ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XXVII, № 10 *РАДИОФИЗИКА* *1984*

УДК 537.24:535.23

ФОРМИРОВАНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ ЗАДАННОГО СПЕКТРАЛЬНОГО СОСТАВА И ПОЛЯРИЗАЦИИ

В. Г. Багров, М. М. Никитин, Н. И. Федосов, В. Я. Эпп

Поставлена и решена задача по определению движения заряженной частицы, электрический вектор поля излучения которой в волновой зоне в заданном направлении является наперед заданной функцией времени.

Большой интерес в последнее время вызывает обратная задача излучения. Наиболее актуальными сейчас являются две стороны этой задачи: а) определение характера движения заряженной частицы по известным (наблюдаемым) параметрам излучения; б) создание источников излучения с заранее заданными спектральными и поляризационными свойствами. Например, предложено несколько способов формирования параметров излучения в системах типа ондуляторов [1–4]. В работах [5–7] для системы типа «короткого» магнита фактически решена задача о создании наперед заданной формы спектра для ограниченного интервала частот путем подбора эффективного поля на траектории заряда. Однако в общем случае решение такого типа задач неизвестно (что, например, отмечалось в [4], с. 2). В данной работе предлагается общее теоретическое решение одночастичной обратной задачи излучения.

Постановка задачи. Пусть наблюдается электромагнитное излучение, испускаемое в заданном направлении $\boldsymbol{n}$ ($\boldsymbol{n}$ — единичный постоянный вектор) и создаваемое одним движущимся зарядом вдали от этого заряда (в волновой зоне). Требуется найти такое движение заряда, чтобы электрический вектор поля излучения $\boldsymbol{E}(t)$ в месте наблюдения был наперед заданной функцией времени.

Очевидно, поставленная задача эквивалентна задаче формирования наперед заданного спектра и поляризации излучения. Столь же очевидно, что решение этой задачи одновременно позволяет восстанавливать характер движения заряда, если экспериментально известна функция $\boldsymbol{E}(t)$.

Аналитическое решение поставленной задачи достигается следующим образом.

Если известно электрическое поле излучения $\boldsymbol{E}(t)$, то, очевидно, известно [8] и магнитное поле излучения $\boldsymbol{H} = [\boldsymbol{n}\boldsymbol{E}]$, причем известно, что в волновой зоне $(\boldsymbol{n}\boldsymbol{E}) = 0$. Связь между $\boldsymbol{E}(t)$ и параметрами движения заряда дается формулами Лиенара—Вихерта [8]:

$$\boldsymbol{E}(t) = \frac{e}{cR}\frac{[\boldsymbol{n}[(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{\beta})\dot{\boldsymbol{\beta}}]]}{[1-(\boldsymbol{n}\boldsymbol{\beta})]^3}, \quad \boldsymbol{\beta}(t') = \frac{d\boldsymbol{r}(t')}{c\,dt'}, \quad \dot{\boldsymbol{\beta}}(t') = \frac{d\boldsymbol{\beta}(t')}{dt'},$$
$$t = t' + R/c - (\boldsymbol{n}\boldsymbol{r}(t'))/c, \qquad \boldsymbol{n} = \boldsymbol{R}/R, \tag{1}$$

где $\boldsymbol{R}$ — радиус-вектор, идущий из начала координат (которое поместим вблизи излучающей частицы) в точку наблюдения, $R = |\boldsymbol{R}|$, в правых частях формулы (1) все величины берутся в момент времени t', и, следовательно, формула (1) задает $\boldsymbol{E}(t)$ в параметрическом виде (t' — параметр). Искомой величиной является $\boldsymbol{r}(t')$ — радиус-вектор излучающей частицы.

Введем вектор электромагнитного потенциала $\boldsymbol{A}(t)$, задаваемый параметрической формулой

$$\boldsymbol{A}(t)=\frac{e}{R}\boldsymbol{f}(t), \qquad \boldsymbol{f}(t)=\frac{\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{n}(\boldsymbol{n\beta})}{1-(\boldsymbol{n\beta})}, \qquad (\boldsymbol{nf})=0. \tag{2}$$

Учитывая соотношение

$$\partial t'/\partial t=[1-(\boldsymbol{n\beta})]^{-1}, \tag{3}$$

легко видеть, что

$$\boldsymbol{E}(t)=-\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{A}(t)}{\partial t}=-\frac{e}{cR}\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial t}=-\frac{e}{cR}\frac{\partial t'}{\partial t}\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial t'}. \tag{4}$$

Поскольку функция $\boldsymbol{E}(t)$ известна, то считаем известной функцию $\boldsymbol{f}(t)$:

$$\boldsymbol{f}(t)=-\frac{cR}{e}\int \boldsymbol{E}(t)\,dt. \tag{5}$$

Из формулы (2) легко определить величину $(\boldsymbol{n\beta})$:

$$(\boldsymbol{n\beta})=(f^2+\varphi)(1+f^2)^{-1}, \qquad \varphi=\varphi(t)=\pm[\beta^2-f^2(1-\beta^2)]^{1/2}. \tag{6}$$

Отметим, что из (6) следуют неравенства

$$f^2\leqslant \beta^2(1-\beta^2)^{-1}, \qquad \varphi^2(t)<1. \tag{7}$$

Учитывая (3), находим

$$\frac{(\boldsymbol{n\beta})}{1-(\boldsymbol{n\beta})}=\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{nr}(t')), \tag{8}$$

а из (6) получаем

$$\frac{(\boldsymbol{n\beta})}{1-(\boldsymbol{n\beta})}=\frac{\beta^2+\varphi}{1-\beta^2}. \tag{9}$$

Сравнивая (8) и (9), придем к соотношению

$$\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{nr}(t'))=c\,\frac{\beta^2+\varphi}{1-\beta^2}. \tag{10}$$

Из формулы (2) с учетом (3) и (8) найдем

$$\frac{\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{n}(\boldsymbol{n\beta})}{1-(\boldsymbol{n\beta})}=\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}[\boldsymbol{r}(t')-\boldsymbol{n}(\boldsymbol{nr}(t'))]=\boldsymbol{f}(t). \tag{11}$$

Из (11) и (10) теперь имеем

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}(t')}{\partial t}=c\boldsymbol{f}(t)+c\boldsymbol{n}\,\frac{\beta^2+\varphi}{1-\beta^2}. \tag{12}$$

Из формул (3) и (6) найдем связь t и t':

$$\partial t'/\partial t=(1+\varphi)(1-\beta^2)^{-1}. \tag{13}$$

Если бы β^2 было известной функцией t, то формулы (12) и (13) давали бы решение задачи в параметрическом виде. Но легко видеть, что при любой зависимости $\beta^2(t)$ формулы (12) и (13) дают решение поставленной задачи.

Таким образом, по известной функции $\boldsymbol{f}(t)$ движение заряда восстанавливается в параметрическом виде:

$$\boldsymbol{r}(t') = c\int \boldsymbol{f}(t)\,dt + c\boldsymbol{n}\int \frac{\beta^2+\varphi}{1-\beta^2}\,dt, \qquad t' = \int \frac{1+\varphi}{1-\beta^2}\,dt - \frac{R}{c}, \tag{14}$$

причем здесь β^2 есть произвольная функция t (с естественным ограничением $\beta^2(t) < 1$), а функция $\varphi(t)$ связана с β^2 соотношением (6). Можно решение (14) представить и в другой форме, а именно из (6) следует

$$\beta^2 = (f^2 + \varphi^2)(1 + f^2)^{-1}. \tag{15}$$

Тогда формулы (14) преобразуются в выражения

$$\boldsymbol{r}(t') = c\int \boldsymbol{f}(t)\,dt + c\boldsymbol{n}\int \frac{f^2+\varphi}{1-\varphi}\,dt, \qquad t' = \int \frac{1+f^2}{1-\varphi}\,dt - \frac{R}{c}, \tag{16}$$

где функцию $\varphi(t)$ можно считать уже произвольной, и она, конечно, должна удовлетворять неравенству (7). Наконец, возможно представить решение задачи в следующем виде:

$$\boldsymbol{r}(t') = c\int \boldsymbol{f}(t)\,dt + c\boldsymbol{n}\,[\psi(t) - t], \qquad t' = \psi(t) - R/c. \tag{17}$$

Здесь $\psi(t)$ — произвольная монотонно возрастающая функция t, удовлетворяющая условию $2\psi'(t) > 1 + f^2$. Функцию $\varphi(t)$ можно выразить через $\psi(t)$ в виде

$$\varphi(t) = 1 - (1 + f^2)/\psi'(t). \tag{18}$$

Из (14), (16) или (17) несложно найти

$$\boldsymbol{\beta}(t') = [\boldsymbol{f}(t)(1-\varphi) + \boldsymbol{n}(f^2+\varphi)](1+f^2)^{-1} = [\boldsymbol{f}(t) + \boldsymbol{n}(\psi'-1)]/\psi'. \tag{19}$$

Таким образом, формулы (14), (16) или (17) дают решение поставленной задачи. Как видим, оно не единственно и содержит одну произвольную функцию. Отметим, что произвол связан с неоднозначностью определения движения заряда вдоль вектора $\boldsymbol{n}$ (вдоль направления распространения поля) и, соответственно этому, с определением связи между временем t' излучения поля и временем t его наблюдения.

Возникает естественный вопрос, нельзя ли использовать этот произвол так, чтобы, например, обеспечить не только нужную зависимость $\boldsymbol{E}(t)$ при фиксированном $\boldsymbol{n}$, но и попытаться обеспечить наперед заданную зависимость $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{n}, t)$. Очевидно, что ответ на этот вопрос, вообще говоря, отрицательный, так как одна произвольная функция одной переменной ($\varphi(t)$ например) не может, в общем случае, обеспечить наперед заданную зависимость от двух переменных $\boldsymbol{n}$ (поскольку $\boldsymbol{n}$ — единичный вектор, то независимыми являются только две его компоненты).

Отметим некоторые общие особенности полученного решения. Поскольку функция $\boldsymbol{f}(t)$ определяется по полю $\boldsymbol{E}(t)$ с точностью до произвольного постоянного вектора, то вектор $\boldsymbol{r}(t')$ определяется с точностью до произвольной в плоскости, ортогональной $\boldsymbol{n}$, лоренцевской трансляции в системе наблюдателя. Следовательно, если $\boldsymbol{f}(t)$ ограничено, всегда можно выбрать движение таким, чтобы средняя скорость в направлениях, ортогональных $\boldsymbol{n}$, была нулевой. В направлении $\boldsymbol{n}$ этого, вообще говоря, сделать нельзя. Однако если $f^2(t)<1$, то, полагая $\varphi(t)=-f^2(t)$, найдем замечательный по простоте результат:

$$r(t')=c\int f(t)\,dt, \qquad t'=\tilde{t}-R/c, \tag{20}$$

т. е. излучение с такой зависимостью поля от времени реализуется движением в плоскости, ортогональной $\boldsymbol{n}$, однако амплитуда потенциала поля излучения не может быть сколь угодно большой. Если функция $f^2(t)$ ограничена (но может быть и $f^2(t)>1$), то всегда можно выбрать в (17) $\psi(t)=\gamma t$, где γ — постоянная, удовлетворяющая условию $2\gamma>1+f^2$. В этом случае произвольный спектр реализуется сложным движением в плоскости, ортогональной $\boldsymbol{n}$, и поступательно-равномерным движением вдоль $\boldsymbol{n}$. Форма траектории в плоскости, ортогональной $\boldsymbol{n}$, определяется однозначно функцией $\boldsymbol{f}(t)$. Если потребовать, например, чтобы излучение было линейно поляризовано ($\boldsymbol{f}(t)$ имеет отличную от нуля одну компоненту), то такое излучение создается зарядом, движущимся по плоской (с точностью до лоренцевской трансляции) траектории. Для электрона, движущегося в плоском магнитном ондуляторе, это свойство излучения было отмечено в [9–11]. Здесь же показано, что это утверждение носит общий характер.

Важным, на наш взгляд, является следующий вывод: решение поставленной задачи при ограниченной функции $\boldsymbol{f}(t)$ всегда может быть обеспечено движением с постоянной по модулю скоростью ($\beta^2=\mathrm{const}$). Такое движение заряда может быть реализовано, например, с помощью только магнитного внешнего поля. Если же $\boldsymbol{f}(t)$ неограниченна, то, как следует из (7), этот случай может быть реализован лишь при движении, когда $\beta^2(t)\to 1$, что обязательно предполагает наличие внешнего электрического поля.

В заключение приведем несколько конкретных примеров применения полученных результатов. Считаем, для определенности, что вектор $\boldsymbol{n}$ направлен по оси z.

Например, потребуем, чтобы излучение было монохроматическим и поляризованным по кругу, для чего положим

$$\boldsymbol{f}(t)=f_0(\cos\omega t,\ \sin\omega t,\ 0), \qquad f_0=\mathrm{const}, \qquad \omega=\mathrm{const}. \tag{21}$$

Из (17) найдем

$$\boldsymbol{r}(t')=c\omega^{-1}\{f_0\sin\omega t,\ -f_0\cos\omega t,\ \omega\psi(t)-\omega t\}, \quad t'=\psi(t)-R/c, \tag{22}$$

откуда видим, что траектория есть спираль, «намотанная» на цилиндр радиуса $cf_0\omega^{-1}$ с произвольным характером движения вдоль образующих цилиндра, причем поляризованное по кругу монохроматическое излучение распространяется только вдоль образующих цилиндра. Подобный вывод (при $\beta_z=\mathrm{const}$) был известен в теории синхротронного излучения, здесь получено его обобщение.

Пусть излучение линейно поляризовано и монохроматическое. Реализуем такое излучение движением заряда с постоянной по модулю скоростью $\beta^2=\mathrm{const}$. Выбирая $\boldsymbol{f}(t)$ в виде

$$\boldsymbol{f}(t)=\{\beta(1-\beta^2)^{-1/2}\cos\omega t,\ 0,\ 0\}, \tag{23}$$

по формулам (14) найдем

$$\begin{gathered}\boldsymbol{r}(t')=c\beta\gamma\left\{\sqrt{1-\beta^2}\sin\omega t,\ 0,\ \beta\omega t\pm\cos\omega t\right\},\\ t'=\gamma\omega t\pm\gamma\beta\cos\omega t-R/c, \qquad \gamma^{-1}=\omega(1-\beta^2).\end{gathered} \tag{24}$$

Формулы (24) описывают движение в плоском магнитном ондуляторе специального вида, а наблюдение излучения ведется вдоль оси ондулятора, причем наблюдается только первая гармоника излучения.

Рассмотрим, наконец, линейо-поляризованное излучение «колоколообразного» вида, выбирая

$$f(t) = \{\beta(1-\beta^2)^{-1/2}\operatorname{th}\omega t,\ 0,\ 0\}, \tag{25}$$

где β и ω — постоянные. Очевидно, что при таком выборе $f(t)$ поле $E(t) \sim \operatorname{ch}^{-2}\omega t$. Считая скорость заряда по модулю постоянной и равной $c\beta$, по формулам (14) найдем

$$\begin{aligned} r(t') &= c\beta\gamma\,\{\sqrt{1-\beta^2}\ln\operatorname{ch}\omega t,\ 0,\ \beta\omega t \pm \operatorname{arctg}\operatorname{sh}\omega t\}, \\ t' &= \gamma\omega t \pm \gamma\beta\operatorname{arctg}\operatorname{sh}\omega t - R/c, \qquad \gamma^{-1} = \omega(1-\beta^2). \end{aligned} \tag{26}$$

Формулы (26) описывают движение в системах типа повторных магнитов, в частности, при релятивистском движении заряда ($1-\beta^2 \ll 1$) в системах типа «короткого» магнита, которое изучалось в [5–7].

Полученные здесь результаты позволяют, таким образом, аналитически решить задачу о формировании излучения с наперед заданными свойствами. Определение характера движения заряда по наблюдаемому излучению однозначно не может быть проведено, однако в аналитическом виде явно выделен произвол в решении этой задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Никитин М. М., Эпп В. Я. — ЖТФ, 1976, **46**, с. 2386.
2. Никитин М. М., Федосов Н. И. — ЖТФ, 1977, **47**, с. 2478.
3. Моисеев М. Б., Никитин М. М., Федосов Н. И. — Изв. вузов — Физика, 1978, № 3, с. 76.
4. Бессонов Е. Г., Серов А. В. Препринт № 62, ФИАН СССР, М., 1982.
5. Багров В. Г, Никитин М. М., Тернов И. М., Федосов Н. И. — Изв. вузов — Радиофизика, 1983, **26**, № 2, с. 253.
6. Bagrov V. G., Nikitin M. M., Ternov I. M., Fedosov N. I.— Nucl. Instr. Meth. 1983, **208**, № 1—3, p. 167.
7. Bagrov V. G., Fedosov N. I., Ternov I. M.— Phys. Rev. D:, 1983, **28**, № 10, p. 2464.
8. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля. — М.: Наука, 1973.
9. Bagrov V. G., Khalilov V. R., Sokolov A. A., Ternov I. M.— Ann. Phys., 1973, **30**, p. 1.
10. Багров В. Г., Соколов А. А., Тернов И. М., Федосов Н. И., Халилов В. Р. — ЖТФ, 1975, **45**, № 9, с. 1948.
11. Багров В. Г., Гитман Д. М. и др. — ЖТФ, 1975, **45**, № 9, с. 1948.

Институт сильноточной электроники
СО АН СССР

Поступила в редакцию
8 августа 1983 г.,
в окончательном варианте
1 февраля 1984 г.

FORMATION OF ELECTROMAGNETIC RADIATION OF THE GIVEN SPECTRAL COMPOSITION AND POLARIZATION

V G. Bagrov, M. M. Nikitin, N. I. Fedosov, V. Ya. Epp

A problem is set and solved on definition of a charged particle motion, the electric vector of the radiation field of which in the wave zone in the given direction is the time function given in advance.