ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XXVII, № 10 РАДИОФИЗИКА 1984

УДК 621 372 826

УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ПОВЕРХНОСТНОГО ИМПЕДАНСА АНИЗОТРОПНОЙ СРЕДЫ

В. Г. Полевой

Получено уравнение для поверхностного импеданса анизотропной среды с проницаемостями, зависящими только от поперечной координаты. Рассмотрены некоторые частные случаи, когда это уравнение может быть легко решено точно или приближенно.

Понятие поверхностного импеданса, как известно [1, 2], широко используется в различных задачах дифракции и распространения электромагнитных волн при наличии границ раздела между средами. Удобство использования поверхностного импеданса состоит в том, что он позволяет при нахождении поля в одной из сред не рассматривать поля во второй среде. Влияние же второй среды на сруктуру поля может быть учтено соответствующими граничными (импедансными) условиями. Простейшим примером граничных условий такого типа являются известные граничные условия Леонтовича [3], применимые для хорошо проводящих изотропных сред.

Поверхностный импеданс связывает между собой тангенциальные компоненты электрического и магнитного полей на границе раздела между средами. В общем случае эта связь является нелокальной, т. е. тангенциальная компонента электрического поля в данной точке поверхности зависит от поведения тангенциальной компоненты магнитного поля на всей границе раздела. В том случае, когда связь можно считать локальной (как, например, в граничных условиях Леонтовича), поверхностный импеданс принято называть сторонним. Конечно приближением локальной связи можно пользоваться далеко не всегда.

1. ВЫВОД УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ПОВЕРХНОСТНОГО ИМПЕДАНСА

Для вывода уравнения, которому должен удовлетворять поверхностный импеданс, рассмотрим некоторую анизотропную среду, заполняющую все пространство, считая, что проницаемости среды зависят только от одной координаты z. Для продольных координат введем обозначения $x_1 \equiv x$, $x_2 \equiv y$. Проведем в этой среде на некотором уровне плоскость раздела, перпендикулярную оси z и определим поверхностный импеданс, например, верхнего полупространства. Обычно поверхностный импеданс определяют на реально существующих границах раздела, но его можно, конечно, определить и на произвольно проведенной плоскости, что и естественно делать при выводе уравнения для поверхностного импеданса.

Будем рассматривать поля, гармонически меняющиеся во времени по закону $\exp(-i\omega t)$. Амплитуды электрического и магнитного полей в верхнем полупространстве обозначим через $\tilde{\boldsymbol{E}}(z, \omega, \boldsymbol{x})$ и $\tilde{\boldsymbol{H}}(z, \omega, \boldsymbol{x})$. Здесь $\boldsymbol{x}$ — двумерный вектор с компонентами $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)$. Аргумент ω для краткости часто будем опускать. Пусть $\boldsymbol{E}(z, \boldsymbol{x})$ и $\boldsymbol{H}(z, \boldsymbol{x})$ — тангенциальные компоненты полей $\tilde{\boldsymbol{E}}(z, \boldsymbol{x})$ и $\tilde{\boldsymbol{H}}(z, \boldsymbol{x})$, взятые на верхней стороне плоскости раздела, проведенной на уровне z. Если на границе раздела задать тангенциальную компоненту электрического (или магнитного) поля, то при учете только тех решений, которые соответствуют оттоку энергии от границы, поля в верхнем полупространстве будут однозначно выражаться через $\boldsymbol{E}(z, \boldsymbol{x})$ (или $\boldsymbol{H}(z, \boldsymbol{x})$). Это позволяет записать на границе раздела линейную связь между $\boldsymbol{E}(z, \boldsymbol{x})$ и $\boldsymbol{H}(z, \boldsymbol{x})$:

$$E_\alpha(z, \omega, \boldsymbol{x}) = \int d^2x' \zeta_{\alpha\beta}(z, \omega, \boldsymbol{x}') I_\beta(z, \omega, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'), \qquad (1)$$

где

$$\boldsymbol{I} = [\boldsymbol{H}, \boldsymbol{n}],$$

$\boldsymbol{n}$ — вектор единичной нормали, направленный внутрь рассматриваемого (верхнего) полупространства, $\zeta_{\alpha\beta}(z, \omega, \boldsymbol{x})$ — тензор поверхностного импеданса верхнего полупространства в координатном представлении, греческие индексы пробегают значения 1, 2, и по повторяющимся индексам производится суммирование. Тензор поверхностного импеданса является функцией поперечной координаты z, определяющей проведенную нами плоскость раздела.

Так как мы предполагаем, что тензоры электрической и магнитной проницаемостей $\varepsilon_{ij}(z, \omega)$ и $\mu_{ij}(z, \omega)$ не зависят от продольных координат $\boldsymbol{x}$, то естественно произвести по $\boldsymbol{x}$ преобразование Фурье полей:

$$\begin{Bmatrix} \tilde{\boldsymbol{E}}(z, \boldsymbol{x}) \\ \tilde{\boldsymbol{H}}(z, \boldsymbol{x}) \end{Bmatrix} = \int d^2\varkappa e^{i\boldsymbol{\varkappa}\cdot\boldsymbol{x}} \begin{Bmatrix} \tilde{\boldsymbol{E}}(z, \boldsymbol{\varkappa}) \\ \tilde{\boldsymbol{H}}(z, \boldsymbol{\varkappa}) \end{Bmatrix}.$$

Аналогично преобразуются и $\boldsymbol{E}(z, \boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{H}(z, \boldsymbol{x})$. Тогда равенство (1) записывается в алгебраическом виде

$$E_\alpha(z, \omega, \boldsymbol{\varkappa}) = \zeta_{\alpha\beta}(z, \omega, \boldsymbol{\varkappa}) I_\beta(z, \omega, \boldsymbol{\varkappa}), \qquad (2)$$

где

$$\zeta_{\alpha\beta}(z, \omega, \boldsymbol{\varkappa}) \equiv \int d^2\boldsymbol{x} \zeta_{\alpha\beta}(z, \omega, \boldsymbol{x}) e^{-i\boldsymbol{\varkappa}\cdot\boldsymbol{x}}$$

— тензор поверхностного импеданса в $\omega\boldsymbol{\varkappa}$-представлении.

В дальнейшем мы будем оперировать только с трансформантами Фурье, поэтому использование одних и тех же букв как для обозначения полей, так и их трансформант Фурье не может привести к путанице.

Для более лаконичной записи формул удобно воспользоваться матричными обозначениями. Значком «$\wedge$», поставленным над буквой, будем отмечать матрицы размерности 2×2. В этих обозначениях равенство (2) имеет вид

$$\boldsymbol{E} = \hat{\zeta}\boldsymbol{I}. \qquad (3)$$

Для матрицы, обратной к $\hat{\zeta}$ (матрицы поверхностного адмитанса), будем использовать специальное обозначение:

$$\hat{\xi} \equiv \hat{\zeta}^{-1}.$$

Не проводя вывода детально, опишем лишь путь получения уравнения для поверхностного импеданса. Для трансформант Фурье уравнения Максвелла принимают вид

$$i[\boldsymbol{\varkappa}, \tilde{\boldsymbol{E}}] + [\boldsymbol{n}, \boldsymbol{E}'] = ik\tilde{\boldsymbol{B}}; \qquad (4)$$

$$i\,[\varkappa, \tilde{H}] + [n, H'] = -ik\tilde{D}, \tag{5}$$

где $k = \omega/c$, а

$$\tilde{D}_l = \varepsilon_{lk}\tilde{E}_k, \quad \tilde{B}_l = \mu_{lk}\tilde{H}_k$$

— электрическая и магнитная индукции, штрихом отмечены производные по z. Латинские индексы пробегают значения 1, 2, 3, а по повторяющимся индексам, как обычно, производится суммирование.

Используя уравнения Максвелла (4), (5) и импедансную связь (3), можно выразить все величины только через тангенциальную компоненту электрического поля $\boldsymbol{E}$. Например, для $\boldsymbol{E}'$ имеем

$$\boldsymbol{E}' = -(\hat{D}\hat{\xi} + \hat{C})\boldsymbol{E},$$

где матрицы $\hat{D}$ и $\hat{C}$ имеют следующие компоненты:

$$D_{\alpha\beta} = ik\,\{b_{\beta\alpha} - \delta_{\alpha\beta}b_{\tau\tau}\} - \frac{\varkappa^2}{ik\varepsilon_{nn}}L_{\alpha\beta}\,; \tag{6}$$

$$C_{\alpha\beta} = i\,\{\varkappa_\alpha(p_\beta - u_\beta) + (\varkappa\cdot\boldsymbol{u})\,\delta_{\alpha\beta}\}, \tag{7}$$

$$b_{\alpha\beta} = \mu_{\alpha\beta} - \frac{\mu_{\alpha n}\mu_{n\beta}}{\mu_{nn}}, \quad \mu_{\alpha n} = \mu_{\alpha k}n_k, \quad \mu_{n\beta} = n_k\mu_{k\beta}, \quad \mu_{nn} = \mu_{ik}n_in_k,$$

$$L_{\alpha\beta} = \frac{\varkappa_\alpha\varkappa_\beta}{\varkappa^2}, \quad \varepsilon_{nn} = \varepsilon_{ik}n_in_k\,,$$

$$p_\beta = \varepsilon_{n\beta}/\varepsilon_{nn}, \quad u_\beta = \mu_{\beta n}/\mu_{nn}, \quad \varepsilon_{n\beta} = n_k\varepsilon_{k\beta}.$$

Исключая таким образом и остальные величины, мы приходим к уравнению, содержащему только тангенциальную компоненту электрического поля и матрицу поверхностного адмитанса:

$$\{\hat{\xi}' - \hat{\xi}\hat{D}\hat{\xi} - \hat{\xi}\hat{C} + \hat{B}\hat{\xi} + \hat{A}\}\,\boldsymbol{E} = 0, \tag{8}$$

где

$$B_{\alpha\beta} = i\,\{(s_\alpha - v_\alpha)\varkappa_\beta + (\varkappa\cdot\boldsymbol{v})\,\delta_{\alpha\beta}\}, \tag{9}$$

$$A_{\alpha\beta} = -ika_{\alpha\beta} - (\varkappa^2/ik\mu_{nn})\,T_{\alpha\beta},$$

$$s_\alpha = \varepsilon_{\alpha n}/\varepsilon_{nn}, \quad v_\alpha = \mu_{n\alpha}/\mu_{nn}, \quad \varepsilon_{\alpha n} = \varepsilon_{\alpha k}n_k,$$

$$a_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\alpha\beta} - (\varepsilon_{\alpha n}\varepsilon_{n\beta}/\varepsilon_{nn}), \quad T_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} - (\varkappa_\alpha\varkappa_\beta/\varkappa^2).$$

Так как электрическое поле $\boldsymbol{E}$ на плоскости раздела может быть задано произвольно, получим из (8) следующее нелинейное матричное уравнение, которому должен удовлетворять поверхностный адмитанс как функция поперечной координаты z, определяющей положение плоскости раздела:

$$\hat{\xi}' - \hat{\xi}\hat{D}\hat{\xi} - \hat{\xi}\hat{C} + \hat{B}\hat{\xi} + \hat{A} = 0.$$

Учитывая, что $\hat{\xi}' = -\hat{\xi}\hat{\zeta}'\hat{\xi}$, получаем отсюда уравнение для поверхностного импеданса:

$$\hat{\zeta}' - \hat{\zeta}\hat{A}\hat{\zeta} - \hat{\zeta}\hat{B} + \hat{C}\hat{\zeta} + \hat{D} = 0. \tag{10}$$

Если свойства среды (т. е. ε_{ik} и μ_{ik}) не зависят от z, то, очевидно, и $\hat{\zeta}$ не зависит от z. В этом случае уравнение (10) становится алгебраическим:

$$\hat{\zeta}\hat{A}\hat{\zeta} + \hat{\zeta}\hat{B} - \hat{C}\hat{\zeta} - \hat{D} = 0. \tag{11}$$

К уравнению (10) должны быть поставлены граничные условия. Рассмотрим для этого следующую структуру (рис. 1). Зависимость ε_{ik} и μ_{ik} от координаты z в слое $0 < z < a$ считается известной. Примыкающее сверху к слою полупространство характеризуется своим импедансом, который обозначим через $\hat{\zeta}^{(+)}$. Проводя в слое $(0, a)$ на произвольном уровне z плоскость, можно определить относительно нее импеданс верхнего полупространства. Он должен удовлетворять внутри слоя уравнению (10). В силу непрерывности тангенциальных компонент электрического и магнитного полей непрерывным является и импеданс. Поэтому к уравнению (10) должно быть поставлено граничное условие

$$\hat{\zeta}(a) = \hat{\zeta}^{(+)}. \tag{12}$$

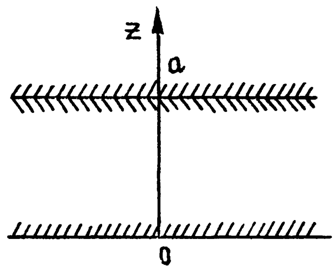

Рис. 1.

Если примыкающее к слою полупространство представляет собой среду с проницаемостями, не зависящими от z, то $\hat{\zeta}^{(+)}$ должен быть определен из алгебраического уравнения (11). В связи с этим отметим, что уравнение (11), вообще говоря, имеет несколько решений. Мы предполагаем, что на бесконечности (т. е. при $z \to \infty$) нет источников поля. Следовательно, поток энергии в направлении оси z не может быть отрицательным. Это значит, что при любом векторе $\boldsymbol{E}$ должно иметь место неравенство [1]

$$(\xi_{\alpha\beta} + \xi^*_{\beta\alpha}) E^*_\alpha E_\beta \geqslant 0. \tag{13}$$

Этим условием решение уравнения (11) фиксируется однозначно. Импеданс, удовлетворяющий неравенству (13), называют входным импедансом рассматриваемого полупространства.

Разумеется, получить решение уравнения (10) в общем случае невозможно, в силу чего мы ограничимся рассмотрением некоторых частных случаев.

2. ОДНОРОДНАЯ СРЕДА

Рассмотрим импеданс полупространства в том случае, когда проницаемости не зависят от z. Тогда, как было показано, импеданс удовлетворяет уравнению (11). Но даже в этом случае получить выражение для $\hat{\zeta}$ очень затруднительно. Задача, однако, значительно упрощается в следующих двух случаях: 1) диэлектрическая проницаемость ε_{ik} — велика, магнитная проницаемость может быть при этом произвольной, 2) магнитная проницаемость μ_{ik} — велика, а диэлектрическая проницаемость произвольна. Первый случай реализуется, например, для хорошо проводящих сред, а второй — для ферритов.

Рассмотрим вначале первый случай. Для того, чтобы было удобнее следить за порядками величин, снабдим тензор ε_{ik} множителем $1/\lambda$, где λ — малый параметр. Отметим, что в матрицы $\hat{B}$ и $\hat{C}$ параметр λ не входит, а матрицы $\hat{A}$ и $\hat{D}$ принимают вид

$$A_{\alpha\beta} = -(ik/\lambda)\, a_{\alpha\beta} - (\varkappa^2/ik\mu_{nn})\, T_{\alpha\beta},$$

$$D_{\alpha\beta} = -\lambda\, (\varkappa^2/ik\varepsilon_{nn})\, L_{\alpha\beta} - ik\Delta_b b^{-1}_{\beta\alpha}\,.$$

При записи матрицы $\hat{D}$ (ср. с (6)) мы воспользовались следующим свойством матриц 2×2:

$$\hat{b}^{-1} = \Delta_b^{-1}(s_b\hat{I} - \hat{b}), \tag{14}$$

где

$$\Delta_b \equiv \det\hat{b}, \quad s_b \equiv \operatorname{Sp}\hat{b},$$

$\hat{I}$ — единичная матрица. Попутно отметим еще одно тождество, которое будет использовано в дальнейшем:

$$\hat{b}^2 = s_b\hat{b} - \Delta_b\hat{I}. \tag{15}$$

В справедливости (14) и (15) легко убедиться прямой проверкой.

Уравнение (11) в данном случае принимает вид

$$(ik/\lambda)\hat{\zeta}\hat{a}\hat{\zeta} + (\varkappa^2/ik\mu_{nn})\hat{\zeta}\hat{T}\hat{\zeta} - \hat{\zeta}\hat{B} + \hat{C}\hat{\zeta} - \lambda(\varkappa^2/ik\varepsilon_{nn})\hat{L} - ik\Delta_b\tilde{\hat{b}}^{-1} = 0. \tag{16}$$

Тильда над матрицей $\hat{b}^{-1}$ означает транспонирование. Решение уравнения (16) будем искать методом последовательных приближений. Нетрудно видеть, что $\hat{\zeta}$ можно искать в виде ряда по степеням $\lambda^{1/2}$:

$$\hat{\zeta} = \hat{\zeta}_0\lambda^{1/2} + \lambda\hat{\zeta}_1 + \lambda^{3/2}\hat{\zeta}_2 + \ldots \tag{17}$$

Мы ограничимся первыми двумя членами этого ряда.

Для $\hat{\zeta}_0$ и $\hat{\zeta}_1$, как следует из (16), имеем уравнения

$$\hat{\zeta}_0\hat{a}\hat{\zeta}_0 = \Delta_b\tilde{\hat{b}}^{-1}; \tag{18}$$

$$\hat{\zeta}_1\hat{a}\hat{\zeta}_0 + \hat{\zeta}_0\hat{a}\hat{\zeta}_1 = (1/ik)(\hat{\zeta}_0\hat{B} - \hat{C}\hat{\zeta}_0). \tag{19}$$

Уравнение (18) при $\mu_{ik} = \delta_{ik}$ переходит в известное уравнение для импеданса хорошо проводящих сред (см. [4] стр. 457)*. Решение уравнения (18) можно записать в виде

$$\hat{\zeta}_0 = \sqrt{\Delta_b}\,\hat{a}^{-1}\frac{\left(\sqrt{\Delta}\,\hat{I} + \hat{a}\tilde{\hat{b}}^{-1}\right)}{\sqrt{2\sqrt{\Delta} + s}}, \tag{20}$$

где

$$\Delta \equiv \det(\hat{a}\tilde{\hat{b}}^{-1}), \quad s \equiv \operatorname{Sp}(\hat{a}\tilde{\hat{b}}^{-1}).$$

Ветви корней в (20) должны быть выбраны так, чтобы выполнялось неравенство (13). Выражение (20) совпадает с соответствующим результатом работы [5].

Рассмотрим теперь уравнение (19), определяющее поправку $\hat{\zeta}_1$. Умножим уравнение (19) слева на $\hat{\zeta}_0\hat{a}$ и справа на $\hat{a}\hat{\zeta}_0$. Тогда получим

---

* Запись уравнения в [4] допускает двузначное прочтение. В указанном уравнении величину $\varepsilon_{\alpha\beta}^{-1}$ следует понимать в том смысле, что сначала производится обращение трехмерного тензора ε_{ik}, а затем берутся от него α, β-компоненты. В нашем изложении выражения вида $\varepsilon_{\alpha\beta}^{-1}$ имеют смысл двумерной матрицы, обратной к $\varepsilon_{\alpha\beta}$.

$$(\hat\zeta_0\hat a)\hat\zeta_1(\hat a\hat\zeta_0)^2 + (\hat\zeta_0\hat a)^2\hat\zeta_1(\hat a\hat\zeta_0) = (1/ik)(\hat\zeta_0\hat a)(\hat\zeta_0\hat B - \hat C\hat\zeta_0)(\hat a\hat\zeta_0). \tag{21}$$

Теперь воспользуемся тождеством (15), которое в данном случае дает

$$(\hat\zeta_0\hat a)^2 = \tilde s(\hat\zeta_0\hat a) - \tilde\Delta\hat I, \quad (\hat a\hat\zeta_0)^2 = \tilde s(\hat a\hat\zeta_0) - \tilde\Delta\hat I,$$

где

$$\tilde s \equiv \mathrm{Sp}(\hat a\hat\zeta_0) = \mathrm{Sp}(\hat\zeta_0\hat a), \quad \tilde\Delta \equiv \det(\hat a\hat\zeta_0) = \det(\hat\zeta_0\hat a).$$

С учетом этого уравнение (21) принимает вид

$$2\tilde s(\hat\zeta_0\hat a)\hat\zeta_1(\hat a\hat\zeta_0) = \tilde\Delta[\hat\zeta_1(\hat a\hat\zeta_0) + (\hat\zeta_0\hat a)\hat\zeta_1] + \frac{1}{ik}(\hat\zeta_0\hat a)(\hat\zeta_0\hat B - \hat C\hat\zeta_0)(\hat a\hat\zeta_0).$$

Выражение, стоящее в квадратных скобках, можно исключить согласно (19). Тогда получаем

$$2\tilde s(\hat\zeta_0\hat a)\hat\zeta_1(\hat a\hat\zeta_0) = (\tilde\Delta/ik)(\hat\zeta_0\hat B - \hat C\hat\zeta_0) + (1/ik)(\hat\zeta_0\hat a)(\hat\zeta_0\hat B - \hat C\hat\zeta_0)(\hat a\hat\zeta_0).$$

Отсюда для $\hat\zeta_1$ окончательно имеем

$$\hat\zeta_1 = \frac{1}{2ik\tilde s}(\hat\zeta_0\hat B - \hat C\hat\zeta_0) + \frac{\tilde\Delta}{2ik\tilde s}\hat a^{-1}(\hat B\hat\zeta_0^{-1} - \hat\zeta_0^{-1}\hat C)\hat a^{-1}.$$

Используя (20), для величин $\tilde s$ и $\tilde\Delta$ легко получить следующие выражения:

$$\tilde s = \sqrt{2\sqrt{\Delta_a\Delta_b} + \Delta_b s}, \quad \tilde\Delta = \sqrt{\Delta_a\Delta_b},$$

где

$$\Delta_a = \det\hat a.$$

Все величины, входящие в (20), от волнового вектора $\varkappa$ не зависят, поэтому импеданс $\hat\zeta_0$ является сторонним. Но поправка $\hat\zeta_1$ уже зависит от волнового вектора, так как $\hat B$ и $\hat C$ содержат $\varkappa$.

Аналогичным образом можно получить и следующие члены разложения (17).

Рассмотрим теперь случай, когда $\mu_{ik} \gg 1$. В этом случае множителем $1/\lambda$ снабдим тензор магнитной проницаемости. Ход вычислений при этом полностью аналогичен предыдущему. Различие состоит в том, что разложение теперь начинается с члена $1/\lambda^{1/2}$, т. е. тензор поверхностного импеданса $\hat\zeta$ имеет вид

$$\hat\zeta = \lambda^{-1/2}\hat\zeta_0 + \hat\zeta_1 + \lambda^{1/2}\hat\zeta_2 + \ldots \tag{22}$$

Существенно, что члены разложения в (22) полностью совпадают с соответствующими (т. е. имеющими одинаковые индексы) членами разложения (17).

Легко получить точное решение уравнения (11) в том случае, когда проницаемости среды имеют специальный вид:

$$\|\varepsilon_{ik}\| = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & 0 \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{pmatrix}, \qquad \|\mu_{ik}\| = \begin{pmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} & 0 \\ \mu_{21} & \mu_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \mu_{33} \end{pmatrix}. \tag{23}$$

Под этот случай попадают гиротропные среды и ферриты, находящиеся в постоянном подмагничивающем поле, направленном по оси z. При этом, как видно из (9) и (7), матрицы $\hat{B}$ и $\hat{C}$ равны нулю и уравнение (11) принимает вид

$$\hat{\zeta}\hat{A}\hat{\zeta} = \hat{D}, \tag{24}$$

аналогичный (18). В данном случае

$$A_{\alpha\beta} = -ik\varepsilon_{\alpha\beta} - (\varkappa^2/ik\mu_{nn})\,T_{\alpha\beta},$$

$$D_{\alpha\beta} = -ik\Delta(\mu)\,\mu^{-1}_{\beta\alpha} - (\varkappa^2/ik\varepsilon_{nn})\,L_{\alpha\beta},$$

где $\Delta(\mu)$ — определитель матрицы $\mu_{\alpha\beta}$. Решением уравнения (24) будет

$$\hat{\zeta} = \hat{A}^{-1}\frac{\sqrt{\Delta_{AD}}\,\hat{I} + \hat{A}\hat{D}}{\sqrt{2\sqrt{\Delta_{AD}} + s_{AD}}} = \hat{A}^{-1}\hat{Q}, \tag{25}$$

где

$$\hat{Q} = \frac{\sqrt{\Delta_{AD}}\,\hat{I} + \hat{A}\hat{D}}{\sqrt{2\sqrt{\Delta_{AD}} + s_{AD}}}, \tag{26}$$

$$\Delta_{AD} \equiv \det(\hat{A}\hat{D}), \quad s_{AD} \equiv \mathrm{Sp}(\hat{A}\hat{D}).$$

Матрица $\hat{Q}$, как следует из (24), удовлетворяет уравнению

$$\hat{Q}^2 = \hat{A}\hat{D}.$$

Матрицы $\hat{A}$ и $\hat{D}$ зависят от $\varkappa$, поэтому импеданс (25) не является сторонним.

3. ПЕРЕСЧЕТ ИМПЕДАНСА ЧЕРЕЗ ОДНОРОДНЫЙ АНИЗОТРОПНЫЙ СЛОЙ

Рассмотрим структуру, изображенную на рис. 1. Пусть в слое $0<z<a$ проницаемости не зависят от z. Внутри слоя импеданс удовлетворяет уравнению (10), и матрицы $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ и $\hat{D}$ от z не зависят. Мы ограничимся случаем, когда ε_{ik} и μ_{ik} имеют вид (23). Тогда $\hat{B} = \hat{C} = 0$ и $\hat{\zeta}$ удовлетворяет уравнению

$$\hat{\zeta}' - \hat{\zeta}\hat{A}\hat{\zeta} + \hat{D} = 0. \tag{27}$$

Прямой подстановкой можно убедиться, что решением уравнения (27), удовлетворяющим граничному условию (12), является

$$\hat{\zeta}(z) = \hat{\zeta}^c\left(\hat{\zeta}^c \operatorname{ch}\hat{Q}(z-a) - \hat{\zeta}^{(+)}\operatorname{sh}\hat{Q}(z-a)\right)^{-1}\left(\hat{\zeta}^{(+)}\operatorname{ch}\hat{Q}(z-a) - \hat{\zeta}^c\operatorname{sh}\hat{Q}(z-a)\right), \tag{28}$$

где величина

$$\hat{\zeta}^c \equiv \hat{A}^{-1}\hat{Q}$$

представляет собой импеданс однородного полупространства с такими же проницаемостями, как у слоя (см. (25)). Следовательно, на нижней границе слоя (при $z = 0$) импеданс будет

$$\hat{\zeta} \equiv \hat{\zeta}(0) = \hat{\zeta}^c (\hat{\zeta}^c \operatorname{ch} \hat{Q}a + \hat{\zeta}^{(+)} \operatorname{sh} \hat{Q}a)^{-1} (\hat{\zeta}^{(+)} \operatorname{ch} \hat{Q}a + \hat{\zeta}^c \operatorname{sh} \hat{Q}a). \quad (29)$$

В частности, если примыкающее сверху к слою полупространство является идеальным проводником, то $\hat{\zeta}^{(+)} = 0$ и (29) дает

$$\hat{\zeta} = \hat{\zeta}^c \operatorname{th} \hat{Q}a.$$

Формула (29) неудобна для приложений, так как содержит функции от матрицы. Известно, что произвольную функцию $f(\hat{Q})$ от некоторой матрицы $\hat{Q}$ можно представить в виде полинома по степеням $\hat{Q}$ [6]. В частности, для матриц 2×2 имеем полином первой степени:

$$f(\hat{Q}) = \frac{f(\lambda_1)}{\lambda_1 - \lambda_2} (\hat{Q} - \lambda_2 \hat{I}) + \frac{f(\lambda_2)}{\lambda_2 - \lambda_1} (\hat{Q} - \lambda_1 \hat{I}), \quad (30)$$

где λ_1 и λ_2 — корни уравнения

$$\lambda^2 - \lambda \operatorname{Sp} \hat{Q} + \det \hat{Q} = 0. \quad (31)$$

Используя (30), преобразуем (29) к следующему окончательному виду:

$$\hat{\zeta} = \hat{\zeta}^c \left[\frac{\operatorname{th} \gamma_2}{\mu_2} (\hat{\zeta}^{(+)} + \hat{\zeta}^c \operatorname{th} \gamma_1)(2\hat{Q} - \mu_1 \hat{I}) + (\hat{\zeta}^c + \hat{\zeta}^{(+)} \operatorname{th} \gamma_1) \right]^{-1} \times$$
$$\times \left[\frac{\operatorname{th} \gamma_2}{\mu_2} (\hat{\zeta}^c + \hat{\zeta}^{(+)} \operatorname{th} \gamma_1)(2\hat{Q} - \mu_1 \hat{I}) + (\hat{\zeta}^{(+)} + \hat{\zeta}^c \operatorname{th} \gamma_1) \right], \quad (32)$$

где $\mu_1 = \lambda_1 + \lambda_2$, $\mu_2 = \lambda_1 - \lambda_2$, $\gamma_1 = a\mu_1/2$, $\gamma_2 = a\mu_2/2$, а λ_1 и λ_2 — корни уравнения (31). Из (26) следует, что

$$\det \hat{Q} = \sqrt{\Delta_{AD}}, \quad \operatorname{Sp} \hat{Q} = \sqrt{2\sqrt{\Delta_{AD}} + s_{AD}}.$$

Выражение (32) дает искомое правило пересчета импеданса через однородный анизотропный слой, т. е. определяет импеданс на нижней границе слоя через импеданс на верхней границе. Если структура содержит несколько однородных слоев, то ее импеданс может быть получен последовательным пересчетом через слой с помощью формулы (32).

Автор благодарен С. М. Рытову за интерес к работе и обсуждение ее результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Курушин Е. П., Нефедов Е. И., Фиалковский А. Т. Дифракция электромагнитных волн на анизотропных структурах. — М.: Наука, 1975.
2. Миллер М. А., Таланов В. И. — Изв. вузов — Радиофизика, 1961, 4, № 5, с. 795.
3. Леонтович М. А. — В сб.: Исследования по распространению радиоволн / Под ред. Б. А. Введенского. — М.—Л., АН СССР, 1948, с. 5.
4. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. — М.: Наука, 1982.
5. Хаскинд М. Д. — Радиотехника и электроника, 1961, 6, вып. 6, с. 886.
6. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. — М.: Наука, 1967.

Поступила в редакцию
19 сентября 1983 г.

THE SURFACE IMPEDANCE EQUATION FOR AN ANISOTROPIC MEDIUM

V. G. Polevoi

The surface impedance equation for anisotropic medium which electric and magnetic penetrations depends on transverse coordinate only is derived. Some cases are considered when this equation may be solved axactly or approximately.