ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XXVII, № 10 РАДИОФИЗИКА 1984

УДК 621.378 3

ГЕНЕРАЦИЯ НА ГАРМОНИКАХ БАУНС-ЧАСТОТЫ В РЕЛЯТИВИСТСКОМ УБИТРОНЕ С ВИНТОВЫМ ОНДУЛЯТОРОМ

Н. С. Гинзбург

При движении электронов по винтовой траектории в периодическом магнитном поле винтового (спирального) ондулятора излучение на гармониках баунс-частоты имеет место, когда электромагнитная волна распространяется под углом к оси ондулятора. Для генераторов с высокодобротными двухзеркальными резонаторами на излучаемую волну найдены стартовые токи в гидродинамическом и кинетическом режимах взаимодействия электронов с волной. Отмечается, что в случае ультрарелятивистских электронных пучков минимальное значение стартового тока для высоких номеров гармоник реализуется, когда угол, под которым распространяется волна (угол между осью резонатора и осью ондулятора), близок к питч-углу электронов. Для гидродинамического режима взаимодействия определена эффективность генерации на гармониках баунс-частоты. Показано, что электронный КПД обратно пропорционален номеру гармоники. Прослежена аналогия с релятивистскими мазерами на циклотронном резонансе.

1. Введение. В работах [1,2] была рассмотрена нелинейная теория индуцированного излучения релятивистских электронных пучков на гармониках баунс-частоты в убитроне с плоским ондулятором. Магнитное поле такого ондулятора в окрестности оси системы близко по структуре к плоской линейно поляризованной волне и задается вектор-потенциалом

$$\mathbf{A}_u = \mathrm{Re}\,[\mathbf{x}_0 A_u \exp(ih_u z)], \tag{1}$$

где $h_u = 2\pi/d$, d — период ондулятора. При движении в поле (1) продольная скорость электрона имеет осцилляторную составляющую с частотой 2Ω, где $\Omega = h_u v_\parallel$ — баунс-частота, $v_\parallel$ — поступательная скорость электронов. Поэтому в направлении оси ондулятора ($\psi = 0$) наряду с излучением на основной гармонике баунс-частоты ($k = 1$) будет иметь место излучение на частотах

$$\omega_k^* = k\Omega/(1 - v_\parallel c^{-1}\cos\psi), \tag{2}$$

соответствующих гармоникам баунс-частоты с нечетными номерами: $k = 3,5,\ldots$

Поле винтового (спирального) ондулятора вблизи оси имеет циркулярную поляризацию *

$$\mathbf{A}_u = \mathrm{Re}\,[(\mathbf{x}_0 + i\mathbf{y}_0) A_u \exp(ih_u z)]. \tag{3}$$

В таком поле электрон может двигаться по винтовой траектории с постоянной продольной скоростью. В этом случае, как и при движении в однородном магнитном поле в направлении поступательного движе-

* Поле (3) без постоянной продольной компоненты реализуется на оси бифилярной спирали, состоящей из двух проводов, токи в которых текут в противоположных направлениях. Максимальное значение поперечной составляющей магнитного поля достигается, когда расстояние между этими проводами равно $d/2$, т. е половине периода намотки.

ния, излучается только основная гармоника: $k=1$. Излучение на частотах, соответствующих высоким гармоникам баунс-частоты $k=2, 3, 4, \ldots$, имеет место под углом $\psi\neq 0$ к оси ондулятора [3].

Настоящая работа посвящена исследованию генерации на высоких гармониках в убитроне с винтовым ондулятором.

2. Усредненные уравнения движения электронов. Предположим, что излучаемая (сигнальная) электромагнитная волна имеет линейную поляризацию, причем вектор электрического поля этой волны перпендикулярен плоскости, образованной волновым вектором $\boldsymbol{h}_s$ и осью ондулятора $\boldsymbol{z}_0$ (ТЕ-поляризация). Такая волна описывается вектор-потенциалом

$$\boldsymbol{A}_s = \mathrm{Re}\,\{A_s\boldsymbol{y}_0 \exp\,[i\,(\omega_s t - h_{\parallel s}z - h_{\perp s}x)]\},\tag{4}$$

где $h_{\parallel s} = h_s\cos\psi$, $h_{\perp s} = h_s\sin\psi$ — продольные и поперечные составляющие волнового вектора сигнальной волны, $h_s=\omega_s/c$.

Движение электрона в полях (3), (4) задается гамильтонианом

$$H = E = \{m^2c^4 + c^2[\boldsymbol{P} + (e/c)\boldsymbol{A}]^2\}^{1/2}\tag{5}$$

и описывается уравнениями

$$\begin{gathered}\frac{d\boldsymbol{P}}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{r}} = -\frac{ec}{E}\nabla(\boldsymbol{PA}) - \frac{e^2}{2E}\nabla\boldsymbol{A}^2,\\ \frac{dE}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{ec}{E}\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{PA}) + \frac{e^2}{2E}\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{A}^2,\\ \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{P}} = \frac{c^2[\boldsymbol{P}+(e/c)\boldsymbol{A}]}{E}.\end{gathered}\tag{6}$$

Здесь $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{p} - (e/c)\boldsymbol{A}$ — канонический импульс электрона, $\boldsymbol{p}$ — механический импульс, E — энергия электрона, $\boldsymbol{r}$ — радиус-вектор, $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}_s + \boldsymbol{A}_u$, e, m — заряд и масса электрона, c — скорость света.

В отсутствие сигнала $\boldsymbol{A}_s = 0$ движение электрона по винтовой траектории реализуется при $P_x=P_y=0$. В этом случае решение (6) имеет вид

$$\begin{gathered}p_x + ip_y = (e/c)\,A_u \exp(ih_u z), \qquad p_z = p_{z0}, \quad E = E_0,\\ x + iy = ia\exp(ih_u z), \qquad z = v_{\parallel 0}t,\end{gathered}\tag{7}$$

где $a=eA_u/cp_{z0}h_u$ — радиус вращения электронов, индекс 0 соответствует начальным значениям величин.

Примем далее следующие упрощающие предположения:

1) Условие синхронизма выполнено только для одной k-й гармоники баунс-частоты

$$\omega_s - h_{\parallel s}v_{\parallel} \simeq k\Omega.\tag{8}$$

2) Электроны ультрарелятивистские и относительное изменение их энергии в процессе излучения мало:

$$\gamma = E/mc^2 \gg 1, \quad |(\gamma_0 - \gamma)/\gamma_0| \ll 1.\tag{9}$$

3) Поперечный импульс (7), приобретаемый электроном в поле ондулятора, является релятивистским: $p_{\perp u} = (e/c)A_u \gtrsim mc$, но все же много меньшим продольного импульса p_{z0}:

$$\gamma_0^{-1} \lesssim \alpha_u \ll 1,\tag{10}$$

где $\alpha_u = eA_u/mc^2\gamma_0$. Отметим, что при выполнении условия (10) радиус вращения электрона a значительно меньше масштаба поперечной неоднородности поля ондулятора $2\pi/h_u$ и запись этого поля в форме (3) оправдана.

4) Поперечный импульс, приобретаемый электроном в поле сигнальной волны, является нерелятивистским, $p_{\perp s} = (e/c)A_s \ll mc$,

$$\alpha_s = eA_s/mc^2\gamma_0 \ll \gamma_0^{-1}. \tag{11}$$

При выполнении условий (9)—(11) продольный импульс электрона p_z с помощью соотношения (5) можно приближенно представить в виде

$$p_z = (E/c)\left[1 - (m^2c^4 + e^2A_u^2)/2E^2\right]. \tag{12}$$

С учетом условий (8)—(11) проведем усреднение уравнений движения (6) по быстрым осцилляциям, вызванным воздействием на электрон полей ондулятора и сигнала по отдельности. С этой целью представим переменные величины в виде суммы быстро осциллирующих и медленно меняющихся (дрейфовых) составляющих. Для дрейфовых составляющих, переходя к новой независимой переменной продольной координате z, имеем

$$\begin{aligned} \frac{d\overline{P}_x}{dz} &= -\frac{e^2}{2c^2\overline{p}_z}\frac{\partial}{\partial x}\langle A_y^2\rangle, \\ \frac{dE}{dz} &= \frac{e^2}{2c^2\overline{p}_z}\frac{\partial}{\partial t}\langle A_y^2\rangle, \\ \frac{d\overline{x}}{dz} &= \frac{\overline{P}_x}{\overline{p}_z}, \end{aligned} \tag{13}$$

где при вычислении $\langle A_y^2\rangle$ необходимо использовать в явном виде выражение для осцилляции в поле накачки поперечной координаты электрона x (7)

$$x_\sim = a\sin h_u z.$$

В результате с учетом разложения

$$\exp(-iq\sin h_u z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(q)\exp(-inh_u z),$$

где $J_n(q)$ — функция Бесселя, имеем

$$\begin{aligned} \langle A_y^2\rangle = {} & (1/2)\langle \mathrm{Re}\{-iA_sA_u^*\exp[i(\omega_s t - h_{\parallel s}z - h_{\perp s}\overline{x} - h_u z - q\sin h_u z)]\} + \\ & + \mathrm{Re}\{iA_sA_u^*\exp[i(\omega_s t - h_{\parallel s}z - h_{\perp s}\overline{x} + h_u z - q\sin h_u z)]\}\rangle = \\ & = (1/2)\mathrm{Re}\{iA_sA_u^*e^{i\theta}[J_{k+1}(q) - J_{k-1}(q)]\} = \mathrm{Re}[iA_sA_u^*e^{i\theta}J_k'(q)]. \end{aligned}$$

Здесь $q = h_{\perp s}a$, $\theta = \omega_s t - h_{\parallel s}z - h_{\perp s}\overline{x} - kh_u z$ — медленная комбинационная фаза, удовлетворяющая уравнению

$$d\theta/dz = \omega/v_z - h_{\parallel s} - h_{\perp s}d\overline{x}/dz - kh_u. \tag{14}$$

Система усредненных уравнений (13) имеет интеграл

$$\omega_s\overline{P}_x - h_{\perp s}\overline{E} = \mathrm{const}. \tag{15}$$

С учетом этого интеграла, а также соотношения (12) усредненное движение электрона может быть описано двумя уравнениями для энергетической переменной $w=1-\overline{E}/E_0$ и комбинационной фазы

$$dw/dZ = \varkappa_k \alpha_s \sin\theta,$$
$$d\theta/dZ = \delta + \mu w, \tag{16}$$

где $Z=\omega_s z/c$, $\delta=1-[(h_{\parallel s}+kh_u)v_{\parallel 0}/\omega_s]$ — начальная расстройка комбинационного синхронизма (8),

$$\mu = \gamma_0^{-2} + \alpha_u^2 + h_{\perp s}^2/h_{\parallel s}^2 \simeq \gamma_0^{-2} + \alpha_u^2 + \psi^2 \tag{17}$$

— параметр группировки,

$$\varkappa_k = (\alpha_u/2) J_k'(q) \tag{18}$$

— параметр связи электронов с волной. Интенсивность индивидуального излучения электрона на k-гармонике в направлении, составляющем угол ψ с осью ондулятора, пропорциональна $\varkappa_k^2$*.

Для стационарного моноэнергетического на входе в систему электронного пучка граничные условия к уравнениям (16) имеют вид

$$w|_{Z=0}=0, \quad \theta|_{Z=0}=\theta_0, \quad 0<\theta_0\leqslant 2\pi. \tag{19}$$

В дипольном приближении, когда амплитуда осцилляции электрона в поле ондулятора существенно меньше масштаба поперечной неоднородости излучаемой волны ($q\ll 1$) для первой гармоники баунс-частоты ($k=1$) $J_1'(q)\simeq 1/2$, уравнения (16) переходят в уравнения работы [4], полученные с помощью метода усредненной высокочастотной силы.

Интересно сопоставить уравнения (16) с уравнениями релятивистских МЦР, которые также могут быть приведены к виду, аналогичному (16) (см. [5,6]). Поскольку траектории электронов в МЦР и в убитроне со спиральным одулятором идентичны, то одинаковы и мощности, излучаемые электроном в данную поляризацию под данным углом ψ. По этой причине выражения для коэффициентов связи $\varkappa_k$ в этих устройствах совпадают (в МЦР под a следует понимать радиус вращения электронов в однородном магнитном поле $v_\perp/\omega_H$, а под α_u — нормированную скорость вращения $v_\perp/c$). В то же время параметры группировки μ вследствие различной зависимости от энергии баунс-частоты $\Omega=h_u v_\parallel$ в убитроне и гирочастоты $\omega_H=eH_0/mc\gamma$ в МЦР отличаются (в МЦР $\mu=\sin^2\psi$).

3. Резонансный автогенератор. Рассмотрим далее генератор с высокодобротным двухзеркальным резонатором на сигнальную волну. Будем предполагать, что ось резонатора составляет угол ψ с осью ондулятора. Амплитуду стационарных колебаний в таком генераторе можно найти из уравнения баланса мощностей

$$\omega_s W/Q = (I_0/e) mc^2(\gamma_0-1)\eta, \tag{20}$$

где $W=\omega_s^2 A_s^2 LS/4\pi c^2$ — энергия электромагнитных колебаний, запасенная в резонаторе, $Q=h_s L/(1-R_1R_2)$ — его добротность, L — дли-

* Такое соответствие позволяет по известной мощности индивидуального излучения найти коэффициент связи и для случая, когда вектор электрического поля генерируемой волны лежит в плоскости, образованной векторами $\mathbf{h}_s$ и $\mathbf{z}_0$ (ТМ-поляризация $\varkappa_k=[(\cos\psi - v_{\parallel 0}c^{-1})/2\sin\psi]J_k(q)$. Выражение для параметра группировки не зависит от поляризации волны

на резонатора, S — площадь зеркал, $R_{1,2}$ — коэффициенты отражения от зеркал, I_0 — ток пучка, $\eta = \frac{1}{2\pi(1-\gamma_0^{-1})}\int_0^{2\pi} w|_{Z=Z_u}\, d\theta_0$ — электронный КПД, $Z_u = (\omega_s/c)L_u$, L_u — длина ондулятора.

В режиме малого сигнала ($\alpha_s \to 0$), решая уравнения движения методом последовательных приближений, в первом не исчезающем при усреднении по фазам влета θ_0 приближении получим

$$\eta = \alpha_s^2 \varkappa_k^2 \mu Z_u^3 \varphi'(\Phi), \tag{21}$$

где $\varphi(\Phi) = (1-\cos\Phi)/2\Phi^2$, $\Phi = \delta Z_u$ — угол пролета. Подставляя (21) в уравнение баланса (20), найдем стартовый ток генератора:

$$I_{\text{ст}} = \frac{1}{16\pi^2}\frac{mc^3}{e}\frac{S}{d^2}\frac{L}{L_u}\frac{\gamma_0(1-R_1R_2)}{k\varkappa_k^2 N^3 \varphi'(\Phi)}, \tag{22}$$

где $N = L_u/d$ — число периодов ондулятора.

Проанализируем теперь зависимость коэффициентов связи и стартовых токов от номера гармоники k. Эта зависимость существенным образом определяется величиной параметра

$$q = h_{\perp s} a \simeq 2k\psi\alpha_u/(\gamma_0^{-2} + \alpha_u^2 + \psi^2). \tag{23}$$

При малой напряженности поля ондулятора $\alpha_u \ll \gamma_0^{-1}$ или при малом угле распространения волны $\psi \ll \gamma_0^{-1}$ величина q мала. Используя разложение функций Бесселя при малых значениях аргумента для коэффициентов связи имеем

$$\varkappa_k = \frac{\alpha_u}{4}\left(\frac{q}{2}\right)^{k-1}\frac{1}{(k-1)!}. \tag{24}$$

Очевидно, в этом случае коэффициенты связи быстро падают, а стартовые токи нарастают с увеличением номера гармоники, что вполне естественно, поскольку при $q \ll k$ масштаб поперечных осцилляций электрона много меньше масштаба поперечной неоднородости излучаемой волны.

Иначе обстоит дело при больших напряженностях поля ондулятора $\alpha_u \gg \gamma_0^{-1}$, если угол, под которым излучается волна, близок к питч-углу электронов: $\psi \simeq v_\perp/v_\parallel \simeq \alpha_u$. В этом случае аргумент функции Бесселя близок к ее индексу $q \simeq k$ и для высоких номеров гармоник справедливо представление [7]

$$\varkappa_k = \frac{\alpha_u}{2}\frac{1}{\pi\sqrt{3}}\left(1-\frac{q^2}{k^2}\right)K_{2/3}\left[\frac{k}{3}\left(1-\frac{q^2}{k^2}\right)^{3/2}\right], \tag{25}$$

где $K_{2/3}(\tau)$ — функция Макдональда. Для этой функции известны следующие асимптотические формулы:

$$K_{2/3}(\tau) = \begin{cases} 2^{-1/3}\Gamma(2/3)\,\tau^{-2/3}, & \tau \ll 1 \\ \sqrt{\pi/2\tau}\, e^{-\tau}, & \tau \gg 1 \end{cases}, \tag{26}$$

где Γ — гамма-функция. С учетом (23) для аргумента функции Макдональда при $\psi = \alpha_u$ имеем

$$\tau = (k/3)(\alpha_u\gamma_0)^{-3}.$$

Соответственно

$$\varkappa_k = \begin{cases} \dfrac{\alpha_u}{2} \dfrac{2^{-1/3}}{\pi\sqrt{3}} \dfrac{\Gamma(2/3)}{(k/3)^{2/3}}, & k \ll k^* \\ \dfrac{\alpha_u}{2} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \dfrac{1}{\sqrt{(k/3)\alpha_u\gamma_0}} \exp\left(-\dfrac{k}{k^*}\right), & k \gg k^* \end{cases}, \tag{27}$$

где $k^*=3(\alpha_u\gamma_0)^3$. Согласно (25), (27) при $q \simeq k$, когда масштаб осцилляций электрона соизмерим с масштабом поперечной неоднородности волны, коэффициенты связи очень медленно убывают с ростом номера гармоники. Их значения достаточно велики вплоть до гармоник с номерами $k \simeq k^*$. При $k \gg k^*$ коэффициенты связи становятся уже экспоненциально малы.

Формула для стартового тока (22) получена для гидродинамического режима взаимодействия, который реализуется, когда начальный разброс энергий электронов $\Delta\gamma$ мал в масштабе относительной ширины полосы отрицательной реабсорбции (полосы частот $\Delta\omega$, в которой $\varphi'(\Phi) > 0$):

$$\Delta\gamma/\bar{\gamma} \ll 1/kN, \tag{28}$$

где $\bar{\gamma}$ — среднее значение энергии электронов. Это условие тем жестче, чем выше номер рабочей гармоники и у́же ширина полосы отрицательной реабсорбции: $\Delta\omega/\omega_k^* \sim 1/kN$. Энергетический разброс начинает оказывать заметное влияние на значения стратовых токов при $\Delta\gamma/\bar{\gamma} \gtrsim 1/kN$, когда становится существенным различие в углах пролета Φ для различных энергетических фракций электронов. В предельном случае очень больших разбросов: $\Delta\gamma/\bar{\gamma} \gg 1/kN$, соответствующих кинетическому режиму взаимодействия, при усреднении выражения (21) по всем электронным фракциям функция $\varphi(\Phi)$ может быть заменена на δ-функцию. В результате выражение для стартового тока приобретает вид (ср. с [8, 9])*

$$I_{\text{ст}} = \frac{2}{\pi} \frac{mc^3}{e} \frac{S}{d^2} \frac{L}{L_u} \frac{\gamma_0 k(1-R_1R_2)}{\mu^2\varkappa_k^2 N (df/d\gamma)|_{\gamma=\gamma_{\text{синхр}}}}, \tag{29}$$

где $f(\gamma)$—функция распределения электронов по энергиям $\int\limits_1^\infty f(\gamma)d\gamma=1$, $\gamma_{\text{синхр}}$ — энергия синхронного электрона, определяемая из соотношения $\delta=0$. Если в гидродинамическом режиме взаимодействия стартовый ток убывал с ростом числа периодов ондулятора как N^3, то в кинетическом режиме $I_{\text{ст}} \sim N^{-1}$.

Для расчета электронного КПД, как и в [1], с помощью замены переменных $\zeta=Z/Z_u$, $F=\mu\varkappa_k\alpha_s Z_u^2$, $u=\mu w Z_u$ удобно преобразовать уравнения движения (16) к универсальному для всех гармоник виду:

$$du/d\zeta = F\sin\theta, \quad d\theta/d\zeta = \Phi + u. \tag{30}$$

В этих переменных КПД определяется выражением

$$\eta = \frac{1}{4\pi kN}\hat{\eta}, \qquad \hat{\eta} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} u|_{\zeta=1}\, d\theta_0. \tag{31}$$

Максимум приведенного КПД $\eta=5{,}4$ и достигается при $\Phi=-4{,}5$, $F=16$ [1]. Падение полного КПД η с ростом номера рабочей гармони-

* В выражениях для коэффициентов связи можно положить $\varkappa_k=\varkappa_k(\bar{\gamma})$.

ки обусловлено сужением полосы отрицательной реабсорбции, в результате чего электроны тем быстрее выходят из синхронизма с волной, чем больше k.

Отметим в заключение, что все полученные выше результаты справедливы и для генераторов, основанных на вынужденном рассеянии волн с циркулярно-поляризованной электромагнитной волной накачки.

Автор признателен Братману В. Л. и Петелину М. И. за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гинзбург Н. С. — ЖТФ, 1981, **51**, № 4, с. 764.
2. Colson W. B. — IEEE J. Quant. Electr., 1981, **QE-17**, № 8, p. 1417.
3. Алферов Д. Ф., Башмаков Ю А., Бессонов Е Г.—Труды ФИАН СССР, 1975, **80**, с. 100.
4. Братман В. Л., Гинзбург Н. С., Петелин М. И. — ЖЭТФ, 1979, **76**, № 3, с. 930.
5. Bratman V. L., Ginzburg N. S., Nusinovich G. S., Petelin M. I., Strelkov P. S. — Int. J. Electr., 1981, **51**, № 4, p. 541.
6. Братман В. Л., Гинзбург Н. С., Петелин М. И. Лекции по электронике СВЧ. Пятая зимняя школа-семинар инженеров — Саратов, Гос. ун-т, 1981, **1**, с. 69.
7. Синхротронное излучение Сб. статей под ред А. А. Соколова и И. М. Тернова. — М.: Наука, 1966.
8. Родыгин Л. В., Сморгонский А В. — ЖТФ, 1982, **52**, № 10, с 2013.
9. Ginzburg N. S., Shapiro M. A. — Opt. Comm., 1982, **40**, № 3, p. 215.

Институт прикладной физики
АН СССР

Поступила в редакцию
6 сентября 1983 г.

BOUNCE-FREQUENCY HARMONIC GENERATION IN A RELATIVISTIC UBITRON WITH A HELICAL ONDULATOR

N. S. Ginzburg

When electrons move along the helical trajectory in a periodic magnetic field of the helical (spiral) ondulator, bounce-frequency harmonic generation takes place if the radiated electromagnetic wave propagates at an angle to the ondulator axis. Starting currents in hydrodynamic and kinetic regimes of the electron-wave interaction are determined for generators with high-Q double-mirror cavities. In the case of ultrarelativistic electron beams the minimum value of the starting current for high numbers of harmonics is realized when the angle of wave propagation (the angle between the cavity axis and the ondulator axis) is close to the electron pitch-angle. The generation efficiency at bounce-frequency harmonics is determined for the hydrodynamic interaction regime. It is shown that the electron efficiency is inversely proportional to the harmonic number. The analogy with relativistic cyclotron masers is traced.