ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XXVII, № 10 *РАДИОФИЗИКА* *1984*

УДК [621 371 3 029 64 : 535.3'311]001.24+537.874 72

МЕТОД ЭЙКОНАЛЬНЫХ ТРАЕКТОРИЙ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ К РАСЧЕТУ КОМПЛЕКСНЫХ ЭЙКОНАЛОВ В ОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

Р. Л. Евельсон

По аналогии с лучом в двумерном действительном пространстве определены траектории, на которых однозначно вычисляется комплексный эйконал в однородной изотропной среде. Получено явное вещественное параметрическое представление эйкональной траектории и комплексного эйконала.

Как известно, расчет эйконала представляет собой первый и самый важный этап как в методе геометрической оптики (ГО) при нахождении фазовой структуры или лучевой картины локально-плоских волновых полей, так и во всей асимптотической теории дифракции [1–10]. Если действительные эйконалы возникают как обобщение фазы обычных однородных плоских волн, то комплексные — в случае неоднородных плоских волн. Последние позволяют локально описать высокочастотные неоднородные волны, возникающие в поглощающих средах, а в случае сред без потерь — поля в области тени, явления полного внутреннего отражения, поверхностные волны, распространение гауссовых пучков и т. д. [4–6].

В настоящее время для расчета комплексных эйконалов используются комплексные лучи, представляющие собой комплексные характеристики уравнения эйконала в комплексном пространстве декартовых (в общем случае — любых криволинейных) координат [6, 8]. Как и действительный эйконал на обычном геометрооптическом луче, комплексный эйконал путем однократного интегрирования однозначно определяется в любой точке комплексного луча.

Однако использование комплексных лучей для расчета комплексного эйконала неэффективно, так как последний имеет физический смысл лишь в одной точке пересечения комплексных лучей с действительным пространством [4–6]. Поэтому в [4, 5] для расчета комплексного эйконала в среде без потерь предлагается геометрооптические лучи заменить не на комплексные лучи, а на фазовые траектории в действительном пространстве, вдоль которых мнимая часть комплексного эйконала постоянна. Но так как в само определение фазовых траекторий входит еще неизвестный комплексный эйконал, то метод их нахождения оказывается очень громоздким. Например, в [4] фазовые траектории даже в однородной среде находятся по методу возмущений (всего лишь) для слабо неоднородных волн, а в [9] — по несколько более общему методу итераций путем «последовательного построения действительных лучей в фиктивных неоднородных средах». Но, как отмечается в [9], «заранее неясно, будет ли этот процесс сходящимся. Кроме того, его трудно реализовать».

Что касается поглощающих сред, то здесь возможность замены комплексных лучей на траектории в действительном пространстве некоторыми авторами вообще ставится под сомнение. Например, в [10], с. 198, утверждается, что «при наличии потерь не существует вещественных траекторий, вдоль которых эйконал определялся бы только своим значением в точке выхода траектории из начальной поверхности».

В данной работе показано, что возможен другой подход, при котором «вещественные траектории» получаются естественным путем без каких бы то ни было дополнительных априорных соображений о степени поглощения в среде, о неоднородности волн или о преимуществах той или иной части комплексного эйконала.

1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЭЙКОНАЛЬНОЙ ТРАЕКТОРИИ

В двумерной однородной изотропной среде, отнесенной к обычным декартовым координатам x, y, по аналогии с лучевой картиной [7], с. 21, определим эйкональную картину как семейство линий, заданное параметрически уравнениями

$$x = a(\tau) + s\cos f(\tau), \quad y = b(\tau) + s\sin f(\tau), \tag{1}$$

где τ, s — некоторые комплексные параметры:

$$\tau = \operatorname{Re}\tau + i\operatorname{Im}\tau = \tau' + i\tau'', \quad s = s' + is'', \tag{2}$$

a, b, f — произвольные аналитические функции комплексного переменного τ:

$$a = a(\tau) = a'(\tau', \tau'') + ia''(\tau', \tau'') = a' + ia'' \tag{3}$$

и аналогично для функций $b(\tau)$, $f(\tau)$ и ниже для $c(\tau)$. При данных функциях a, b, f уравнения (1) представляют четыре действительных соотношения между шестью действительными величинами (x, y, τ', τ'', s', s''):

$$\begin{aligned} x - a' &= s'\cos f'\operatorname{ch} f'' + s''\sin f'\operatorname{sh} f'',\\ y - b' &= s'\sin f'\operatorname{ch} f'' - s''\cos f'\operatorname{sh} f'',\\ -a'' &= -s'\sin f'\operatorname{sh} f'' + s''\cos f'\operatorname{ch} f'',\\ -b'' &= s'\cos f'\operatorname{sh} f'' + s''\sin f'\operatorname{ch} f'', \end{aligned} \tag{4}$$

т. е. эти уравнения и в самом деле неявно описывают некоторое однопараметрическое семейство линий в действительном пространстве.

Если в (4) фиксировать τ' и менять τ'', то аналогично тому, как в лучевой картине выделяется ее элемент — луч, из эйкональной картины выделится линия $\tau'=\text{const}$, которую, в отличие от луча, будем называть эйкональной траекторией, соответствующей данному значению τ'. Сейчас мы вместо неявного (4) получим явное параметрическое представление эйкональной картины или эйкональных траекторий.

Соотношение (4) можно рассматривать как систему из четырех линейных алгебраических уравнений относительно четырех неизвестных (x, y, s', s'') с определителем

$$\Delta = \operatorname{ch} f''\operatorname{sh} f'' = \operatorname{sh} 2f''/2. \tag{5}$$

Отсюда следует, что если условие

$$f'' = f''(\tau', \tau'') \equiv 0 \tag{6}$$

не выполняется, то $\Delta \neq 0$ и система (4) имеет единственное решение, которое можно представить в виде

$$s' = \frac{a''\sin f' - b''\cos f'}{\operatorname{sh} f''}, \quad s'' = -\frac{a''\cos f' + b''\sin f'}{\operatorname{ch} f''}; \tag{7}$$

$$x = a' + \frac{a''\sin 2f' - b''(\operatorname{ch} 2f'' + \cos 2f')}{\operatorname{sh} 2f''} \equiv X(\tau', \tau''); \tag{8}$$

$$y = b' + \frac{a''(\operatorname{ch} 2f'' - \cos 2f') - b''\sin 2f'}{\operatorname{sh} 2f''} \equiv Y(\tau', \tau''). \tag{9}$$

Уравнения (8), (9) дают искомое явное параметрическое представление эйкональной картины, а при фиксированном $\tau'=\mathrm{const}$ — эйкональных траекторий в действительном пространстве. Параметром для последних является τ''. Меняя τ', получим однопараметрическое семейство эйкональных траекторий, т. е. всю эйкональную картину.

Рассмотрим теперь случай, когда условие (6) выполняется. В этом случае τ'' не может играть роль параметра, так как при заданном τ' значение τ'' определяется из (6), в то время как в (8), (9) τ'' не зависит от τ'. Но теперь сама система (4) является вырожденной ($\Delta=0$), и ее решение при выполнении условия совместности

$$a''(\tau', \tau'')\sin f'(\tau', \tau'') = b''(\tau', \tau'')\cos f'(\tau', \tau'') \tag{10}$$

имеет вид

$$x = a' + s'\cos f', \quad y = b' + s'\sin f' \quad (f'' \equiv 0); \tag{11}$$

$$s'' = -a''/\cos f' = -b''/\sin f' \quad (f'' \equiv 0). \tag{12}$$

В отличие от (7) здесь s' произвольно и играет роль параметра (11), эйкональная траектория в этом вырожденном случае является прямой линией

$$\frac{x - a'(\tau', \tau'')}{\cos f'(\tau', \tau'')} = \frac{y - b'(\tau', \tau'')}{\sin f'(\tau', \tau'')}. \tag{13}$$

Таким образом, в данном разделе показано, что эйкональная траектория всегда может быть помечена значением τ' (чем и объясняется выбор именно этой величины в ее определении), в то время как τ'' либо s' являются параметром. Соответственно явное параметрическое представление дается либо формулами (8), (9), либо (11). Исключая (если удастся) из этих формул параметр τ'' или s', получим явное или неявное уравнение эйкональной траектории. Например, уравнение (13) — не что иное как результат исключения s' из (11).

2. ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ КОМПЛЕКСНОГО ЭЙКОНАЛА В ОДНОРОДНОЙ ИЗОТРОПНОЙ СРЕДЕ

Как известно, эйконалом называется любое решение уравнения эйконала

$$(\nabla u)^2 \equiv (\partial u/\partial x)^2 + (\partial u/\partial y)^2 = n^2, \tag{14}$$

где $n=n'+in''$ есть произвольная комплексная константа (в том числе и действительная). Можно показать неявным дифференцированием, что решение этого уравнения имеет вид

$$u=u(x, y)=c(\tau)+ns, \tag{15}$$

где $c(\tau)$ — аналитическая функция τ, удовлетворяющая условию (см. (1))

$$\dot{c}(\tau) = n\,[\dot{a}(\tau)\cos f(\tau) + \dot{b}(\tau)\sin f(\tau)] \tag{16}$$

(точка сверху означает дифференцирование по τ), а, вообще говоря, комплекснозначные функции

$$\tau=\tau(x,\ y),\quad s=s(x,\ y) \tag{17}$$

определяются как решения системы уравнений (1).

Если условие (6) не выполняется, то параметром эйкональной траектории является τ'', и эйконал (15) с учетом (7) можно представить в виде

$$u=c(\tau)+ns(\tau',\ \tau'')\equiv U(\tau',\ \tau''). \tag{18}$$

Если условие (6) выполняется, то $\tau''=\tau''(\tau')$, параметром эйкональной траектории является s', и эйконал (15) с учетом (12) можно представить в виде

$$u=c[\tau'+i\tau''(\tau')]+[s'+is''(\tau')]\,n=\widetilde{U}(\tau',\ s'). \tag{19}$$

Функции (18), (19) и являются искомым вещественным параметрическим представлением комплексного эйконала в однородной изотропной среде. Они показывают, что в каждой точке эйкональной траектории комплексный эйконал определяется однозначно, чем и обусловлены принятые выше названия эйкональная картина и эйкональная траектория.

При данных функциях a, b, c (которые можно рассматривать как аналог начальных данных Коши при решении задачи Коши для уравнения (14) методом характеристик [7,8]) и константе n соотношение (16) можно рассматривать как уравнение для нахождения функции $f=f(\tau)$, необходимой для подстановки в (1). В частности, можно получить

$$\cos f=(\dot a\dot c+\delta\gamma\dot b)/[n(\dot a^2+\dot b^2)],\quad \sin f=(\dot b\dot c-\delta\gamma\dot a)/[n(\dot a^2+\dot b^2)]; \tag{20а}$$

$$e^{if}=(\delta\gamma+i\dot c)/[n(\dot b+i\dot a)],\quad e^{-if}=(\delta\gamma-i\dot c)/[n(\dot b-i\dot a)]; \tag{20б}$$

$$\gamma=\gamma(\tau)=[n^2(\dot a^2+\dot b^2)-\dot c^2]^{1/2}\quad (0\leqslant\arg\gamma<\pi). \tag{21}$$

Здесь знак $\delta=\pm1$ явно указывает на двузначность решения нелинейного уравнения эйконала (14). Ниже из примеров будет видно, что эйкональную картину или эйкональную траекторию целесообразно назвать прямой при $\delta=1$ и обратной — при $\delta=-1$.

3. ПРИМЕРЫ

3.1. Отражение лучевого поля [2,3,12] на криволинейной границе раздела двух сред. Пусть лучевое поле с эйконалом

$$\psi=\psi(x,\ y),\quad (\nabla\psi)^2\equiv\psi_x^2+\psi_y^2=1 \tag{22}$$

из вакуума ($n=1$) падает на произвольную границу раздела

$$x=x_0(t),\quad y=y_0(t) \tag{23}$$

с поглощающей средой с комплексным показателем преломления n.

В соответствии с общей постановкой задачи в настоящей работе мы интересуемся лишь эйконалами отраженных и преломленных волн, отвлекаясь от вопроса как о числе этих волн, приходящих в данную точку наблюдения, так и об их амплитудах [6–9].

Как известно [7], эйконалы всех отраженных и преломленных волн на кривой (23) должны принимать значение

$$u_0=u_0(t)=\psi(x_0,\ y_0)=\psi[x_0(t),\ y_0(t)], \tag{24}$$

поэтому в формулах (1), (15) берем

$$a(\tau) = x_0(\tau), \quad b(\tau) = y_0(\tau), \quad c(\tau) = u_0(\tau) = \psi(a, b). \tag{25}$$

Так как функции (23) по определению есть действительные функции действительного аргумента, то из (25) получаем

$$a''(\tau', 0) = b''(\tau', 0) = 0; \tag{26}$$

$$a'(\tau', 0) = x_0(\tau'), \quad b'(\tau', 0) = y_0(\tau'). \tag{27}$$

Когда условие (6) не выполняется, эйконал преломленной волны находится по формулам (18) в точках эйкональной траектории (8), (9). Если положить в них $\tau''=0$, то с учетом (26), (27) из (7) получим $s(\tau', 0) = 0$, т. е. линия $\tau''=0$ в эйкональной картине (8), (9) совпадает с границей раздела (23), из которой выходят все траектории.

При отсутствии поглощения возможна область действительного пространства, где условие (6) выполняется. Если при этом существует подобласть, где из (6) следует $\tau''=\tau''(\tau')\equiv 0$, то мы оказываемся в условиях применимости обычной ГО. При этом эйкональная траектория $\tau'=t$ совпадает с геометрооптическим лучом, а в соответствующей лучевой картине граница раздела (23) описывается уравнением $s'=0$.

При $n=1$ из формулы (21) с учетом (22) найдем

$$\gamma = \tilde{\delta}\tilde{\gamma}, \quad \tilde{\gamma} = \tilde{\gamma}(\tau) = \dot{a}(\tau)\psi_y(a, b) - \dot{b}(\tau)\psi_x(a, b), \tag{28}$$

где в соответствии с условием (21) должно быть

$$\tilde{\delta} = \begin{cases} 1 \text{ при } 0 \leqslant \arg\tilde{\gamma} < \pi \\ -1 \text{ при } \pi \leqslant \arg\tilde{\gamma} < 2\pi \end{cases}. \tag{29}$$

Подставив (28) в (20а), без каких бы то ни было сужающих общность геометрических соображений получим

$$\cos f = [\psi_x(\dot{a}^2 - \delta\tilde{\delta}\dot{b}^2) + \psi_y\dot{a}\dot{b}(1 + \delta\tilde{\delta})]/(\dot{a}^2 + \dot{b}^2); \tag{30а}$$

$$\sin f = [\psi_x\dot{a}\dot{b}(1 + \delta\tilde{\delta}) + \psi_y(\dot{b}^2 - \delta\tilde{\delta}\dot{x}^2)]/(\dot{a}^2 + \dot{b}^2). \tag{30б}$$

Отсюда можно показать, что при $\delta = -\tilde{\delta}$ эйконал (15) совпадает с падающим (22). При $\delta=\tilde{\delta}$ из (30) получаем выражения

$$\cos f = \frac{(\dot{a}^2 - \dot{b}^2)\psi_r + 2\dot{a}\dot{b}\psi_y}{\dot{a}^2 + \dot{b}^2}, \quad \sin f = \frac{2\dot{a}\dot{b}\psi_x + (\dot{b}^2 - \dot{a}^2)\psi_y}{\dot{a}^2 + \dot{b}^2}, \tag{31}$$

которые в условиях применимости ГО совпадают с известными выражениями [7, 12] для направляющего вектора отраженного луча, в чем легко убедиться, введя на кривой (23) единичные векторы касательной и нормали. В общем случае такое совпадение возможно лишь на кривой (23), где $\tau''=0$. Это происходит потому, что в условиях применимости ГО начальная кривая (23) фиксируется не глобальной координатой $\tau'=t$, входящей в формулы (31), а глобальной координатой $s'=0$, которая в них не входит. В общем же случае глобальными координатами являются τ', τ'', которые обе входят в формулы (31), справедливые во всем действительном пространстве.

Совместно с формулами (1) и их следствием (8), (9) формулы (31) описывают все многообразие и сложность обратной (в частности, отраженной) эйкональной картины. В зависимости от сложности функций (22), (23) в различных местах действительного пространства могут встречаться зоны света и тени, пересекающиеся геометрооптические лучи и эйкональные траектории, криволинейные эйкональные траектории и т. д.

3.2. Плоская волна на плоской границе раздела. Пусть плоская волна с эйконалом

$$\psi = x\cos\theta + y\sin\theta \quad (\pi < \theta < 2\pi) \tag{32}$$

падает из вакуума на полубесконечную поглощающую среду с комплексной диэлектрической постоянной $\varepsilon = n^2$ с границей раздела $y=0$. В этом случае в формулах (1), (15) полагаем согласно (25)

$$a(\tau) = \tau, \quad b(\tau) = 0, \quad c(\tau) = \tau\cos\theta, \tag{33}$$

тогда по формулам (20а) получим

$$\cos f = \cos\theta/n, \quad \sin f = -\delta\gamma/n, \tag{34}$$

где γ вычисляется по формуле (21):

$$\gamma = \sqrt{\varepsilon - \cos^2\theta} = \gamma' + i\gamma'' \quad (\varepsilon = n^2 = \varepsilon' + i\varepsilon''); \tag{35}$$

$$\gamma' = \left(\frac{\sqrt{p^2 + \varepsilon''^2} + p}{2}\right)^{1/2}, \quad \gamma'' = \left(\frac{\sqrt{p^2 + \varepsilon''^2} - p}{2}\right)^{1/2} \tag{36}$$

$$(p = \varepsilon' - \cos^2\theta).$$

Подставив (33), (34) в (1), найдем

$$x = \tau + s\cos\theta/n, \quad y = -s\delta\gamma/n. \tag{37}$$

Для нахождения эйкональной траектории можно воспользоваться формулами (8), (9). Однако в данном случае проще использовать то, что из (37) легко находятся функции (17):

$$\tau = x + y\delta\cos\theta/\gamma, \quad s = -ny\delta/\gamma. \tag{38}$$

Взяв действительные части от обеих частей первого уравнения, мы исключим параметр τ'' и найдем уравнение эйкональной траектории в виде

$$\tau' = x + \delta y\gamma'\cos\theta/(\gamma'^2 + \gamma''^2). \tag{39}$$

Подставив (38) в (15), найдем явное выражение для эйконала

$$u = x\cos\theta - \delta y\gamma, \tag{40}$$

которое правильно описывает фазу прямой ($\delta=1$) и обратной ($\delta=-1$) неоднородных плоских волн.

Следует отметить, что формула (39) выделяет в поглощающей среде некоторое действительное направление, которое полностью совпадает с направлением луча по Эпштейну [13]. В условиях полного внутреннего отражения, когда в (35) $\gamma'=0$, $\gamma''\neq 0$, из (39) получаем $x=\tau'$, т. е. эйкональная траектория направлена перпендикулярно границе раздела, в то время как фазовая траектория, определяемая в [4,5] как $\operatorname{Im} u = \mathrm{const}$, дает $y=\mathrm{const}$, т. е. направлена вдоль границы раздела, что противоречит результату Эпштейна [13].

3.3. Эйкональная картина с круговой каустикой. В формулах (1), (15) положим

$$a(\tau) = R\cos\tau, \quad b(\tau) = R\sin\tau, \quad c(\tau) = R\tau, \quad n = 1. \tag{41}$$

Тогда по формуле (21) получим $\gamma=0$, а по (20)

$$f=\tau+\pi/2+2\pi k \quad (k \text{ — целое}). \tag{42}$$

Отсюда следует, что условие (6) сводится к $\tau''\equiv 0$.

При $\tau''\equiv 0$ условие совместности (10) выполняется автоматически, $s''=0$ согласно (12), а для эйкональной траектории (11) с учетом (41), (42) получаем

$$x = R\cos\tau' - s'\sin\tau', \quad y = R\sin\tau' + s'\cos\tau'. \tag{43}$$

Соответствующее параметрическое представление эйконала находим аналогично по формуле (19):

$$u=R\tau'+s'. \tag{44}$$

При $\tau''\neq 0$ в формулах (7)—(9) согласно (41) имеем

$$a'' = -R\sin\tau'\,\mathrm{sh}\,\tau'', \quad b'' = R\cos\tau'\,\mathrm{sh}\,\tau'', \tag{45}$$

что с учетом (42) после подстановки в (7) дает

$$s' = 0, \quad s'' = -R\,\mathrm{th}\,\tau''. \tag{46}$$

Для параметрических уравнений эйкональной траектории (8), (9) получим аналогично

$$x = R\cos\tau'/\mathrm{ch}\,\tau'', \quad y = R\sin\tau'/\mathrm{ch}\,\tau'', \tag{47}$$

а из формулы (18) с учетом (46) можно получить соответствующее параметрическое выражение для эйконала

$$u = R\tau' + iR(\tau'' - \mathrm{th}\,\tau''). \tag{48}$$

Из формул (43) следует, что

$$r^2 = x^2 + y^2 = R^2 + s'^2 \geqslant R^2, \tag{49}$$

в то время как из (47) получаем

$$r^2 = x^2 + y^2 = R^2/\mathrm{ch}^2\tau'' \leqslant R^2. \tag{50}$$

Это означает, что эйконал (44) имеет смысл в области действительного пространства вне круга радиуса R, а эйконал (48) — внутри этого круга. Тот факт, что эйконал (44) действительный, а (48) — комплексный, позволяет назвать область вне круга зоной света, а внутри — зоной каустической тени, что и имеет место на самом деле.

Выражения (43), (44) известны [8] и представляют собой обычные геометрооптические лучи и эйконал в зоне света. Если из (47) выразить τ', τ'' через x, y и подставить их в (48), то получим известное значение комплексного эйконала, полученное в [8] методом комплексной ГО с использованием понятия комплексной точки касания.

Можно считать, что формулы (43) и (47) представляют одну и ту же эйкональную картину, но в разных областях действительного пространства. То же самое можно сказать и об эйконалах (44), (48). Пусть R, φ — полярные координаты точки A на окружности радиуса R с центром O. Тогда эйкональная траектория $\tau'=\varphi$ во всем действительном пространстве представляет собой совокупность радиуса OA и ортогональной ему касательной к этой окружности в точке A.

Из вышеизложенного можно сделать следующие выводы.

1) Исходные формулы (1), (15) путем подбора функций a, b, c позволяют решить любую задачу Коши для уравнения эйконала (14), а потому представляют общее его решение в однородной среде.

2) На плоскости (x, y) эйкональная картина состоит из линий $\tau'=\text{const}$ — эйкональных траекторий и линий $\tau''=\text{const}$ или линий $s'=\text{const}$ в зависимости от выполнимости условий (6). В первом случае комплексный эйконал параметрически выражается через параметры (τ', τ''), во втором — через (τ', s'). В месте смены параметров эйкональная траектория имеет излом, физически обусловленный, например, переходом свет — тень.

3) Условия применимости обычной ГО представляют собой частный случай вырожденной ситуации, когда выполняется условие (6).

4) Метод построения эйкональной траектории по существу опирается на концепцию комплексного луча, только вместо нахождения точки пересечения его с действительным пространством (которой может и не быть) мы ищем такое соотношение между комплексными параметрами, фиксирующими комплексный луч (τ), и точку на нем (s), при котором последняя имеет действительные декартовы (пространственные) координаты.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бабич В. М. — Труды III Всесоюзного симпозиума по дифракции волн. — М.: Наука, 1964. с. 78.
2. Боровиков В. А., Кинбер Б. Е. — ТИИЭР, 1974, **62**, № 11, с. 6.
3. Боровиков В. А., Кинбер Б. Е. Геометрическая теория дифракции. — М.: Связь, 1978.
4. Choudhary S., Felsen L. B. — IEEE Trans. Ant. Propag., 1973, **AP-21**, p. 827.
5. Чоудхари, Фелсен. — ТИИЭР, 1974, **62**, № 11 с. 136.
6. Дешамп. — ТИИЭР, 1972, **60**, № 9, с. 5.
7. Кравцов Ю А., Орлов Ю. И. Геометрическая оптика неоднородных сред. — М.: Наука, 1980.
8. Кравцов Ю. А. — Изв. вузов — Радиофизика, 1967, **10**, № 9—10, с. 1283.
9. Дешамп. — ТИИЭР, 1974, **62**, № 11, с. 227.
10. Беннет. — ТИИЭР, 1974, **62**, № 11, с. 193.
11. Вэй-И. Д. Ван, Дешамп. — ТИИЭР, 1974, **62**, № 11 с. 150.
12. Фок В. А. Проблемы дифракции и распространения электромагнитных волн. — М.: Сов. радио, 1970.
13. Epstein P. S. — Proc. Nat. Acad. Sci. U. S., 1930, **16**, p. 37.

Поступила в редакцию
29 июля 1983 г.

THE METHOD OF EIKONAL TRAJECTORIES AND ITS APPLICATION TO THE CALCULATION OF COMPLEX EICONALS IN A HOMOGENEOUS MEDIUM

R. L. Evel'son

Trajectories have been defined by analogy with a ray in two-dimensional real space at which a complex eikonal is unambiguously calculated in a homogeneous isotropic medium. An evident real parametric presentation of the eikonal trajectory and the complex eikonal have been obtained.