

УДК 538 573

ФЛУКТУАЦИИ ИНТЕНСИВНОСТИ ВОЛНЫ В ОДНОМЕРНОЙ СЛУЧАЙНО-НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ. VIII. ВЛИЯНИЕ МОДЕЛИ СРЕДЫ

В. И. Кляцкин, И. О. Ярошук

Задача о распространении волн в поглощающих одномерных средах решается численным интегрированием уравнений метода погружения для моделей неоднородностей в виде телеграфного, гауссова-марковского процессов и процесса броуновского движения осциллятора. Статистические характеристики вычисляются на основе свойства эргодичности. Рассмотрены случаи как слабых, так и сильных флуктуаций диэлектрической проницаемости.

1. В предыдущих работах [1-4] (см. также [5]) была построена последовательная статистическая теория распространения волн в одномерной случайно-неоднородной среде. При этом использовались два приближения: гауссовость и дельта-коррелированность флуктуаций диэлектрической проницаемости $\epsilon(x)$ и возможность перейти к уравнениям с медленно меняющимися функциями на длине волны (усреднение по быстрым осцилляциям). При этом первое приближение, вообще говоря, не является необходимым (оно использовалось лишь для простоты выкладок), а второе приближение накладывает определенные ограничения на интенсивность флуктуаций диэлектрической проницаемости (см. ниже). При выполнении условий возможности перехода к уравнениям для медленных изменений статистических характеристик (малые флуктуации) и при одномасштабных флуктуациях $\epsilon(x)$ статистические характеристики волнового поля описываются коэффициентом диффузии (независимо от соотношения между длиной волны и радиусом корреляции ϵ)

$$D = (k^2/4) \Phi_\epsilon(2k), \quad (1)$$

где k — волновое число, а $\Phi_\epsilon(q) = \int_{-\infty}^{\infty} dx B_\epsilon(x) \exp\{iqx\}$ — спектральная

функция диэлектрической проницаемости, т. е. имеет место автомодельность по статистическим параметрам среды. При этом статистические характеристики волнового поля описываются соответствующим уравнением Эйнштейна—Фоккера, в связи с чем данное приближение может быть названо диффузионным. Хотя, формально, справедливость этого утверждения была установлена лишь для статистических характеристик коэффициента отражения волны, нет физических оснований сомневаться в справедливости его и для волнового поля внутри среды. Представляет, однако, определенный интерес получить все же подтверждение этому предположению и изучить статистические характеристики волнового поля в случае несправедливости диффузионного приближения, когда нет оснований надеяться на существование какой-либо автомодельности (сильные флуктуации). Современная теория, однако, при решении данной задачи сталкивается с большими трудностями. Решить задачу о

распространении волн в стохастической среде с сильными флуктуациями диэлектрической проницаемости позволяет численное моделирование, результативность которого продемонстрирована в работе [6].

2. Как и в предыдущих работах, постановка задачи такова. Пусть слой случайно-неоднородной среды занимает часть пространства $H_0 \leq x \leq H$ и справа из области $x > H$ падает на него плоская волна единичной амплитуды $\exp[-ik(x-H)]$, где k — волновое число. Если при этом $\varepsilon(x)$ описывает флуктуации диэлектрической проницаемости относительно единицы, а γ — поглощение волны в слое, то внутри слоя неоднородной среды волновое поле $U(x)$ описывается краевой задачей

$$\frac{d^2}{dx^2} U(x) + k^2 [1 + \varepsilon(x) + i\gamma] U(x) = 0, \quad (2)$$

$$U(H) + \frac{i}{k} \frac{d}{dx} U(H) = 2, \quad U(H_0) - \frac{i}{k} \frac{d}{dx} U(H_0) = 0.$$

Считаем, что вне слоя $\varepsilon(x) = \gamma = 0$. Коэффициент отражения волны от слоя среды при этом определяется равенством

$$R_H = U(H) - 1. \quad (3)$$

В работе [7] (см. также [5]) изучались статистические характеристики коэффициента отражения для моделей $\varepsilon(x)$ в виде телеграфного и обобщенного телеграфного процессов с экспоненциальной корреляционной функцией ($\langle \varepsilon(x) \rangle = 0$):

$$B_\varepsilon(x) = \sigma_\varepsilon^2 \exp(-2\nu|x|), \quad \Phi_\varepsilon(q) = 2\sigma_\varepsilon^2 l (1 + l^2 q^2)^{-1}, \quad (4)$$

где $l = 1/2\nu$ — радиус корреляции. Было показано, что описанная выше автомодельность имеет место при выполнении условий

$$\gamma \ll 1, \quad \gamma kl \ll 1, \quad \sigma_\varepsilon^2 \ll [1 + (kl)^{-2}]^{1/2}. \quad (5)$$

Первые два ограничения в (5) являются физическими требованиями задачи, и поэтому выход за рамки этих ограничений не представляет практического интереса. Третье же условие в (5) предполагает достаточно малые флуктуации $\varepsilon(x)$, что является серьезным ограничением, например, в плазме ($\sigma_\varepsilon^2 \sim 1$).

Для решения задачи перейдем к безразмерным уравнениям метода погружения (рассматривая зависимость волнового поля $U(x)$ от параметра H) [6]

$$\frac{\partial}{\partial h} U(\tilde{x}; h) = [i\alpha + (i\varepsilon(h) - \beta/2) U_h] U(\tilde{x}; h), \quad U(\tilde{x}; \tilde{x}) = U_{\tilde{x}}, \quad (6)$$

$$\frac{d}{dh} U_h = 2i\alpha (U_h - 1) + (i\varepsilon(h) - \beta/2) U_h^2, \quad U_{h_0} = 1,$$

где $\alpha = kD^{-1}$ — безразмерное волновое число, $\beta = k\gamma D^{-1}$, $h = HD$, $\tilde{x} = xD$, $U_h = U(h; h)$. Будем считать, что корреляционная функция $\varepsilon(x)$ является экспоненциальной (4). Тогда $\varepsilon(h)$ будет случайным процессом с корреляционной функцией

$$\langle \varepsilon(h) \rangle = 0, \quad \langle \varepsilon(h) \varepsilon(h') \rangle = \sigma_\varepsilon^2 \exp\{-2\nu|h - h'|\}, \quad (7)$$

где $\tilde{\sigma}^2 = (1 + 4\mu^2)\alpha/2\mu$, $\tilde{\nu} = \alpha/2\mu$, $\mu = kl$, $\alpha = 2(1 + 4\mu^2)/\mu\sigma_z^2$. В дальнейшем тильду у x писать не будем.

В качестве основных параметров выберем параметры μ , β и σ_z^2 . Любые другие параметры являются их комбинацией.

При численном решении задачи случайный процесс $\varepsilon(x)$ моделировался телеграфным и гауссовым-марковским процессами. Телеграфный процесс с корреляционной функцией (4) моделировался значением интервала y , на котором $\varepsilon(x)$ остается постоянной величиной, равной $\pm \sigma_z$ (значение y имеет экспоненциальное распределение), а гауссов-марковский процесс $\varepsilon(x)$ моделировался уравнением

$$\frac{d}{dx} \varepsilon(x) = -2\nu \varepsilon(x) + W(x), \quad \varepsilon(x)|_{x \rightarrow -\infty} = 0,$$

где $W(x)$ — процесс белого шума с корреляционной функцией

$$\langle W(x) W(x') \rangle = 4\sigma_z^2 \nu \delta(x - x').$$

Таблица 1

Числовые значения параметров, используемых для моделирования ($\sigma_z^2 = 1$)

β	μ	γ	$\tilde{\sigma}^2$	α	$\tilde{\nu}$	Δh телегр. (гауссов)	L длина реализации телеграфный (гауссов)
1	1	0,1	25	10	5	0,02 (0,02)	400 (1300)
	5	0,025	408,04	40,4	4,04	0,01 (0,01)	600 (600)
0,08	1	0,008	25	10	5	0,02 (0,02)	540 (1700)
	5	0,002	408,04	40,4	4,04	0,02 (0,01)	400 (650)

Для численного решения системы (6) шаг дискретизации Δh выбирался с соблюдением неравенств

$$\alpha \Delta h \ll 1, \quad \tilde{\nu} \Delta h \ll 1$$

на основе тестовых расчетов. Все статистические характеристики вычислялись по формулам

$$\langle |R|^{2n} \rangle = \frac{1}{L} \int_0^L dh' |R_{h'}|^{2n} \quad (n = 1, 2), \quad R_h = U_h - 1,$$

$$\langle J^n(\xi) \rangle = \frac{1}{L} \int_0^L dh' J^n(x + h'; x + h' + \xi),$$

$$J(x; h) = |U(x; h)|^2, \quad \xi = D(H - x),$$

для достаточно большой длины реализации L . Анализировались случаи $\sigma_z^2 = 0,1$ (малые флуктуации) и $\sigma_z^2 = 1$ (сильные флуктуации) при

$\mu = 1$ и 5. При этом, как и в работе [6], $\beta = 1$ и 0,08. Отметим, что случай $\mu \rightarrow 0$ при достаточно большом значении параметра α эквивалентен диффузионному приближению для любого σ_ε^2 . В табл. 1 приведены значения всех использованных численных параметров при $\sigma_\varepsilon^2 = 1$.

3. Перейдем теперь к обсуждению результатов численных экспериментов. На первом этапе исследовался случай малых флуктуаций ε . Серия этих расчетов позволила установить, что поведение моментов интенсивности поля $\langle J^n \rangle$ практически не зависит от модели неоднородностей. Однако с уменьшением β требование малости σ_ε^2 становится жестче, так как все более возрастает роль флуктуаций.

Таблица 2
Значения моментов модуля коэффициента отражения ($\sigma_\varepsilon^2 = 1$)

β	μ	$\langle R ^2 \rangle_T$	$\langle R ^2 \rangle_G$	$\langle R ^2 \rangle_d$	$\langle R ^4 \rangle_T$	$\langle R ^4 \rangle_G$	$\langle R ^4 \rangle_d$
1	1	0,412	0,336	0,277	0,206	0,160	0,109
	5	0,625	0,513		0,426	0,334	
0,08	1	0,841	0,795	0,735	0,739	0,670	0,589
	5	0,935	0,893		0,882	0,817	

Индексы: г — гауссов, т — телеграфный процессы, д — диффузионное приближение.

Таблица 3
Декременты затухания моментов интенсивности ($\sigma_\varepsilon^2 = 1$)

β	μ	$\langle J \rangle_T$	$\langle J \rangle_G$	$\langle J \rangle_d$	$\langle J^2 \rangle_T$	$\langle J^2 \rangle_G$	$\langle J^2 \rangle_d$
1	1	2,34 (0,234)	1,94 (0,194)	1,80	3,80 (0,38)	3,44 (0,344)	3,40
	5	3,85 (0,095)	2,80 (0,07)		5,50 (0,136)	4,50 (0,113)	
0,08	1	1,14 (0,114)	0,80 (0,08)	0,62	1,20 (0,12)	0,82 (0,082)	0,94
	5	2,30 (0,058)	1,76 (0,044)		3,53 (0,088)	3,20 (0,08)	

Индексы — те же, что и в табл. 2.

Следующая серия расчетов была проведена для $\sigma_\varepsilon^2 = 1$. В табл. 2 приведены значения моментов модуля коэффициента отражения от полупространства. Указаны также для сравнения значения моментов модуля коэффициента отражения в диффузионном приближении. Из табл. 2 видно, что как увеличение интенсивности флуктуаций, так и радиуса корреляции (или μ) ведет к увеличению моментов модуля коэффициента отражения. Это естественно с физической точки зрения. Отметим в этой связи, что хотя у обоих рассматриваемых процессов $\sigma_\varepsilon^2 = 1$, телеграфный процесс оказывает более сильное воздействие на коэффициент отражения, чем гауссов. Это также естественно с физической точки зрения, так как для него $1 + \varepsilon(x) = 0$ или 2, в то время как для гауссова процесса значения $1 + \varepsilon(x) \leq 0$ соответствуют отдельным выбросам.

Результаты расчетов моментов интенсивности поля $\langle J^n \rangle$ внутри среды при $\sigma_s^2 = 1$ и $\beta = 1$ показали, что поведение как первого, так и второго моментов соответствует затухающим экспонентам. При этом увеличение μ приводит к более быстрому затуханию моментов интенсивности поля (в масштабе D^{-1}). В этом случае для неоднородностей среды в виде гауссова процесса происходит затягивание асимптотики по параметру σ_s^2 , т. е. моменты интенсивности поля достаточно хорошо соответствуют диффузионному приближению и, следовательно, для данного значения β линейной феноменологической теории переноса излучения. Вычисленные зависимости декремента затухания приведены в

табл. 3. Они соответствуют изменению $\langle J^n \rangle$ в переменных $\xi = D(H-x)$, где значения D — разные для разных μ . Сопоставление их можно провести, переходя к переменной $\xi' = k(H-x)$. Для этого достаточно воспользоваться значением параметра $\alpha^{-1} = Dk^{-1}$ из табл. 1. Значения декрементов в скобках в табл. 3 соответствуют такому пересчету.

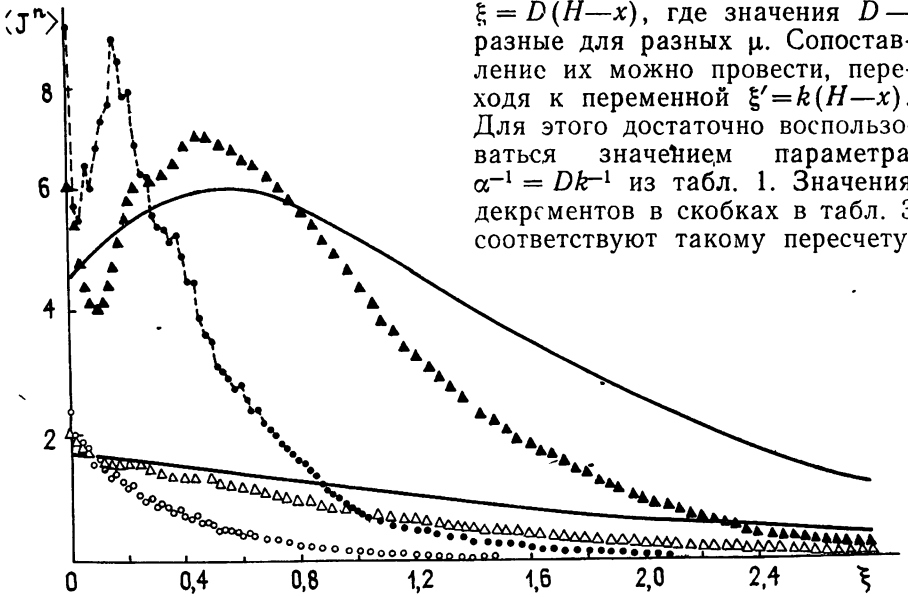


Рис. 1.

Аналогичное более резкое спадание моментов интенсивности в глубь неоднородного полупространства с увеличением μ происходит и в «сильно статистическом» случае $\beta = 0,08$ (рис. 1 и рис. 2 соответствуют телеграфному и гауссову-марковскому процессам). Здесь сплошные кривые отвечают диффузионному приближению, а результаты моделирования изображены кружочками для $\mu = 5$ (белые — $\langle J \rangle$, черные — $\langle J^2 \rangle$) и треугольниками для $\mu = 1$ (белые — $\langle J \rangle$, черные — $\langle J^2 \rangle$). Для случая $\mu = 5$ характерны более частые осцилляции, что связано с большим (чем для $\mu = 1$) значением параметра α — волнового числа (см. табл. 1). Асимптотическая зависимость моментов интенсивности при больших ξ приблизительно описывается выражением $\exp(-\lambda\xi)$. Вычисленные зависимости декремента затухания λ от параметров β и μ также приведены в табл. 3. Декременты в скобках вычислены в переменных $\xi' = k(H-x)$. Следует отметить, однако, что эти цифры являются приближенными, так как они получены из числового материала и в ряде случаев кривая еще не успевает выйти на асимптотический «хвост» (например, $\langle J^2 \rangle_T$ при $\beta = 0,08$ и $\mu = 1$). Заметим также, что в случае гауссова процесса при $\beta = 0,08$ была использована более богатая статистика (см. табл. 1), чем для телеграфного процесса, что связано с большим для последнего процесса объемом вычислений. Из табл. 3 и рис. 1 и 2 можно установить, в частности, что увеличение параметра

μ в случае гауссовых неоднородностей вызывает значительно меньшие изменения статистических характеристик поля (по отношению к диффузионному приближению), чем при неоднородностях в виде телеграфного процесса. При этом такая, например, характеристика вторых моментов, как ширина на полувысоте от максимального значения, имеет меньшее значение для телеграфного процесса (в переменных, масштабированных на D), чем для гауссова. При $\beta = 0,08$ эти характеристики имеют следующие значения: 1,17 ($\mu=1$) и 0,45 ($\mu=5$) для $\langle J^2 \rangle_T$ и соответственно 1,50, 0,75 для $\langle J^2 \rangle_G$. Диффузионное приближение дает ширину на полувысоте 1,79.

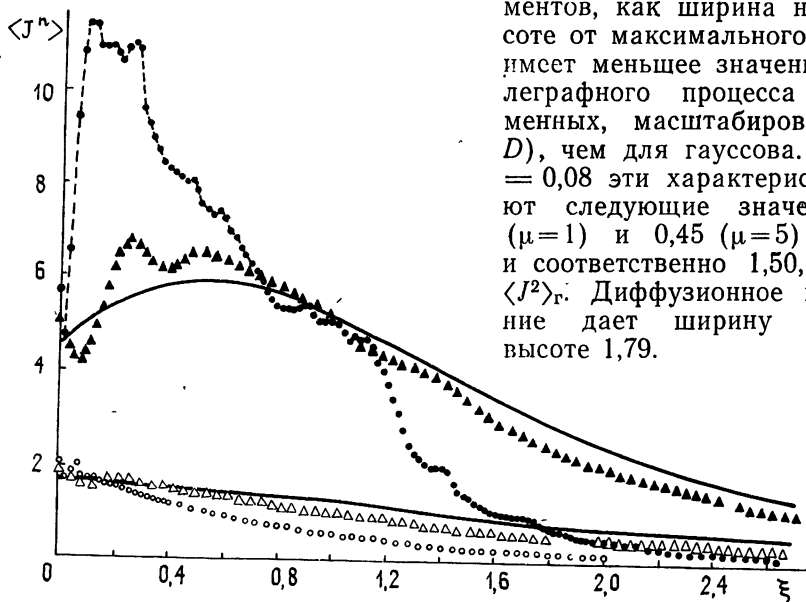


Рис. 2.

4. Выше мы рассмотрели примеры одномасштабных флуктуаций среды, для которых в предположении малости флуктуаций существовал параметр автомодельности D . Представляет определенный интерес исследовать случай двухмасштабных флуктуаций ϵ , например, таких, для которых выполняется условие $D = 0^*$. Простейшей такой моделью является движение броуновского осциллятора:

$$\frac{d^2}{dx^2} y(x) + \Lambda \frac{d}{dx} y(x) + 4\alpha^2 y(x) = W(x), \quad (8)$$

$$y(x_0) = \frac{d}{dx} y(x_0) \Big|_{x_0 \rightarrow -\infty} = 0,$$

где $W(x)$ — гауссов белый шум с параметрами

$$\langle W(x) \rangle = 0, \quad \langle W(x) W(x') \rangle = \delta(x - x').$$

Если рассмотреть модель флуктуаций среды вида

$$\epsilon(x) = -\Lambda (d/dx) y(x) + W(x), \quad (9)$$

то спектр этого процесса

$$\Phi_\epsilon(q) = (4\alpha^2 - q^2)^2 / [(4\alpha^2 - q^2)^2 + q^2 \Lambda^2]$$

обращается в нуль на частоте $q = 2\alpha$. Следовательно, возникают определенные трудности при аналитическом исследовании статистических характеристик поля волны, падающей на полупространство.

* Мы признательны А И Санчеву, обратившему наше внимание на этот интересный случай.

Система (6) с неоднородностями (9) исследовалась с помощью численного моделирования. Кроме параметра β (который везде далее равен 0,08) в задаче есть параметры α и Λ . Выберем $\alpha = 25$, как и в работе [6], а параметр Λ будем варьировать так, чтобы охватить различные случаи спектра $\Phi_\varepsilon(q)$. Так, на рис. 3 приведены графики спектров для $\Lambda = 1, 15, 90$ (кривые 1, 2, 3 соответственно). Заметим также, что при $\Lambda = 0$ процесс (9) — есть процесс белого шума и моменты интенсивности поля внутри среды соответствуют непрерывным кривым на рис. 4. Так как $\Phi_\varepsilon(2\alpha) = 0$, то можно было бы предположить, что на статистические характеристики поля влияют резонансные частоты спектра процесса (9), например $q = \alpha$ и т. п. Однако, как видно из результатов моделирования (рис. 4), в случае двухмасштабных флуктуаций (9) такой автомодельности не существует, и статистические характеристики поля определяются всем спектром процесса (9). Так,

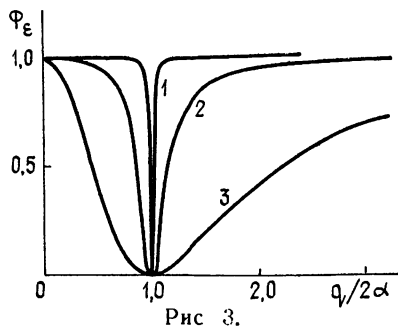


Рис. 3.

при $\Lambda=1$ спектр $\varepsilon(x)$ практически не отличается (за исключением выброса при $q = 2\alpha$) от спектра белого шума $W(x)$ и моменты интенсивности поля несущественно отличаются от непрерывных кривых. На рис. 4 черные квадратики отвечают $\langle J^2 \rangle$ для этого случая. Увеличение Λ до 15 приводит к дальнейшему изменению спектра $\varepsilon(x)$ (рис. 3) и к более существенным изменениям в статистических характеристиках. Этот случай на рис. 4 показан белыми и черными кружками для $\langle J \rangle$ и для $\langle J^2 \rangle$ соответственно. Поведение спектра в случае $\Lambda=90$ (рис. 3) указывает на слабое влияние флуктуаций, следовательно, моменты интенсивности поля, экспоненциально затухающие в глубь полупространства, достаточно хорошо описываются линейной феноменологической теорией переноса излучения [5].

Рис. 4.

В заключение рассмотрим другой тип двухмасштабных неоднородностей ε вида

$$\varepsilon(x) = (d/dx, y(x)) \quad (10)$$

при $\Lambda = 1$, которому соответствует спектр

$$\Phi_\varepsilon(q) = q^2 / [(q^2 - 4\alpha^2)^2 + q^2]. \quad (11)$$

Случай флуктуаций вида (10) интересен тем, что, с одной стороны, диффузионное приближение дает статистические характеристики для интенсивности поля, как и для белого шума, так как $\Phi_\varepsilon(2\alpha) = 1$, а, с другой стороны, спектр этого процесса (11) при выбранных параметрах имеет дельта-образный вид, что указывает, вообще говоря, на периодическую структуру среды. Результаты моделирования для неоднородностей вида (10) представлены на рис. 4 белыми и черными треугольниками (соответственно для $\langle J \rangle$ и $\langle J^2 \rangle$). Экспоненциальное поведение второго момента интенсивности поля указывает на несправедливость диффузионного приближения в этом случае. При этом первый и второй моменты интенсивности поля имеют декременты затухания 0,28 и 0,32.

Рассмотрим теперь формально периодическую среду $\tilde{\varepsilon}(x) = 4\eta \cos 2\alpha x$ и выберем η таким образом, чтобы спектр этой функции (усредненный по быстрым осцилляциям)

$$\Phi_{\tilde{\varepsilon}}(q) = 1/4 [\delta(q - 2\alpha) + \delta(q + 2\alpha)]$$

был близок к спектру (11). Тогда $\eta = (1/2) (8\pi)^{1/2} \approx 0,1$. В работе [8] было показано, что при периодической структуре среды $\tilde{\varepsilon}(x)$ декремент интенсивности волны для полупространства $\lambda = 2\eta + \beta$ (при малых затуханиях в среде) и, следовательно, $\lambda = 0,28$, что и дает численный эксперимент.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кляцкин В. И — Изв. вузов — Радиофизика, 1979, 22, № 2, с 180; № 5, с 591
2. Бабкин Г. И, Кляцкин В. И — Изв. вузов — Радиофизика, 1980, 23, № 4, с 432; № 10, с 1185.
3. Бабкин Г. И, Кляцкин В. И., Козлов В. Ф, Ярощук Е. В. — Изв. вузов — Радиофизика, 1981, 24, № 8, с 952
4. Кляцкин В. И., Ярощук И. О — Изв. вузов — Радиофизика, 1983, 26, № 10, с 1241.
5. Кляцкин В. И. Стохастические уравнения и волны в случайно-неоднородных средах — М Наука, 1980.
6. Кляцкин В. И., Ярощук И. О — Изв. вузов — Радиофизика, 1983, 26, № 9, с 1092.
7. Кляцкин В. И., Татарский В. И — Изв. вузов — Радиофизика, 1977, 20, № 7, с 1040
8. Кляцкин В. И., Кошель К. В — ЖЭТФ, 1983, 84, № 6, с. 2092

Тихоокеанский океанологический институт
ДВНЦ АН СССР

Поступила в редакцию
26 сентября 1983 г.

FLUCTUATIONS OF THE WAVE INTENSITY IN ONE-DIMENSIONAL RANDOMLY INHOMOGENEOUS MEDIUM. VIII. INFLUENCE OF THE MEDIUM MODEL

V. I. Klyatskin, I. O. Yaroshchuk

The problem of wave propagation in absorbing one-dimensional random media is solved by means of numerical integration of invariant imbedding equations for heterogeneous models such as telegraphic, the Gauss—Markov processes and the Brownian motion of oscillator process. Statistical characteristics are calculated on the basis of the ergodic property. The cases of weak and strong fluctuations for the dielectric permittivity are considered.