

УДК 621.372.8

## СОБСТВЕННЫЕ МОДЫ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ВОЛНОВОДА В СРЕДЕ С НЕЛИНЕЙНОЙ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПРОНИЦАЕМОСТЬЮ

*В. И. Корнеев, Н. Н. Ахмедиев, Т. Д. Шермергор*

Проведено теоретическое исследование распространения ТЕ-волн в цилиндрическом волноводе, погруженном в среду с нелинейной диэлектрической проницаемостью, квадратично зависящей от поля  $\varepsilon = \varepsilon_0 + \alpha |E|^2$ . Показано, что для собственных мод такой системы зависимость потока энергии в волне от эффективного показателя преломления имеет  $N$ -образный вид, т. е. одному значению потока энергии соответствуют три значения эффективного показателя преломления. Для высших мод участков  $N$ -образности оказывается несколько. В работе проведен численный расчет дисперсионного соотношения рассматриваемой структуры при определенных ее параметрах, найдены участки  $N$ -образной зависимости для ряда значений толщины и относительной диэлектрической проницаемости волновода.

**1. Введение.** В работах [1–5] рассматривались самолокализованные состояния электромагнитного поля цилиндрической симметрии в среде с нелинейной проницаемостью. Было показано, в частности, что существует бесконечно много таких решений, не зависящих от угловой переменной и отличающихся числом узлов поля вдоль радиуса. С увеличением номера моды радиус самолокализованного решения, в котором поле заметно отлично от нуля, возрастает. Эти решения в некотором смысле аналогичны модам линейного волновода, у которых с ростом номера моды растет число узлов в решении. Возникает вопрос, какие собственные решения будут иметь оптический волновод с диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon_{nl}$ , не зависящей от поля волны, погруженный в среду с нелинейной проницаемостью, квадратично зависящей от приложенного поля

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \alpha |E|^2. \quad (1)$$

Для плоского волновода такая задача решалась в работах [6, 7], где был получен ряд интересных результатов, в частности,  $N$ -образная зависимость потока энергии в волноводе от эффективного показателя преломления. Оказывается, что для цилиндрического волновода имеет место такой же эффект, причем для высших мод участков  $N$ -образности оказывается несколько. В отличие от линейного случая, узлы решения могут выходить за пределы центральной части волновода. Число узлов определенной моды при этом сохраняется. В данной статье мы провели численный анализ нелинейных уравнений Максвелла и получили дисперсионные соотношения стационарных волновых решений для рассматриваемой структуры. Вопросы устойчивости этих решений будут рассмотрены в отдельной работе.

**2. Волновые уравнения в нелинейной среде.** Для того чтобы найти собственные моды волновода, необходимо получить решение уравнений Максвелла внутри и снаружи волноводной среды и затем «сшить» их на границе  $r = r_0$ . Рассмотрим сначала уравнения Максвелла в нели-

нейной среде. Для этого запишем их в цилиндрической системе координат и будем искать только решения с цилиндрической симметрией, так чтобы поля не зависели от переменной  $\varphi$ . Кроме того, в данной работе мы ограничимся рассмотрением ТЕ-мод, т. е. волн, имеющих компоненты поля  $E_\varphi, H_r, H_z$ . Для волн, распространяющихся вдоль оси  $z$ ,  $E, H \sim \exp(i\beta z - i\omega t)$  и уравнения Максвелла в нелинейной среде примут вид

$$(1/r) (d/dr) (rE_\varphi) = ik_0 H_z; \quad (2a)$$

$$k_0 (d/dr) H_z = i(k_0 \varepsilon - \beta^2) E_\varphi, \quad (2b)$$

где  $k_0 = \omega/c$  и  $\varepsilon$  определяется формулой (1). Сделаем в этих уравнениях замену  $\beta = k_0 n$ ,  $\tau = k_0 \gamma r$ ,

$$\Phi = (\sqrt{\alpha}/\gamma) E_\varphi, \quad \Psi = (i \sqrt{\alpha}/\gamma^2) H_z, \quad \gamma^2 = n^2 - \varepsilon_0. \quad (3)$$

Тогда уравнения (2) упростятся, и мы получим

$$d\Phi/d\tau = \Psi - \Phi/\tau; \quad (4a)$$

$$d\Psi/d\tau = \Phi - \Phi^3. \quad (4b)$$

Уравнения (4) не содержат каких-либо параметров и в этом смысле являются универсальными для любых сред с диэлектрической проницаемостью вида (1) при положительном  $\alpha$ . Решения нелинейных волновых уравнений для среды с конкретными  $\varepsilon_0$  и  $\alpha$  и для определенного  $n$  можно получить из решений системы (4) перенормировкой (3). Система уравнений (4) имеет бесконечное счетное множество решений  $\Phi_m(\tau)$ , обращающихся в нуль при  $\tau = 0$  и  $\tau \rightarrow \infty$ . Число корней каждой из этих функций равно номеру моды. В работе [4] численно были найдены две низшие моды этих уравнений. Мы провели численный анализ этих функций до 14-й моды. В табл. 1 приведены основные параметры

Таблица 1

Основные параметры собственных функций  $\Phi_m(\tau)$  системы (4)

$m$	$C_m$	$C_m - C_{m-1}$	$\tau_1$	$\tau_m$	$\tau_{\max}$	$\Phi_m(\tau_{\max})$	$S_m/N$
0	1,2523	—	—	—	1,58	1,748	7,69
1	2,4154	1,1631	2,70	—	1,13	2,185	23,92
2	3,5716	1,1562	2,12	5,43	0,92	2,557	48,52
3	4,7260	1,1544	1,82	8,23	0,78	2,884	81,51
4	5,8797	1,1537	1,62	11,11	0,71	3,179	122,88
5	7,0330	1,1533	1,47	14,06	0,65	3,448	172,62
6	8,1861	1,1531	1,35	17,06	0,60	3,698	230,75
7	9,3391	1,1530	1,25	20,09	0,56	3,938	297,25
8	10,4921	1,1530	1,17	23,14	0,53	4,161	372,12
9	11,6450	1,1529	1,11	26,19	0,51	4,368	455,38
10	12,7979	1,1529	1,06	29,24	0,49	4,568	547,01
11	13,9507	1,1528	1,02	32,29	0,47	4,763	647,02
12	15,1035	1,1528	0,99	35,34	0,45	4,953	755,40
13	16,2563	1,1528	0,97	38,39	0,43	5,138	872,16

этих функций. Через  $C_m$  мы обозначили производную функции  $\Phi_m(\tau)$  при  $\tau = 0$ . Из (4a) следует, что для сопряженных функций  $\Psi_m(\tau)$  имеет место равенство  $\Psi_m(0) = 2C_m$ . Введем обозначения:  $\tau_1$  — первый корень,  $\tau_m$  — наибольший корень функции  $\Phi_m(\tau)$ ,  $\tau_{\max}$  — значение аргумента, при котором функция  $\Phi_m(\tau)$  принимает максимальное значение,  $S_m$  — поток энергии в моде, определяемый по формуле

$$S_m = N \int_0^{\infty} \Phi_m^2(\tau) \tau d\tau, \quad (5)$$

где  $N = n/\sqrt{\varepsilon_0}$  — приведенный эффективный показатель преломления. Отметим, что  $S_m$  — безразмерная величина. Размерный поток энергии мы получим, домножив  $S_m$  на коэффициент  $c\sqrt{\varepsilon_0}/4k_0^2\alpha$ . Интересной особенностью собственных функций  $\Phi_m(\tau)$  является неограниченный рост производной  $C_m$  в нуле с увеличением номера моды, так что при этом величина  $C_m - C_{m-1}$  стремится к конечному пределу, равному 1,1528... Максимальное значение функции  $\Phi_m(\tau)$  принимают в точке  $\tau_m < \tau_1$ , и оно с номером моды также неограниченно возрастает.

**3. Волноводные моды.** Внутри волновода при  $\tau < \tau_0$  уравнения Максвелла в переменных (3) можно записать в виде

$$(d/d\tau)\Phi = \Psi - \Phi/\tau, \quad (d/d\tau)\Psi = g\Phi, \quad (6)$$

где  $g = (N^2 - \delta)/(N^2 - 1)$ ,  $\delta = \varepsilon_n/\varepsilon_0$ . Система уравнений (6) приводится к уравнению Бесселя, и в зависимости от знака  $g$  она имеет различные решения. При  $N^2 < \delta$  решением (6) являются функции Бесселя  $\Phi(\tau) = J_1(g\tau)$ , а при  $N^2 > \delta$  — модифицированные функции Бесселя первого порядка  $\Phi(\tau) = I_1(g\tau)$ . При нахождении собственных мод граничной задачи необходимо в точке  $\tau = \tau_0$  приравнять функции  $\Phi(\tau)$  и  $\Psi(\tau)$  для линейной и нелинейной сред. Задача решалась нами численно. Все параметры, с которыми производились расчеты, указаны в подписях к рисункам. На рис. 1 представлены три низшие моды нелинейного волновода, полученные таким способом для трех значений приведенного эффективного показателя преломления. Как видно из рисунка, особенность волновода, погруженного в нелинейную среду, состоит в том, что нули поля определенной моды могут перемещаться изнутри волновода наружу, т. е. с увеличением полного потока энергии эффективная толщина волновода растет. Но число нулей определенной моды при этом остается неизменным.

Поток энергии нелинейных волноводных мод, как и в случае чисто нелинейных волн, рассчитывается по формуле (5). Зависимость потока энергии  $S$  от приведенного эффективного показателя преломления для различных мод приведена для трех значений радиуса  $\tau_0$  на рис. 2. Как видно из рисунка, при малом радиусе  $\tau_0$  эти кривые (сплошные линии) монотонны, с увеличением потока энергии эффективный показатель преломления растет от значения, определяемого дисперсионным соотношением для линейного оптического волновода. Однако с увеличением радиуса волновода эти кривые (пунктир) уже становятся немонотонными и на некоторых участках принимают  $N$ -образный вид, причем число возникающих  $N$ -образных участков определяется номером моды. Для основной моды имеется всего один такой участок, каждая последующая мода имеет на один участок больше. Таким образом, кривые в определенном интервале изменения  $N$  имеют убывающий участок. Убывающий участок кривой содержит в себе точку со значением  $N$ , при котором нуль данной моды совпадает с границей волновода. Это не относится к самому левому участку, который для нулевой моды является единственным. При  $N \rightarrow \infty$  кривые  $S(N)$  становятся линейными:  $S = fN$ . Коэффициент  $f$  в этом соотношении зависит от радиуса волновода  $\tau_0$ .

Мы рассмотрели также случай, когда диэлектрическая проницаемость волновода меньше или равна величине  $\varepsilon_0$ . В линейном случае, как известно, волноводные моды в такой системе отсутствуют. В случае нелинейной окружающей среды волноводные решения с цилиндрической симметрией, как оказалось, существуют, но лишь при потоках

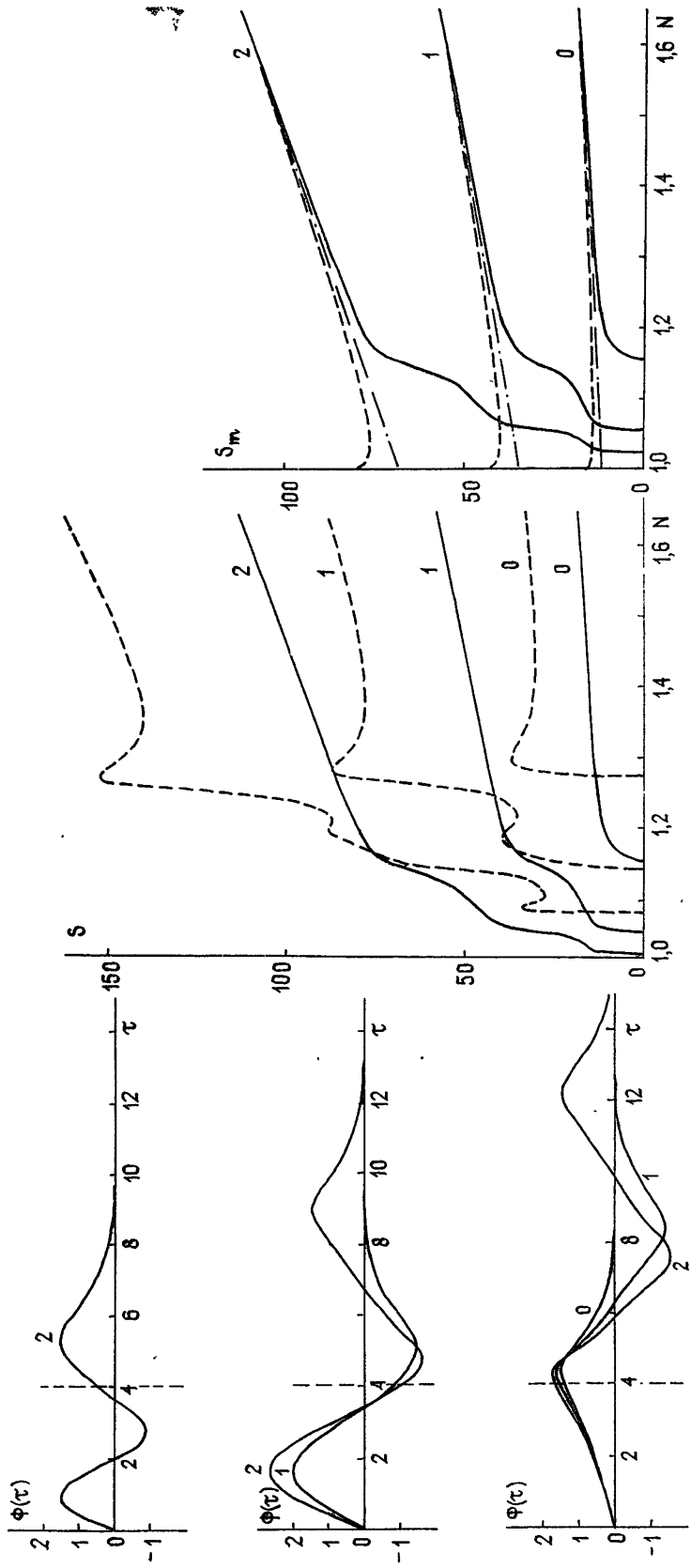


Рис. 1.

Рис. 2.

Рис. 3.

Рис. 1. Распределение поля в цилиндрическом волноводе для трех низших мод при различных величинах приведенного эффективного показателя преломления:  $N = 1,1$  (верхний рисунок),  $N = 1,2$  (средний рисунок),  $N = 1,5$  (нижний рисунок). Радиус волновода  $\tau_0 = 4$ . Цифрой над кривыми обозначен номер моды.

Рис. 2. Зависимость потока энергии от приведенного эффективного показателя преломления для трех низших мод при различных радиусах волновода.  $\tau_0 = 2$  (сплошная кривая),  $\tau_0 = 4$  (пунктир). Кривые рассчитаны при  $\delta = 2$ . Цифрой над кривыми обозначен номер моды (верхняя кривая —  $m = 2$ ).

Рис. 3. Зависимость потока энергии от приведенного эффективного показателя преломления для трех низших мод при различных значениях относительной диэлектрической проницаемости:  $\delta = 2$  (сплошная кривая),  $\delta = 1$  (штрихпунктир),  $\delta = 0,5$  (пунктир). Кривые рассчитаны при  $\tau_0 = 2$ . Цифрой над кривыми обозначен номер моды.

энергии выше некоторого критического значения. На рис. 3 представлена зависимость  $S(N)$  при различных значениях относительной диэлектрической проницаемости  $\delta = \epsilon_{\text{пл}}/\epsilon_0$ . В случае равенства  $\epsilon_0$  и  $\epsilon_{\text{пл}}$  зависимость  $S(N)$  оказывается линейной (штрихпунктир) и волноводные решения существуют при значениях  $N > 1$ . При  $\delta < 1$  кривые  $S(N)$  имеют начальный падающий участок и при  $N \rightarrow \infty$  линейную асимптоту  $S \sim fN$ , не зависящую от  $\delta$ . В этом пределе энергия поля перераспределяется в нелинейную среду и сам волновод мало влияет на структуру решения.

Таким образом, кривые  $S(N)$  для цилиндрического волновода аналогичны таким же кривым для планарного волновода, рассматривавшегося в [6, 7]. Здесь также возникает неоднозначность и возможны бистабильные состояния волноводных мод. Возможно также, что в цилиндрическом волноводе существуют и несимметричные решения, т. е. решения, зависящие от угловой переменной  $\varphi$ , аналогичные несимметричным решениям плоского волновода [7], но в рамках данной работы мы их не искали, поскольку нелинейные уравнения в этом случае усложняются.

Проведенное исследование показывает, что цилиндрический волновод, погруженный в среду с нелинейной восприимчивостью, обладает рядом интересных особенностей, в частности, неоднозначной зависимостью потока энергии от волнового вектора моды. Это может оказаться интересным для создания переключателей в устройствах оптической связи. С цилиндрическим волноводом можно проще провести экспериментальную проверку предсказываемого эффекта, чем с плоским волноводом, для которого имеет место такое же явление [7]. Отметим также, что представляется интересным исследование возможности существования несимметричных (зависящих от угловой переменной) типов волн, которое мы в данной работе не проводили, но эти волны, как и в планарном волноводе [7], могут существовать.

#### ЛИТЕРАТУРА

- 1 Chiao R. Y., Garmire E., Townes C. H. — Phys. Rev. Lett., 1964, 13, p. 479.
- 2 Янскаускас З К — Изв вузов — Радиофизика, 1966, 9, с 412
- 3 Абакаров Д. И., Акопян А. А., Пекар С. И. — ЖЭТФ, 1967, 52, с 463
- 4 Елеонский В. М., Оганесянц Л. Г., Сплин В. П. — ЖЭТФ, 1972, 62, с 81
- 5 Pohl D — Phys. Rev., 1972, A5, p. 1906.
- 6 Ахмедиев Н. Н. — ЖЭТФ, 1982, 83, с 545
7. Ахмедиев Н. Н. — Письма в ЖТФ, 1982, 8, с. 571

Московский институт  
электронной техники

Поступила в редакцию  
19 декабря 1983 г.

#### EIGENMODES OF A CYLINDRICAL WAVEGUIDE IN A MEDIUM WITH NONLINEAR DIELECTRIC PERMITTIVITY

V. I. Korneev, N. N. Akhmediev, T. D. Shermergor

Theoretical investigation has been carried out of TE wave propagation in a cylindrical waveguide plunged into a medium with nonlinear dielectric permittivity being quadratically dependent on the field  $\epsilon = \epsilon_0 + \alpha|E|^2$ . It is shown that for eigenmodes of such a system the dependence of the energy flux in a wave on the effective refraction index has  $N$ -like form, i. e. three values of the effective refraction index correspond to the one value of the energy flux. For heigher modes there are several  $N$ -like regions. The paper gives numerical calculation of the dispersive relation of the structure considered at definite parameters. Regions of  $N$ -like dependence has been found for a number of depth values and the relative dielectric permittivity of the waveguide.