\gamma_1 = \gamma_s / v_1 = v_i / \sqrt{2} v_s$, $\gamma_2 = \gamma_t / v_2 \simeq \omega_{Le}^2 \nu_e / 2 \omega_0 k_0 c^2$; k_0 — волновое число волны накачки.

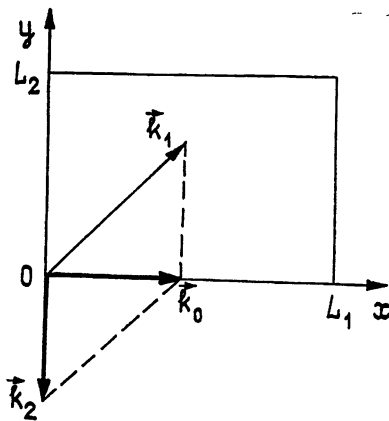


Рис. 1.

Будем считать, что на границе, через которую первая волна входит в область локализации волны накачки, она имеет нулевую амплитуду, а амплитуда второй волны постоянная и равна C :

$$a_1(0, y) = 0; \quad (3)$$

$$a_1(x, 0) = 0, \quad a_2(x, L_2) = C. \quad (4)$$

Для решения задачи произведем в уравнениях (2) преобразование Лапласа по x , используя условия (3). В результате для лапласовских изображений $a_1(p, y)$ и $a_2(p, y)$ получим с учетом граничных условий (4):

$$a_1 = C\mu_1/\Delta p (e^{ix_1 y} - e^{ix_2 y}); \quad (5)$$

$$a_2 = \frac{C}{p\Delta} [(p + \gamma_1 + ix_1) e^{ix_1 y} - (p + \gamma_1 + ix_2) e^{ix_2 y}]; \quad (6)$$

где

$$\Delta = (p + \gamma_1 + ix_1) e^{ix_1 L_2} - (p + \gamma_1 + ix_2) e^{ix_2 L_2}; \quad (7)$$

$$x_{1,2} = (i/2) [p + q_1 \pm \sqrt{(p + q_2)^2 - p_0^2}], \quad p_0^2 = 4\mu_1\mu_2. \quad (8)$$

В выражении (8) использованы обозначения

$$q_1 = \gamma_1 - \gamma_2, \quad q_2 = \gamma_1 + \gamma_2. \quad (9)$$

Выражения (5) и (6) содержат особенности относительно переменной p двух видов. Первый вид особенностей соответствует $p=0$ и возникает из-за выбора граничных условий. Второй вид особенностей связан с нулями выражения (7), и именно они определяют характер изменения амплитуд волн в пространстве на больших расстояниях x .

2. Для исследования изменения амплитуд можно приближенно решать трансцендентное уравнение (7) относительно переменной p , как это сделано в работе [12]. В этой работе мы используем другой метод, развитый при исследовании переходных процессов в линейных электрических цепях [9] и использованный в работе [8], который позволяет получить точное решение поставленной задачи в виде ряда. Согласно этому методу интегрирование по p ведется вдоль такой прямой, чтобы на ней выполнялись неравенства

$$\operatorname{Re}(p + q_2) > 0, \quad \operatorname{Re}(\sqrt{(p + q_2)^2 - p_0^2}) > 0.$$

Можно доказать [10], что на этой прямой справедливо условие

$$\left| \frac{e^{i(x_1 - x_2)L_2} (p + q_2 - \sqrt{(p + q_2)^2 - p_0^2})}{p + q_2 + \sqrt{(p + q_2)^2 - p_0^2}} \right| < 1,$$

и записать входящий в формулы (5) и (6) знаменатель в виде

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{-2e^{-ix_2 L_2}}{p + q_2 + \sqrt{(p + q_2)^2 - p_0^2}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{p + q_2 - \sqrt{(p + q_2)^2 - p_0^2}}{p + q_2 + \sqrt{(p + q_2)^2 - p_0^2}} \right)^n \times \quad (10)$$

$$\times \exp[in(x_1 - x_2)L_2].$$

Подставим разложение (10) в формулы (5), (6) и используем известные соотношения для обратного преобразования Лапласа каждого из членов ряда. В результате получим решение для a_1 и a_2 в виде суммы членов, отличных от нуля только в определенных интервалах измене-

ния координаты x . Ниже приведены первые пять членов, которые полностью определяют решение при $x < 2L_2$:

$$\begin{aligned}
 a_1(x, y) = & 2C\mu_1 \exp \left[-\frac{1}{2}(L_2 - y)(q_2 - q_1) \right] \times \\
 & \times \left\{ \theta(x) F_{(1)} \left[x; \frac{1}{2}(L_2 - y) \right] - \theta(x - y) \exp(-q_2 y) F_{(1)} \left[x - y; \right. \right. \\
 & \left. \left. \frac{1}{2}(L_2 + y) \right] + \theta(x - L_2) \exp(-q_2 L_2) F_{(3)} \left[x - L_2; \frac{1}{2}(3L_2 - y) \right] - \right. \\
 & - \theta(x - L_2 - y) \exp[-q_2(L_2 + y)] F_{(3)} \left[x - L_2 - y; \frac{1}{2}(3L_2 + y) \right] + \\
 & + \theta(x - 2L_2) \exp(-2q_2 L_2) F_{(5)} \left[x - 2L_2; \frac{1}{2}(5L_2 - y) \right] - \\
 & \left. - \theta(x - 2L_2 - y) \exp[-q_2(2L_2 + y)] F_{(5)} \left[x - 2L_2 - y; \frac{1}{2}(5L_2 + y) \right] \right\}; \quad (11)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a_2(x, y) = & C \exp \left[-\frac{1}{2}(L_2 - y)(q_2 - q_1) \right] \left\{ \theta(x) G_0 \left[x; \frac{1}{2}(L_2 - y) \right] - \right. \\
 & - p_0 \left(\theta(x - y) \exp(-q_2 y) F_{(2)} \left[x - y; \frac{1}{2}(L_2 + y) \right] - \theta(x - L_2) \times \right. \\
 & \times \exp(-q_2 L_2) F_{(2)} \left[x - L_2; \frac{1}{2}(3L_2 - y) \right] \left. \right) - p_0 \left(\theta(x - L_2 - y) \times \right. \\
 & \times \exp[-q_2(L_2 + y)] F_{(4)} \left[x - L_2 - y; \frac{1}{2}(3L_2 + y) \right] - \\
 & \left. - \theta(x - 2L_2) \exp(-2q_2 L_2) F_{(4)} \left[x - 2L_2; \frac{1}{2}(5L_2 - y) \right] \right) - \\
 & - p_0 \left(\theta(x - 2L_2 - y) \exp[-q_2(2L_2 + y)] F_{(6)} \left[x - 2L_2 - y; \right. \right. \\
 & \left. \left. \frac{1}{2}(5L_2 + y) \right] - \theta(x - 3L_2) \exp(-3q_2 L_2) F_{(6)} \left[x - 3L_2; \frac{1}{2}(7L_2 - y) \right] \right) \left. \right\}, \quad (12)
 \end{aligned}$$

где

$$F_\nu(x; \beta) = \int_0^x \exp(-q_2 \xi) \frac{\xi^\nu}{[\xi(\xi + 2\beta)]^{(\nu+1)/2}} \times \quad (13)$$

$$\times \left\{ \nu \xi \frac{I_\nu(p_0 [\xi(\xi + 2\beta)]^{1/2})}{p_0 [\xi(\xi + 2\beta)]^{1/2}} + \beta I_{\nu-1}(p_0 [\xi(\xi + 2\beta)]^{1/2}) \right\} d\xi;$$

$$G_0(x; \beta) = 1 + p_0 \beta \int_0^x \exp(-q_2 \xi) \frac{I_1(p_0 [\xi(\xi + 2\beta)]^{1/2})}{[\xi(\xi + 2\beta)]^{1/2}} d\xi, \quad (14)$$

I_ν — модифицированные функции Бесселя,

Заметим, что каждый из членов суммы в формулах (11) и (12) «включается» только начиная с определенного значения x . Так, при $x < L_2$ решения (11) и (12) содержат только по два слагаемых. При $x < 2L_2$ необходимо учитывать все пять выписанных слагаемых. При дальнейшем увеличении x число слагаемых возрастает.

3. Входящие в выражения (11), (12) функции (13), (14) с ростом x стремятся к постоянным значениям только при выполнении неравенства $q_2 > p_0$, которое выполняется лишь при достаточно большой диссипации волн:

$$\gamma_s/v_1 + \gamma_t/v_2 > 2(v_1v_2/v_1v_2)^{1/2}. \quad (15)$$

Неравенство (15) является также условием того, что при $x \rightarrow \infty$ основной вклад в решения (11), (12) дают функции $F_{(1)}(x; \beta)$ и $G_0(x; \beta)$. Остальные слагаемые в этом случае содержат дополнительные степени множителя p_0/q_2 и являются малыми. Функции $F_{(1)}(x; \beta)$ и $G_0(x; \beta)$ при $x \rightarrow \infty$ стремятся к предельным значениям [13]:

$$F_{(1)}(x; \beta) \rightarrow \frac{\exp[\beta(q_2 - \sqrt{q_2^2 - p_0^2})]}{q_2 + \sqrt{q_2^2 - p_0^2}} \simeq \frac{1}{2q_2} \exp\left(\frac{\beta p_0^2}{2q_2}\right); \quad (16)$$

$$G_0(x; \beta) \rightarrow \exp[\beta(q_2 - \sqrt{q_2^2 - p_0^2})] \simeq \exp\left(\frac{\beta p_0^2}{2q_2}\right). \quad (17)$$

Подставляя (16), (17) в формулы (11), (12), получим

$$a_1 = C\mu_1 \frac{e^{-k_1 L_2}}{\gamma_1 + k_1} (e^{k_1 y} - e^{k_2 y}); \quad (18)$$

$$a_2 = C e^{-k_1(L_2 - y)}, \quad (19)$$

где

$$k_{1,2} = (1/2) (-q_1 \pm \sqrt{q_2^2 - p_0^2}). \quad (20)$$

Выражения (18), (19) показывают, что при выполнении условия (15) в системе взаимодействующих волн устанавливается состояние, не зависящее от переменной x .

Рассмотрим функции (18), (19) в двух случаях:

а) $\gamma_1 > \gamma_2$ (длина свободного пробега низкочастотных волн меньше, чем длина свободного пробега рассеянной поперечной волны). В этом случае функция (19) при $v_1v_2 > \gamma_s\gamma_t$ монотонно нарастает от точки $y = L_2$ к точке $y = 0$. Выражение (20) в этом пределе принимает вид $k_1 \simeq \gamma_2 - (p_0^2/4\gamma_1) < 0$, $k_2 \simeq -\gamma_1$. В отличие от этого функция (18) изменяется немонотонно и достигает максимального значения при $y \simeq (v_1/\gamma_s) \ln(v_2/v_1) (\gamma_s^2/v_1v_2)$. Если интенсивность волны накачки такова, что выполняется условие $v_1v_2 < \gamma_s\gamma_t$ (соответственно $k_1 > 0$), то функции (18), (19) монотонно убывают от точки $y = L_2$ к точке $y = 0$;

б) $\gamma_1 < \gamma_2$. В этом случае, согласно (20), $k_1 \simeq \gamma_2 > 0$ и, следовательно, функция (19) только убывает от точки $y = L_2$ к точке $y = 0$, а функция (18) при $v_1v_2 > \gamma_s\gamma_t$ (соответственно $k_2 \simeq -\gamma_1 + p_0^2/4\gamma_2 > 0$) немонотонно возрастает и при $y \simeq (v_2/\gamma_t) \ln(v_2/v_1) (v_1v_2/\gamma_t^2)$ достигает максимального значения. При небольшом значении интенсивности волны накачки ($k_2 < 0$) функция (18) монотонно убывает. Качественно картина изменения амплитуд волн показана на рис. 2а, б, где пунктирными линиями изображена функция a_1 . Заметим, что расстояние, на котором функции a_1 и a_2 практически не зависят от x , согласно выражениям (16), (17) приближенно равно

$$x \approx \begin{cases} \frac{1}{\gamma_1 + \gamma_2} & \text{при } p_0^2(L_2 - y) < q_2 = \gamma_1 + \gamma_2 \\ \frac{p_0^2(L_2 - y)}{q_2^2} & \text{при } p_0^2(L_2 - y) > q_2 \end{cases} \quad (21)$$

Следует еще раз пояснить условия, при которых получены обсуждавшиеся решения (18) и (19). Неравенство (15) является достаточным условием отсутствия конвективного усиления волн вдоль оси Ox при любых значениях размера L_2 . Для того чтобы оно выполнялось, амплитуда волны накачки должна быть ограничена сверху. С другой стороны, неравенство $v_1 v_2 > \gamma_s \gamma_t$ ограничивает амплитуду волны накачки снизу и является условием нарастания волн в направлении оси Oy . При этом экспоненциально нарастает лишь та из волн, для которой длина свободного пробега меньше.

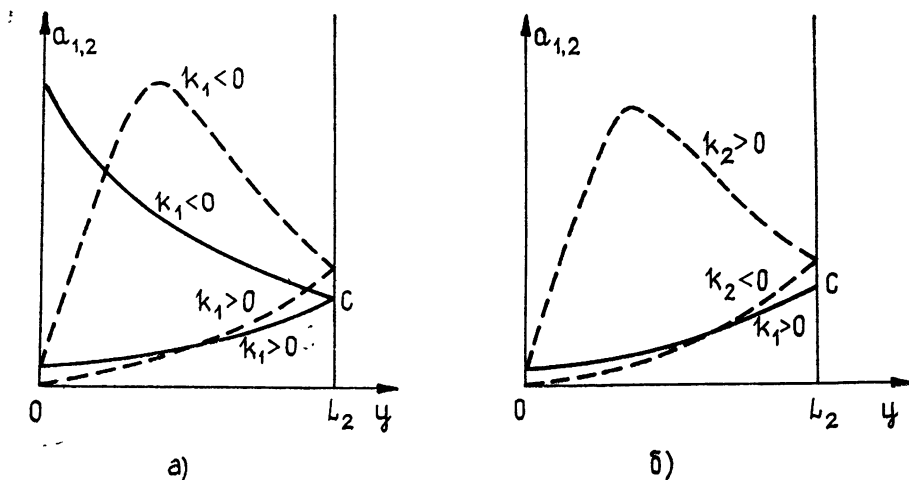


Рис. 2.

Заметим, что неравенство (15) совпадает с условием отсутствия абсолютной неустойчивости для встречных волн в случае волны накачки, локализованной в одном направлении [8]. Такое совпадение не случайно. Учитываемая в данной работе зависимость амплитуд от переменной x аналогична зависимости от времени в задаче с одномерной локализацией поля. Поэтому экспоненциальное нарастание амплитуд волн с координатой x (конвективное усиление) возникает при тех же условиях, что и нарастание амплитуд со временем (абсолютная неустойчивость) при одномерной локализации поля.

Таким образом, в данной работе развит метод точного решения системы уравнений, описывающих стационарное боковое вынужденное рассеяние в поле двумерно-локализованной волны накачки. В отличие от работы [12], где на базе приближенного метода исследованы нарастающие по экспоненциальному закону вдоль оси Ox решения, в этой работе найдены решения, которые при достаточно больших значениях x не зависят от этой переменной. Показано, что именно такие решения возникают в допороговой области параметров (при выполнении условия (15)).

В заключение искренне хочу поблагодарить Л. М. Горбунова за руководство работой и большую помощь при ее выполнении, а также Р. Р. Рамазашвили за полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Kroll N. M. — J. Appl. Phys, 1965, 36, № 1, p. 34.
- 2 Bobroff D. L., Haus H. A. — J. Appl. Phys., 1967, 38, № 1, p. 390
- 3 Андреев А. А., Федоров В. И. — Письма в ЖТФ, 1977, 3, № 24, с. 1354.
4. Пилюя А. Д. — ЖЭТФ, 1973, 64, № 4, с. 1237.
- 5 Reiman A. H., Bers A., Kaup D. L. — Phys. Rev. Lett., 1977, 39, № 5, p. 275.
- 6 Reiman A. H. — Phys. Fluids, 1978, 21, № 6, p. 1000.
7. Горбунов Л. М. — УФН, 1973, 109, вып. 4, с. 631.
- 8 Горбунов Л. М. — ЖЭТФ, 1974, 67, № 4 (10), с. 1386.
9. Конторович М. И. Операционное исчисление и процессы в электрических цепях — М.: Сов. радио, 1975
- 10 Kroll N. M., Kelleu P. L. — Phys. Rev, 1971, 14, № 2, p. 763
11. Бейтман Г., Эрдейи А. Таблицы интегральных преобразований. — М.: Наука, 1969, т. I
- 12 Горбунов Л. М., Салихов Д. К. — Тезисы докладов третьей Всесоюзной конференции по взаимодействию электромагнитных излучений с плазмой. — Алма-Ата, 22—24 сентября 1982, с. 64.
13. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. — М.: Физматгиз, 1963
14. Горбунов Л. М. — ЖТФ, 1977, 47, вып. 1, с. 36

Физический институт им. П. Н. Лебедева
АН СССР

Поступила в редакцию
15 марта 1983 г.

ON THE THEORY OF STIMULATED COMBINATION SCATTERING IN THE BOUNDED SPACE REGION

D. K. Salikhov

Stimulated combination scattering under the angle $\pi/2$ in the pump wave field, two dimensionally localized in space, is considered. The exact solution of the reduced set of equations is obtained. The character of wave interaction depends essentially on the pump wave localization region and its amplitude. Parametrically coupled wave amplitude variation in the subthreshold region is investigated.
