

УДК 535 371

## МОДИФИЦИРОВАННОЕ УРАВНЕНИЕ ОДНОМОДОВОЙ КИНЕТИКИ СВЕРХИЗЛУЧЕНИЯ

*Р. В. Арутюнян, Н. А. Енаки, Ю. А. Ильинский*

Предложен новый способ расщепления цепочки квантовых уравнений, который учитывает флуктуации разности населенности уровней атомов вблизи максимума интенсивности сверхизлучения. Получена новая система уравнений, описывающая более широкий и асимметричный импульс сверхизлучения по сравнению с результатами [1-4]. Новые решения улучшают согласие теории с экспериментом [5].

**Введение.** При выводе уравнений сверхизлучения (СИ) из исходной цепочки квантовых уравнений используется общепринятое расщепление трехчастичных корреляторов [1-4]:

$$\langle R_+^l R_z^m R_-^l \rangle = \langle R_z^m \rangle \langle R_+^l R_-^l \rangle, \quad (1)$$

где  $R_+^l (R_-^l)$  — атомные операторы рождения (уничтожения) возбужденного состояния  $l$ -го атома и  $R_z^l$  — оператор разности населенностей уровней  $l$ -го атома. Следует подчеркнуть, что такой способ расщепления цепочки квантовых уравнений в марковском приближении приводит к симметричной форме импульса СИ относительно времени задержки  $t_0$ .

Экспериментально [5] наблюдается асимметричный импульс СИ, ширина которого больше получаемой в квантовой теории СИ. Так как вышеуказанное расщепление не является единственно возможным, то представляет интерес исследование кинетики СИ при различных способах расщепления цепочки квантовых уравнений.

В настоящей статье дается анализ различных способов расщепления трехчастичных корреляторов, которые приводят к новым уравнениям кинетики СИ. Также показано, что расщепление (1) вблизи максимума интенсивности СИ дает наибольшую погрешность. Расщепление, рассмотренное ниже, позволяет точнее описать кинетику СИ вблизи пика интенсивности СИ. Получаемая при этом ширина импульса СИ лучше согласуется с экспериментом.

**Цепочка квантовых уравнений, анализ различных типов расщеплений.** Рассмотрим систему из  $N$  инвертированных некоррелированных двухуровневых атомов, заключенных в объеме  $V$ . Гамильтониан такой системы

$$H = \sum_l \hbar \omega_0 R_z^l + \sum_k \hbar \omega_k a_k^+ a_k + i \omega_0 d c^{-1} (\mathbf{u}, \sum_l [A^+(\mathbf{r}_l) R_-^l - \text{э.с.}]), \quad (2)$$

где  $\mathbf{u}$  — единичный вектор в направлении дипольного момента,  $d$  — дипольный момент,  $\omega_0$  — резонансная частота перехода,  $A^-(\mathbf{r}_l) (A^+(\mathbf{r}_l))$  — положительно (отрицательно) частотная часть потенциала электромагнитного поля (ЭМП),  $a_k^+ (a_k)$  — оператор рождения (уничтожения) фотона в состоянии « $k$ ».

Предположим, что внешнее ЭМП находится в вакуумном состоянии. Тогда, учитывая решение операторного уравнения Максвелла, векторный потенциал  $A^+(\mathbf{r}_l)A^-(\mathbf{r}_l)$  можно представить через атомные операторы и вакуумные операторы ЭМП,

$$A^+(\mathbf{r}_l, t) = i \frac{\omega_0 d}{c} \sum_m \frac{[n_{lm}, [n_{lm}, \mathbf{u}]]}{r_{lm}} R_m^+ \left( t - \frac{r_{lm}}{c} \right) + A_v^+(\mathbf{r}_l, t), \quad (3)$$

где  $r_{jm} = |\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_m|$ ,  $n_{lm} = (\mathbf{r}_l - \mathbf{r}_m) r_{lm}^{-1}$ ,  $A_v^+(\mathbf{r}_l)$  — вакуумная часть потенциала ЭМП.

После усреднения кинетических уравнений для атомных операторов по вакуумным состояниям ЭМП получаем следующую цепочку квантовых уравнений:

$$\frac{dR_z^l}{dt} = -\frac{1}{\tau_0} \left( R_z^l + \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{2\tau_0} \sum_{m \neq l} C_{ml} D_{ml}, \quad (4)$$

$$\frac{dD_{ml}}{dt} = -\left( \frac{1}{\tau_0} + \frac{1}{T_2} \right) D_{ml} + \frac{1}{\tau_0} \left( \sum_{n \neq m} C_{nm} F_{nml} + \sum_{n \neq l} C_{nl} F_{nlm} \right),$$

где  $\tau_0 = 3\hbar c^3 / 4\omega^3 d^2$  — время спонтанного распада,  $T_2$  — время релаксации дипольного момента,  $C_{ij} = \sin(\omega_0 c^{-1} r_{ij}) / (\omega_0 c^{-1} r_{ij})$ ,

$$D_{ml} = \langle \tilde{R}_+^m(t - r_{ml}c^{-1}) \tilde{R}^l(t) \rangle + \text{э.с.}; \quad (5a)$$

$$F_{nml} = \left\langle \tilde{R}_+^m \left( t - \frac{r_{ml}}{c} - \frac{r_{nl}}{c} \right) \tilde{R}_z^m \left( t - \frac{r_{ml}}{c} \right) \tilde{R}_-^l(t) \right\rangle + \text{э.с.}; \quad (5b)$$

$$F_{nlm} = \left\langle \tilde{R}_+^m \left( t - \frac{r_{ml}}{c} \right) \tilde{R}_z^l(t) \tilde{R}_-^n \left( t - \frac{r_{nl}}{c} \right) \right\rangle + \text{э.с.} \quad (5в)$$

Здесь  $\tilde{R}_d$  ( $d = +, -, z$ ) — операторы Паули в представлении взаимодействия.

Чтобы решить цепочку (4) в случае, когда время кооперативного распада системы  $\tau_c \gg L/c$  (где  $L$  — размер системы), мы должны расцепить эту систему и пренебречь запаздыванием. Расщепление (1) дает большую ошибку вблизи максимума интенсивности СИ, когда  $\langle R_z^l \rangle \rightarrow 0$ . Это можно понять, учитывая тот факт, что коррелятор

$$\left[ \langle R_z^l R_+^l R_-^m \rangle - \frac{1}{2} \langle R_z^l \rangle \right] \Big|_{j=m=l} = \langle (R_z^l)^2 \rangle = \frac{1}{4}, \quad (6a)$$

в то время как расщепление (1) аппроксимирует (6a) выражением

$$\left[ \langle R_z^l \rangle \langle R_+^l R_-^m \rangle - \frac{1}{2} \langle R_z^l \rangle \right] \Big|_{j=m=l} = \langle R_z^l \rangle^2. \quad (6b)$$

Очевидно, что (6a) сильно отличается от (6b), когда  $\langle R_z^l \rangle \rightarrow 0$ , и лишь на хвосте пика, при  $\langle R_z^l \rangle \rightarrow \pm 1/2$ , описывает более точно корреляцию между атомами (более подробно см. обзор по теории ферромагнетизма [6]). Для удовлетворения (6a) мы представляем  $R_z^l$  через  $R_+^l$  и  $R_-^l$ :

$$R_z^l = \frac{1}{2} (R_+^l R_-^l - R_-^l R_+^l) = \frac{i}{2} - R_-^l R_+^l. \quad (7)$$

Следует подчеркнуть, что операторы  $R_+^j$  и  $R_-^l$  являются ферми-операторами, когда они принадлежат одному атому, в том смысле, что они удовлетворяют антикоммутационным соотношениям:

$$R_+^j R_-^l + R_-^l R_+^j = 1, \quad (8)$$

и бозе-операторами, когда они принадлежат разным атомам, так как они удовлетворяют коммутационным соотношениям:

$$(R_+^j R_-^l - R_-^l R_+^j) = 0, \quad l \neq j. \quad (9)$$

Так как в цепочке (4) операторы расположены в нормальном упорядочении (такое упорядочение было получено в результате исключения вакуумной части фотонных операторов), то мы постараемся расцепить систему, не нарушая расположения операторов в корреляторе. Это необходимо, поскольку атомные операторы относятся к различным моментам времени. Учитывая тот факт, что операторы Паули являются ферми-операторами для одного атома и бозе-операторами, когда они принадлежат разным атомам, мы расцепляем наши корреляторы по аналогии с теоремой Вика для бозонных и фермионных операторов:

$$\langle R_+^l(t) R_+^m(t') R_-^m(t') R_-^l(t'') \rangle = \langle R_+^m(t') R_-^m(t') \rangle \times \quad (10a)$$

$$\times \langle R_+^l(t) R_-^l(t'') \rangle - \langle R_+^l(t) R_-^m(t') \rangle \langle R_+^m(t') R_-^l(t'') \rangle;$$

$$\langle R_+^j(t) R_-^m(t') R_+^m(t') R_-^l(t'') \rangle = \langle R_+^l(t) R_-^m(t') \rangle \times \quad (10b)$$

$$\times \langle R_+^m(t') R_-^l(t'') \rangle + \langle R_-^m(t') R_+^m(t') \rangle \langle R_+^l(t) R_-^l(t'') \rangle.$$

Нетрудно проверить, что расцепление (10) удовлетворяет условию (6a).

Таким образом, после пренебрежения запаздыванием цепочка (4) с учетом (10) принимает вид

$$\frac{dR_z^l}{dt} = -\frac{1}{\tau_0} \left( R_z^l + \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{2\tau_0} \sum_{m \neq l} C_{ml} D_{ml},$$

$$\frac{dD_{ml}}{dt} = -\left( \frac{1}{\tau_0} + \frac{1}{T_2} \right) D_{ml} + \frac{1}{\tau_0} \left[ \sum_{n \neq m} C_{mn} (N_{nlm} - M_{nml}) + \right. \quad (11)$$

$$\left. + \sum_{n \neq l} C_{nl} (N_{nml} - M_{nlm}) \right],$$

где

$$N_{nml} = \langle R_z^l \rangle \langle R_+^m R_-^n \rangle + \langle R_+^m R_-^n \rangle, \quad (12)$$

$$M_{nml} = \langle R_+^m R_-^l \rangle \langle R_+^n R_-^m \rangle + \langle R_+^m R_-^n \rangle \langle R_+^l R_-^m \rangle.$$

Далее подчеркнем, что если вначале пренебречь запаздыванием, а потом расцепить цепочку (4), то число способов расцепления данной цепочки увеличивается. (Нетрудно заметить, что, когда  $j \neq m \neq l \neq j$ , наряду с расцеплением (10a) при  $t_1 = t_2 = t$  возможно и расцепление с положительным знаком во втором члене.) Эта неоднозначность связана со свойствами операторов Паули (7), (8) и (9). Такая ситуация рассматривалась при построении теории гейзенберговского ферромаг-

нетизма вблизи точки Кюри. Кэлен [7] показал, что оператор  $R_z^l$  выражается через  $R_+^l$  и  $R_-^l$  неоднозначно:

$$R_z^l = \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2}(1 - \alpha)R_+^l R_-^l - \frac{1}{2}(1 + \alpha)R_-^l R_+^l, \quad (13)$$

где  $\alpha$  — произвольное  $c$ -число. Таким образом, учитывая только бозонные свойства трехчастичного коррелятора, расщепление сводится к

$$\langle R_+^n R_z^m R_-^l \rangle = \langle R_z^m \rangle \langle R_+^n R_-^l \rangle - \alpha \langle R_+^n R_-^m \rangle \langle R_+^m R_-^l \rangle. \quad (14)$$

Часто для удовлетворения условия (6а) берут параметр  $\alpha$  в виде  $\alpha = [2\langle R_z^m \rangle]^k$  (где  $k$  — произвольное число). При  $k=0$  расщепление (14) сводится к расщеплению (10). Расщепление (14) изменяет вид цепочки (11) в результате замены

$$M_{nml} \rightarrow [2\langle R_z^m \rangle]^k M_{nml}. \quad (15)$$

Отметим, что если даже  $R_z^l$  и представляется в виде (13), то, учитывая способ расщепления (10) для бозонных и фермионных операторов в корреляторах цепочки, получаем единственную замкнутую цепочку (11).

Если продифференцируем еще раз по времени и просуммируем по  $l$  первое уравнение цепочки (11), то с учетом второго и первого уравнений цепочки получаем выражение

$$\begin{aligned} \frac{d^2 R}{dt^2} = & -\frac{1}{\tau_0} \frac{dR}{dt} - \frac{1}{2\tau_0^2} \sum_{\substack{m,l \\ m \neq l}} C_{ml} \left( \sum_{n \neq l} C_{nl} \langle R_z^l \rangle D_{ml} + \right. \\ & \left. + \sum_{n \neq m} C_{nm} \langle R_z^m \rangle D_{ln} \right) + \frac{2}{N} \frac{dR}{dt} \frac{dR}{dt} - \frac{4}{\tau_0 N} \left( \frac{N}{2} + R \right) \times \\ & \times \left[ \frac{dR}{dt} + \frac{1}{2\tau_0} \left( \frac{N}{2} + R \right) \right] - \left( \frac{1}{\tau_0} + \frac{1}{T_2} \right) \left[ \frac{dR}{dt} + \frac{1}{\tau_0} \left( R + \frac{N}{2} \right) \right], \end{aligned} \quad (16)$$

где  $R = \sum_l R_z^l$ . Последние члены в (16) получены с учетом первого уравнения цепочки (11).

Учитывая тот факт, что  $\langle R_z^m \rangle$  ( $\langle R_z^l \rangle$ ) — плавная функция от пространственных координат, сумма по  $m$  в первом члене (по  $l$  во втором члене) (16) может быть вычислена в двух предельных случаях:

$$\sum_m C_{lm} C_{mn} R_z^m = \begin{cases} \frac{\pi c}{L\omega_0} C_{ln} R & \text{при } F \ll 1 \\ \frac{\pi c^2}{A\omega_0^2} C_{ln} R & \text{при } F \gg 1 \end{cases}, \quad (17)$$

где  $F = A/L\lambda$  — число Френеля,  $\lambda$  — длина волны поля излучения,  $A$  — площадь поперечного сечения образца,  $L$  — длина образца. Таким образом, (16) с учетом первого уравнения (11) принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{d^2 R}{dt^2} - \frac{1}{\tau_1} \frac{d}{dt} R^2 - \frac{2}{N} \frac{dR}{dt} \frac{dR}{dt} + \frac{1}{T_2} \frac{dR}{dt} = \\ = -\frac{1}{T_2 \tau_0} \left( R + \frac{N}{2} \right) + \frac{2}{\tau_1 \tau_0} R \left( R + \frac{N}{2} \right) \beta, \end{aligned} \quad (18)$$

где  $\beta = 1 - \tau_1/N\tau_0 - \kappa\tau_0/\tau_1$ ,  $\kappa$  — число мод,

$$\frac{1}{\tau_1} = \begin{cases} \frac{\pi c}{\omega L \tau_0} & \text{при } F \ll 1 \\ \frac{\pi c^2}{\omega^2 A \tau_0} & \text{при } F \gg 1 \end{cases} \quad (19)$$

В случае, когда  $1/T_2 \rightarrow 0$ , уравнение (18) принимает вид

$$\frac{d^2 R}{dt^2} - \frac{1}{\tau_1} \frac{dR}{dt} - \frac{2}{N} \frac{dR}{dt} \frac{dR}{dt} = \frac{2R}{\tau_1 \tau_0} \left( R + \frac{N}{2} \right) \beta. \quad (20)$$

Уравнение (20) отличается от уравнения Дике [1-4]:

$$\frac{d^2 R}{dt^2} + \frac{1}{\tau_0} \frac{dR}{dt} - \frac{1}{\tau_1} \frac{dR}{dt} = \frac{2R}{\tau_1 \tau_0} \left( R + \frac{N}{2} \right) \alpha, \quad (21)$$

$$\sigma = 1 - \kappa \tau_0 \tau_1^{-1}.$$

Существенное отличие между уравнением (20) и (21) состоит именно в присутствии члена  $(2/N)(dR/dt)(dR/dt)$  в левой части уравнения (20). Влияние третьего члена левой части уравнения (18) на форму и полуширину импульса СИ может быть оценено аналитическим способом. Вблизи максимума интенсивности СИ правой частью уравнения (20) можно пренебречь. Таким образом, с учетом граничных условий  $(dR/dt)|_{t=0} = -N/\tau_0$ ,  $R(t)|_{t=0} = N/2$  уравнение (20) принимает вид

$$\frac{dR}{dt} = \frac{1}{e} \frac{N^2}{\tau_1'} \exp\left(\frac{2R}{N}\right) - \frac{N}{\tau_1} \left( R + \frac{N}{2} \right), \quad \frac{1}{\tau_1'} = \frac{1}{\tau_1} - \frac{1}{N\tau_0}. \quad (22)$$

Вблизи пика СИ, когда  $R/N < 1$ , экспоненту можно представить в виде ряда

$$\exp\left(2 \frac{R}{N}\right) \simeq 1 + 2 \frac{R}{N} + 2 \frac{R^2}{N^2}. \quad (23)$$

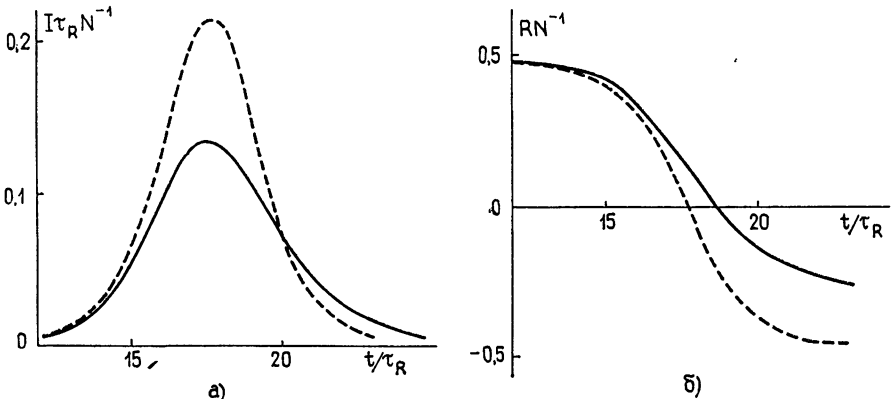


Рис 1. Зависимость а) интенсивности импульса от времени и б) разностей населенностей от времени при следующих параметрах СИ в  $C_s$  [3]:  $\tau_0 = 551$  нс,  $T_2 = 70$  нс,  $\tau_R = \tau_1 N^{-1} = 0,0018 \tau_0$ ,  $\lambda = 2,9$  мкм,  $L = 2$  см; сплошная кривая —  $\kappa = 2$ ,  $n = 3,8 \cdot 10^{10}$  1/см<sup>3</sup> (где  $n = N/V$ ), расчет согласно уравнению (18), штриховая — расчет согласно уравнениям Дике

После подстановки (23) в (22) получаем следующее решение:

$$R \simeq N \frac{0,93}{2} \operatorname{th}\left(\frac{t - t_0}{\tau_c}\right) + \frac{0,72N}{4},$$

где  $\tau_c^{-1} = 0,68 N/2\tau_1$ . Таким образом, величина  $\tau_c^{-1}$  оказывается меньше значения, найденного при общепринятом расцеплении (1). Такой же вывод можно сделать и для точечной системы, заменяя  $\tau_1 \rightarrow \tau_0$ .

Нами проведено численное интегрирование уравнений кинетики, полученных с помощью различных расцеплений, и проведено сравнение с экспериментальными результатами Гиббса [5]. На рис. 1а изображены кривые для интенсивности СИ ( $I = -dR/dt$ ) и на рис. 1б — для разности населенностей в зависимости от времени. Таким образом, уравнение (18) описывает более широкую и более асимметричную кривую для интенсивности СИ по сравнению с уравнением Дикке. Численное интегрирование показывает, что интенсивность достигает максимального значения несколько раньше, чем разность населенностей становится равной  $R=0$ .

Проведенное нами рассмотрение показывает, что использование предлагаемых в настоящей работе способов расцепления трехчастичных корреляторов в цепочке квантовых уравнений СИ позволяет улучшить описание формы импульса вблизи пика СИ. В то же время проведенное нами сравнение с экспериментом показывает, что сохраняется расхождение результатов теории с экспериментом для ширины импульсов. Последнее объясняется пренебрежением — в рамках квантовой теории — разницей в поперечной и продольной структуре поля.

#### ЛИТЕРАТУРА

- 1 Dicke R H — Phys. Rev., 1954, **93**, p. 99.
- 2 Андреев А В., Емельянов В. И., Ильинский Ю А. — УФН, 1980, **131**, с. 653.
- 3 Ressayre E., Tallet A. — Phys. Rev., 1977, **A15**, p. 2410.
- 4 Емельянов В. И., Семенов В. Н. — ЖЭТФ, 1979, **76**, с. 34.
- 5 Gibbs H. M., Vrehen Q. H. F., Hixspoor H. M. J. — Phys. Rev. Lett., 1977, **38**, p. 764
- 6 Боголюбов Н. И. Статистическая физика и квантовая теория поля. — М: Наука, 1973, с. 97.
- 7 Callen H. B. — Phys. Rev., 1963, **130**, p. 890.

Московский государственный  
университет

Поступила в редакцию  
27 декабря 1982 г.

#### A MODIFIED EQUATION OF ONE-MODE KINETICS OF SUPER-RADIANCE

*R. V. Arutyunyan, N. A. Enaki, Yu. A. Il'inskij*

The new uncoupling method of quantum equations chain is proposed in this paper. One takes into account the fluctuation of level population difference of atoms in the neighbourhood of the maximum of super-radiance intensity. The new system of equations is obtained. It describes more broad super-radiance puls in comparison with results obtained earlier. New solution improve the agreement between the theory and experiment.

---